Tema 3
Contrastes de hipótesis

José R. Berrendero

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Estructura de este tema

- ¿Qué es un contraste de hipótesis?
- Elementos de un contraste: hipótesis, tipos de error, nivel de significación, región crítica.
- Contrastes para la media de una población normal
- Comparación de dos medias: muestras independientes y datos emparejados (sólo se tratará el caso de varianzas iguales)
- Contrastes para una proporción
- Comparación de dos proporciones
- Constrastes de homogeneidad

¿Qué es un contraste de hipótesis?

Una **hipótesis** es una afirmación que se hace sobre la población.

La hipótesis es **paramétrica** si se refiere a los valores que toma alguno de los parámetros poblacionales.

Por ejemplo, una hipótesis paramétrica es: "la media poblacional es positiva" ($\mu > 0$).

Un **contraste de hipótesis** es una técnica estadística para juzgar si los datos aportan evidencia o no para confirmar una hipótesis.

Ejemplo

Los refrescos de cola *light* utilizan edulcorantes artificiales que pueden perder su efecto con el tiempo.

En un experimento se pidió a varias personas que probaran refrescos dietéticos y calificaran su grado de sabor dulce en una escala de 1 a 10.

Tras almacenar las bebidas durante un mes a alta temperatura (para imitar el efecto de 4 meses de almacenamiento a temperatura ambiente) las mismas personas probaron de nuevo los refrescos y calificaron de nuevo su grado de sabor dulce.

En la siguiente tabla aparecen las diferencias en las puntuaciones (a mayor diferencia, mayor caída del sabor):

$$2,\ 0.4,\ 0.7,\ 2,\ -0.4,\ 2.2,\ -1.3,\ 1.2,\ 1.1,\ 2.3$$

La mayoría de los datos son positivos. Es decir, la mayoría de las personas apreciaron pérdida en el nivel de sabor.

Pero las diferencias no son muy grandes (e incluso dos personas apreciaron un incremento).

La pregunta que trata de responder un contraste de hipótesis es: **¿Proporcionan estos datos evidencia de que el nivel medio de sabor decrece?**

La media estimada a partir de los datos es $\bar{x} = 1.02$.

- ¿Refleja esta estimación un auténtico descenso en el nivel medio de sabor?
- ¿Se debe el resultado a razones puramente aleatorias?

Elementos de un contraste de hipótesis

La hipótesis para la que se desea encontrar evidencia se llama **hipótesis alternativa**. Se denota H_1.

La afirmación contraria a H_1 se llama **hipótesis nula**. Se denota H_0.

Llamamos μ al descenso medio (desconocido) del grado de sabor de los refrescos.

Como queremos confirmar si el grado medio realmente desciende, queremos contrastar

$$H_0 : \ \mu \leq 0 \ \text{ frente a } \ H_1 : \ \mu > 0$$

El **razonamiento básico** para hacer este contraste es:

- Supongamos que H_0 es cierta, es decir, $\mu \leq 0$.
- ¿Es el resultado obtenido a partir de los datos ($\bar{x} = 1.02$) extraño bajo esta hipótesis?
- Si esto es así, los datos aportan evidencia contra H_0 y a favor de H_1.

Para llevar a cabo el análisis anterior tenemos que estudiar qué valores son los que cabe esperar que tome $\bar{x}$ cuando H_0 es cierta.

Para simplificar suponemos de momento que la población es **normal** y que **la varianza es conocida** y vale $\sigma = 1$.

Supongamos que H_0 es cierta y que μ vale 0 (toma el valor en el que más difícil es distinguir entre H_0 y H_1).

Sabemos (tema 2) que

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \equiv \mathrm{N}(0, 1).$$

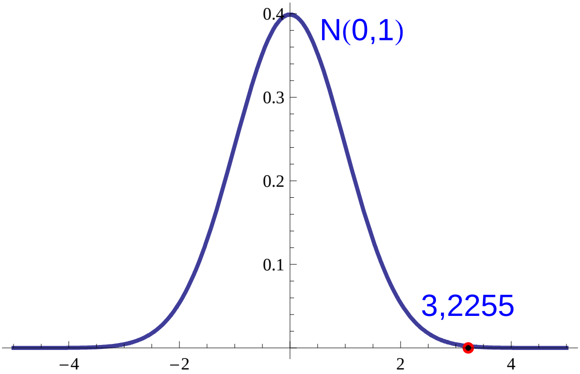
Para juzgar si el valor $\bar{x} = 1.02$ es compatible con $\mu = 0$ calculamos

$$t = \frac{1.02 - 0}{1/\sqrt{10}} = 3.2255$$

y comparamos con la distribución normal estándar.

Podemos interpretar $t = 3.2255$ como la distancia entre $\bar{x}$ y 0 *medida en desviaciones típicas*.

Mirando las tablas de la normal: $\mathrm{P}(Z > 3.2255) < 0.001$.



Si $\mu = 0$, en menos de 1 de cada 1000 muestras se obtendría un valor de t superior a 3.2255.

Si $\mu < 0$, la proporción de muestras sería todavía menor.

Como 3.2255 es un valor bastante improbable para una distribución $\mathrm{N}(0, 1)$, los datos proporcionan bastante evidencia en contra de H_0 y a favor de H_1.

Parece que la distancia entre $\bar{x}$ y 0 es "suficientemente grande" como para rechazar $H_0 : \mu \leq 0$.

Tipos de error

¿Qué significa "suficientemente grande"? Depende de lo seguros que queramos estar a la hora de rechazar o no la hipótesis nula. Se pueden cometer dos tipos de errores:

- **Error de tipo I**: Rechazar H_0 cuando es cierta.
- **Error de tipo II**: Aceptar H_0 cuando es falsa.

De los dos errores sólo vamos a poder controlar el error de tipo I. Por ello, se deben definir las hipótesis de forma que el error de tipo I sea el más grave (equivalentemente, H_1 debe ser la hipótesis que queremos confirmar).

Se llama **nivel de significación** α de un contraste a la mayor probabilidad de cometer un error de tipo I cuando se utiliza ese contraste.

Región crítica o de rechazo

Vamos a rechazar $H_0 : \mu \leq 0$ siempre que la distancia entre $\bar{x}$ y $\mu = 0$ sea "suficientemente grande", mayor que un valor crítico c:

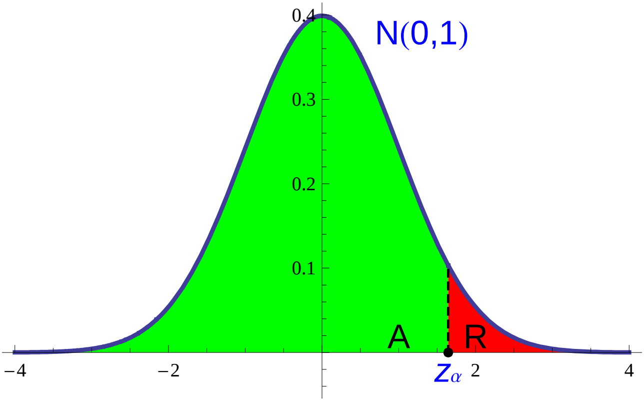
$$\frac{\bar{x} - 0}{1/\sqrt{10}} > c.$$

Para determinar c fijamos el nivel de significación α. Los valores $\alpha = 0.01$ o $\alpha = 0.05$ son los más habituales.

$$\mathrm{P}_{H_0}(\textsc{Rechazar}) = \mathrm{P}_{H_0}\left(\frac{\bar{x} - 0}{1/\sqrt{10}} > c\right) \leq \mathrm{P}(Z > c) = \alpha.$$

Por lo tanto el valor $c = z_\alpha$ garantiza $\mathrm{P}_{H_0}(\textsc{Rechazar}) \leq \alpha$.

Región crítica o de rechazo



Región crítica o de rechazo

Rechazaremos $H_0 : \mu \leq 0$ a nivel α siempre que se verifique:

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - 0}{1/\sqrt{10}} > z_\alpha \right\}.$$

A R se le llama **región de rechazo** o **región crítica**.

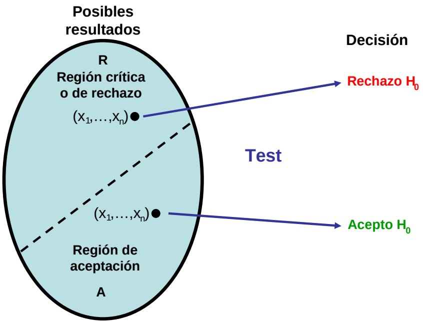
Para los datos del ejemplo recordemos que

$$\frac{\bar{x} - 0}{1/\sqrt{10}} = 3.2255$$

Para hacer el contraste a nivel $\alpha = 0.05$, buscamos en las tablas $z_{0.05} = 1.64$.

Como $3.2255 > 1.64$, estamos en la región crítica y rechazamos la hipótesis nula $\mu \leq 0$ a nivel $\alpha = 0.05$.

Región crítica o de rechazo



Para la mayoría de los contrastes la región crítica es de la forma:

$$R = \left\{ \frac{\text{Distancia entre datos y } H_0}{\text{E.T. de la distancia}} > \mathsf{c} \ (\text{tablas}) \right\}.$$

Todos los contrastes se basan en las mismas ideas que hemos introducido hasta ahora. Vamos a ver ejemplos de aplicación de las fórmulas en distintas situaciones.

Ejemplo del edulcorante cuando σ es desconocida

Queremos contrastar $H_0 : \mu \leq 0$ frente a $H_1 : \mu > 0$ (es decir, contraste unilateral con $\mu_0 = 0$) a nivel $\alpha = 0.05$.

Suponemos ahora que σ no es conocida. La aproximamos a partir de la muestra:

$$2,\ 0.4,\ 0.7,\ 2,\ -0.4,\ 2.2,\ -1.3,\ 1.2,\ 1.1,\ 2.3$$

Para ello usamos el estimador:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 1.196$$

Ejemplo del edulcorante cuando σ es desconocida

Calculamos el **estadístico t**:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1.02 - 0}{1.196/\sqrt{10}} = 2.697.$$

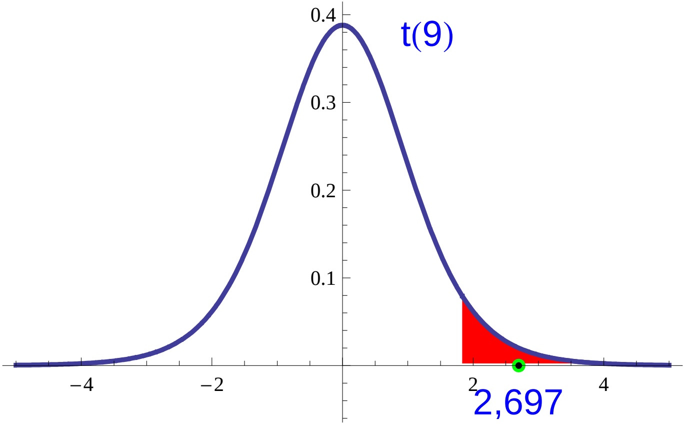
En las tablas de la t buscamos el valor:

$$t_{9,0.05} = 1.833$$

Como $2.697 > 1.833$ estamos en la región crítica y rechazamos H_0 a nivel $\alpha = 0.05$.

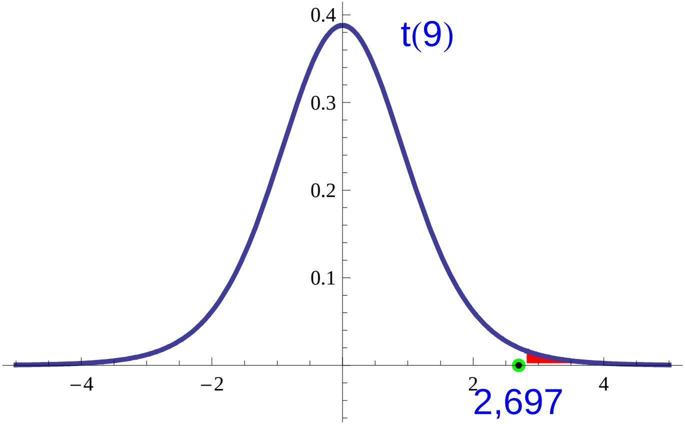
Ejemplo del edulcorante cuando σ es desconocida

Como $2.697 > 1.833$ estamos en la región crítica y rechazamos H_0 a nivel $\alpha = 0.05$.



Ejemplo del edulcorante cuando σ es desconocida

¿Cuál es la conclusión si fijamos $\alpha = 0.01$?



Contrastes para la media de una población normal (varianza desconocida)

Contrastes unilaterales:

- Hipótesis: $H_0 : \mu \leq \mu_0$ frente a $H_1 : \mu > \mu_0$
- Región crítica:

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha} \right\}.$$

- Hipótesis: $H_0 : \mu \geq \mu_0$ frente a $H_1 : \mu < \mu_0$
- Región crítica:

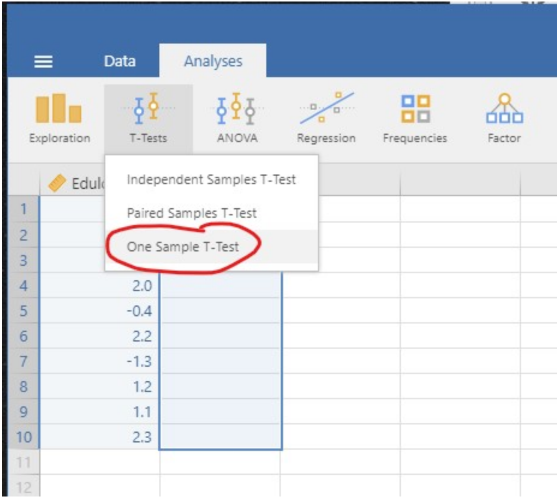
$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha} \right\}.$$

Contraste bilateral:

- Hipótesis: $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- Región crítica:

$$R = \left\{ \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha/2} \right\}.$$

Solución con jamovi



Resultado que da jamovi

One Sample T-Test

One Sample T-Test

		statistic	df	p	Mean difference	95% Confidence Interval	
						Lower	Upper
Edulcorante	Student's t	2.70	9.00	0.025	1.02	0.164	1.88

Descriptives

	N	Mean	Median	SD	SE
Edulcorante	10	1.02	1.15	1.20	0.378

P-valor de un contraste

Dados unos datos, si el nivel de significación es pequeño resulta más difícil rechazar la hipótesis nula.

Hay un valor $\alpha = p$ a partir del cual ya no podemos rechazar H_0. Es decir si $\alpha < p$ ya no se rechaza H_0.

A p se le llama el **p-valor** del contraste. El p-valor indica el punto de división entre el rechazo y la aceptación:

- Si $\alpha < p$, no podemos rechazar H_0 a nivel α.
- Si $\alpha > p$, podemos rechazar H_0 a nivel α.

El p-valor es una medida del grado de compatibilidad de los datos con la hipótesis nula H_0.

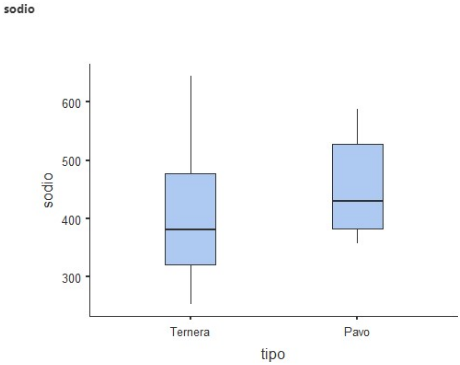
Cuando es pequeño (usualmente menor que $\alpha = 0.05$) se considera que hay evidencia suficiente para rechazar H_0.

Comparación de dos medias (muestras independientes)

Se ha considerado la cantidad de sodio en salchichas de varias marcas de dos tipos: ternera y pavo.

Descriptives

	tipo	sodio
N	Ternera	20
	Pavo	17
Mean	Ternera	401
	Pavo	459
Std. error mean	Ternera	22.9
	Pavo	20.6
Standard deviation	Ternera	102
	Pavo	84.7
Variance	Ternera	10493
	Pavo	7181



Parece que, en estas muestras, las salchichas de pavo tienen más sodio en media. Pero las dos muestras se solapan bastante. ¿Son las diferencias muestrales significativas?

¿Aportan evidencia estos datos para afirmar que el contenido medio de sodio de las salchichas de pavo es distinto al de las salchichas de ternera?

$X_1, \ldots, X_n$ es una muestra de $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma)$
$Y_1, \ldots, Y_m$ es una muestra de $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma)$

Supuestos necesarios:

- Las muestras proceden de dos poblaciones normales.
- Las varianzas son desconocidas pero iguales.
- Las dos muestras son independientes.

Hipótesis que queremos contrastar ($\alpha = 0.05$)

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 \ \text{ frente a } \ H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

Región crítica (formulario)

$$R = \left\{ \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} > t_{n+m-2,\alpha/2} \right\}.$$

Estimador combinado de la varianza

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}$$

Con los datos del ejemplo,

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |401 - 459| = 58$$

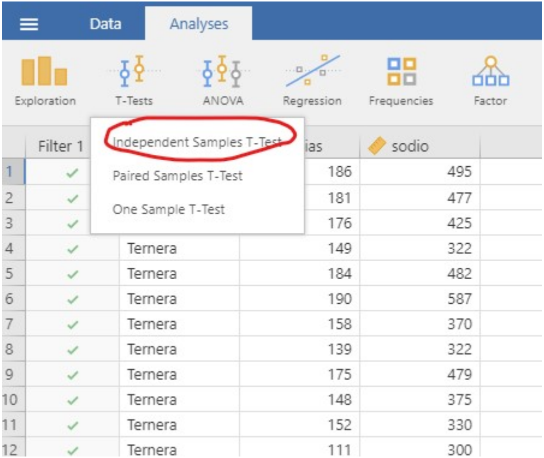
$$s_p^2 = \frac{19 \times 10493 + 16 \times 7181}{35} = 8978.94 \quad \text{y} \quad s_p = 94.76$$

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} = \frac{58}{94.76\sqrt{1/20 + 1/17}} = \frac{58}{31.26} = 1.85$$

$$t_{35,0.025} \approx 2.03$$

Como $1.85 < 2.03$, no podemos rechazar H_0. Las diferencias encontradas en las cantidades medias de sodio de las dos muestras **no son significativas** al nivel $\alpha = 0.05$.

Con jamovi


Data
Analyses
Exploration
T-Tests
ANOVA
Regression
Frequencies
Factor
Filter 1
Independent Samples T-Test
Paired Samples T-Test
One Sample T-Test
ias
sodio
1 186 495
2 181 477
3 176 425
4 Ternera 149 322
5 Ternera 184 482
6 Ternera 190 587
7 Ternera 158 370
8 Ternera 139 322
9 Ternera 175 479
10 Ternera 148 375
11 Ternera 152 330
12 Ternera 111 300

Independent Samples T-Test

		statistic	df	p	95% Confidence Interval	
					Lower	Upper
sodio	Student's t	−1.85	35.0	0.073	−121	5.61

Group Descriptives

	Group	N	Mean	Median	SD	SE
sodio	Ternera	20	401	381	102	22.9
	Pavo	17	459	430	84.7	20.6

- El p-valor es 0.073. Esto significa que se puede rechazar H_0 si $\alpha > 0.073$. Al nivel $\alpha = 0.05$ no podemos rechazar.

Comparación de dos medias (datos emparejados)

Se usan cinco dosis de una sustancia ferrosa para determinar si existen diferencias entre llevar a cabo un análisis químico de laboratorio o un análisis de fluorescencia por rayos X para determinar el contenido de hierro. Cada dosis se divide en dos partes iguales a las que se aplica cada uno de los dos procedimientos. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Dosis	1	2	3	4	5
Rayos X	2.0	2.0	2.3	2.1	2.4
Análisis Químico	2.2	1.9	2.5	2.3	2.4

Se supone que las poblaciones son normales. ¿Aportan los datos evidencia suficiente a nivel $\alpha = 0.05$ para afirmar que el contenido medio de hierro detectado cuando se utiliza el análisis químico es diferente del contenido medio detectado cuando se utilizan rayos X?

Parámetros:

- μ_1 es el contenido medio detectado por rayos X
- μ_2 es el contenido medio detectado por análisis químico.

Hipótesis:

Cuando las muestras **no son independientes**, en lugar de contrastar $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ frente a $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, se contrasta

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \mu \neq 0,$$

donde μ es el valor esperado de las diferencias $d_i = x_i - y_i$.

Dosis	1	2	3	4	5
x_i	2.0	2.0	2.3	2.1	2.4
y_i	2.2	1.9	2.5	2.3	2.4
d_i	-0.2	0.1	-0.2	-0.2	0

Con estos datos: $\bar{d} = -0.1$ y $S_d = 0.1414$.

Región crítica (formulario):

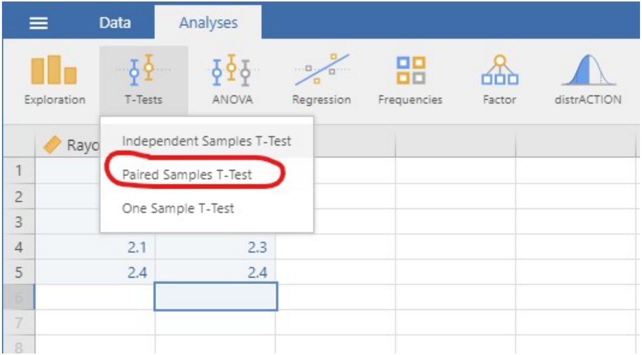
$$R = \left\{ \frac{|\bar{d}|}{S_d/\sqrt{n}} > t_{n-1;\alpha/2} \right\}.$$

Mirando en las tablas $t_{4;0.025} = 2.776$.
Por otra parte,

$$\frac{|\bar{d}|}{S_d/\sqrt{n}} = \frac{0.1}{0.1414/\sqrt{5}} = 1.5811.$$

Como $1.5811 < 2.776$, los datos disponibles no permiten afirmar a nivel 0.05 que los dos métodos proporcionan cantidades medias de hierro diferentes.

Con jamovi



Data
Analyses
Exploration
T-Tests
ANOVA
Regression
Frequencies
Factor
distrACTION
Rayo
Independent Samples T-Test
Paired Samples T-Test
One Sample T-Test
1
2
3
4
5
6
7
8
2.1
2.3
2.4
2.4

Con jamovi

Paired Samples T-Test

			statistic	df	p	Mean difference	SE difference
RayosX	AQuímico	Student's t	−1.58	4.00	0.189	−0.100	0.0632

Descriptives

	N	Mean	Median	SD	SE
RayosX	5	2.16	2.10	0.182	0.0812
AQuímico	5	2.26	2.30	0.230	0.1030

Contrastes para una proporción

En un estudio, 1000 personas siguieron una dieta de adelgazamiento durante 3 meses. De las 1000 personas, 791 perdieron más de 3 kg de peso. ¿Permiten los datos afirmar, con el nivel de significación $\alpha = 0.01$, que más del 70% de la población perdería más de 3 kg de peso de seguir la misma dieta durante el mismo tiempo?

Hipótesis:

$$H_0 : p \leq 0.7 \quad \text{frente a} \quad H_1 : p > 0.7,$$

donde p es la proporción poblacional que pierde peso.

Región crítica (formulario):

$$R = \left\{ \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > z_\alpha \right\}$$

En este caso, $n = 1000$, $p_0 = 0.7$, $\hat{p} = 0.791$ y $z_{0.01} = 2.33$.

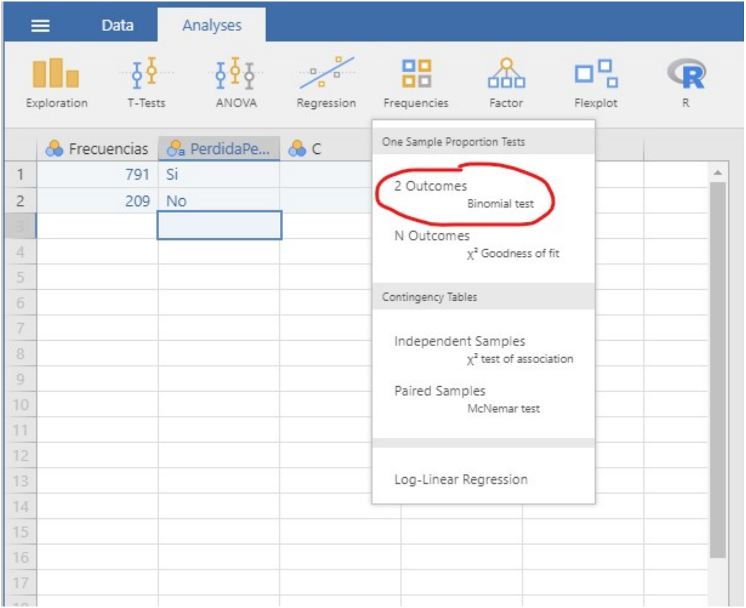
$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.791 - 0.7}{\sqrt{\frac{0.7\times 0.3}{1000}}} = 6.28$$

Por lo tanto, podemos rechazar H_0 y afirmar que más del 70% de la población perdería más de 3 kg de peso de seguir la misma dieta durante el mismo tiempo.

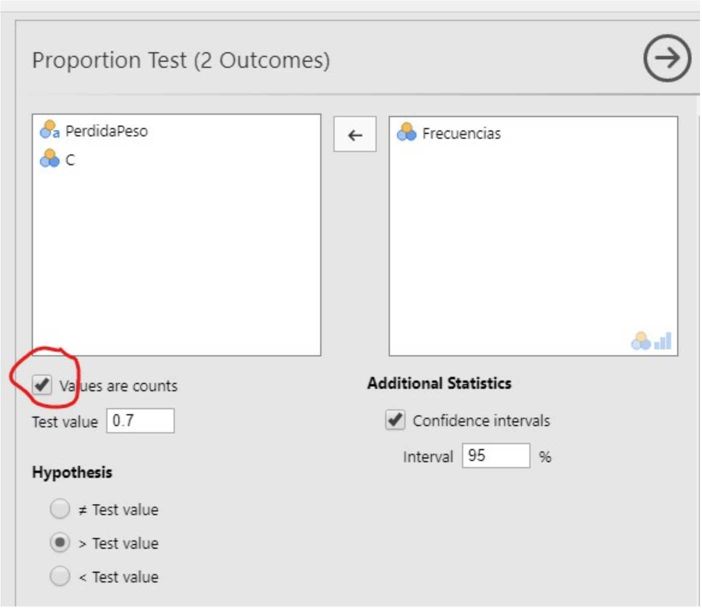
Cuestiones

- ¿Es el p-valor menor o mayor que 0.02?
- Con los mismos datos, ¿podemos afirmar a nivel $\alpha = 0.01$ que menos del 90% de la población perdería más de 3 kg?
- La misma pregunta si la muestra es de 10 personas y hay 8 de ellas que pierden más de 3 kg.

Contrastes para una proporción con *jamovi*



Contrastes para una proporción con *jamovi*



Contrastes para una proporción con *jamovi*

Binomial Test

	Level	Count	Total	Proportion	p	95% Confidence Interval	
						Lower	Upper
Frecuencias	1	791	1000	0.791	< .001	0.769	1.00
	2	209	1000	0.209	1.000	0.188	1.00

Note. H_a is proportion > 0.7

Binomial Test

	Level	Count	Total	Proportion	p	95% Confidence Interval	
						Lower	Upper
Frecuencias	1	791	1000	0.791	< .001	0.764	0.816
	2	209	1000	0.209	< .001	0.184	0.236

Note. H_a is proportion ≠ 0.5

Comparación de dos proporciones

Se ha llevado a cabo un estudio para determinar si un medicamento dirigido a reducir el nivel de colesterol reduce también la probabilidad de sufrir un infarto. Para ello, a hombres de entre 45 y 55 años se les asignó aleatoriamente uno de los dos tratamientos siguientes:

- 2051 hombres tomaron un medicamento para reducir el nivel de colesterol
- 2030 hombres tomaron un placebo

Durante los cinco años que duró el estudio, 56 de los hombres que tomaron el medicamento, y 84 de los que tomaron el placebo, sufrieron infartos.

¿Podemos afirmar a nivel 0.05 que el medicamento es efectivo?

Parámetros:

- p_1: Probabilidad de sufrir un infarto si se toma el medicamento.
- p_2: Probabilidad de sufrir un infarto si se toma el placebo.

Hipótesis: $H_0 : p_2 \leq p_1$ frente a $H_1 : p_2 > p_1$.

Estimadores de los parámetros:

$$\hat{p}_1 = \frac{56}{2051} = 0.0273 \text{ y } \hat{p}_2 = \frac{84}{2030} = 0.0414$$

Estimación de la probabilidad de infarto si fuese $p_1 = p_2$ (es decir, cuando H_0 es cierta pero la probabilidad de error es más alta):

$$\bar{p} = \frac{\text{Numero total de infartos}}{\text{Numero total de personas}} = \frac{56 + 84}{2051 + 2030} = 0.0343$$

Región crítica (formulario)

$$R = \left\{ \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} > z_\alpha \right\}$$

Con los datos del ejemplo:

$$\frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.0141}{\sqrt{0.0343 \times 0.9657 \times \left(\frac{1}{2051} + \frac{1}{2030}\right)}} = 2.47$$

$$z_{0.05} = 1.64$$

Como $2.47 > 1.64$, podemos rechazar H_0 y afirmar que el medicamento es efectivo a nivel $\alpha = 0.05$.

Constraste de homogeneidad

Un grupo de 83 pacientes de *trastorno por atracón (binge eating disorder)* participaron en un estudio del efecto de antidepresivos. A 40 de ellos se les administró *fluvoxamina* y a 43 un placebo (grupo de control).

Se midió la respuesta al tratamiento con los resultados siguientes:

	Sin efecto	Ef. moderado	Ef. elevado	Remisión	Total
Fluvoxamina	15	7	3	15	40
Placebo	22	7	3	11	43
Total	37	14	6	26	83

Queremos contrastar si la respuesta tiene la misma distribución (H_0) para el grupo de tratamiento con fluvoxamina y para el grupo de control.

Un contraste de homogeneidad se utiliza para contrastar la hipótesis nula de que varias muestras proceden de la misma distribución.

Constraste de homogeneidad

En el caso general puede haber p tratamientos $(M_1, \ldots, M_p)$ y k respuestas $(A_1, \ldots, A_k)$.

La comparación de dos proporciones en dos muestras es un caso particular ($p = k = 2$).

	A_1	$\cdots$	A_k	Total
M_1	O_{11}	$\cdots$	O_{1k}	$O_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
M_p	O_{p1}	$\cdots$	O_{pk}	$O_{1.}$
Total	$O_{.1}$	$\cdots$	$O_{.k}$	n

Frecuencias observadas: O_{ij} número de individuos de la muestra (tratamiento) i que pertenecen a la clase (respuesta) j.

Idea del contraste, frecuencias esperadas

Se calculan las **frecuencias esperadas** E_{ij} si la hipótesis nula fuese cierta. Se comparan las frecuencias esperadas con las observadas. Si hay mucha diferencia se rechaza la hipótesis nula.

En el ejemplo, ¿cuál sería la frecuencia esperada bajo H_0 de que no tenga efecto el tratamiento con fluvoxamina (E_{11})?

Hubo en total 37 personas para las que no se encontró efecto. Si la hipótesis nula fuese cierta, la proporción de ellas que recibieron fluvoxamina debería coincidir con la proporción de personas que recibió fluvoxamina sobre el total:

$$\frac{x}{37} = \frac{40}{83} \Rightarrow x = \frac{37 \times 40}{83} \approx 17.8$$

En general,

$$E_{ij} = \frac{O_{i.} \times O_{.j}}{n}$$

Comparación de frecuencias observadas y esperadas

	A_1	$\cdots$	A_k	Total
M_1	O_{11}	$\cdots$	O_{1k}	$O_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
M_p	O_{p1}	$\cdots$	O_{pk}	$O_{1.}$
Total	$O_{.1}$	$\cdots$	$O_{.k}$	n

	A_1	$\cdots$	A_k	Total
M_1	E_{11}	$\cdots$	E_{1k}	$E_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
M_p	E_{p1}	$\cdots$	E_{pk}	$E_{1.}$
Total	$E_{.1}$	$\cdots$	$E_{.k}$	n

En el ejemplo las frecuencias observadas son:

	Sin efecto	Ef. moderado	Ef. elevado	Remisión	Total
Fluvoxamina	15	7	3	15	40
Placebo	22	7	3	11	43
Total	37	14	6	26	83

y las esperadas son

	Sin efecto	Ef. moderado	Ef. elevado	Remisión	Total
Fluvoxamina	17.8	6.75	2.89	15	40
Placebo	19.2	7.25	3.11	13.5	43
Total	37	14	6	26	83

Comparación de frecuencias observadas y esperadas

Para comparar las frecuencias observadas y las esperadas se usa el estadístico χ^2 de Pearson:

$$T = \frac{(O_{11} - E_{11})^2}{E_{11}} + \cdots + \frac{(O_{pk} - E_{pk})^2}{E_{pk}}.$$

En el ejemplo, $T = 1.83$.

Puede demostrarse que bajo H_0, T tiene distribución χ^2 con $(p-1)(k-1)$ grados de libertad.

$$R = \{T > \chi^2_{(p-1)(k-1),\alpha}\}$$

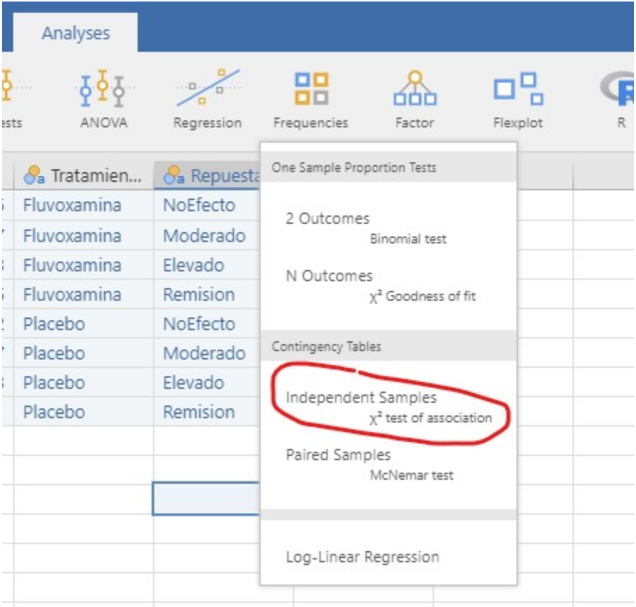
En el ejemplo $\chi^2_{3,0.05} = 7.815 > 1.83$. Se acepta la hipótesis nula.

Tablas de la distribución χ^2

Son similares a las tablas de la distribución t-Student.

						α						
n	0.9975	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01
1	9.82E-06	3.93E-05	1.57E-04	9.82E-04	3.93E-03	1.58E-02	0.1015	0.4549	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635
2	5.01E-03	1.00E-02	2.01E-02	5.06E-02	0.1026	0.2107	0.5754	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210
3	4.49E-02	7.17E-02	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34
4	0.1449	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28
5	0.3075	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09
6	0.5266	0.6757	0.8721	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81
7	0.7945	0.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.104	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09
9	1.450	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67
10	1.827	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21
11	2.232	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.341	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72
12	2.661	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.340	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22
13	3.112	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	12.340	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69
14	3.582	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14
15	4.070	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58
16	4.573	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00
17	5.092	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41
18	5.623	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81
19	6.167	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19
20	6.723	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57

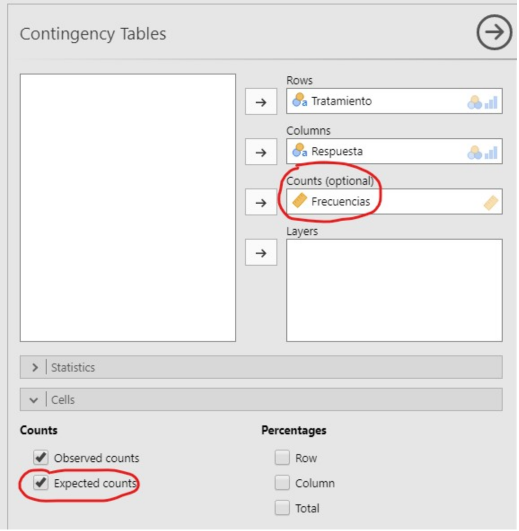
Contraste de homogeneidad con *jamovi*



Contraste de homogeneidad con *jamovi*

	Frecuencias	Tratamien...	Respuesta
1	15	Fluvoxamina	NoEfecto
2	7	Fluvoxamina	Moderado
3	3	Fluvoxamina	Elevado
4	15	Fluvoxamina	Remision
5	22	Placebo	NoEfecto
6	7	Placebo	Moderado
7	3	Placebo	Elevado
8	11	Placebo	Remision
9			

Contraste de homogeneidad con *jamovi*



Contraste de homogeneidad con *jamovi*

Contingency Tables

Tratamiento		Repuesta				
		Moderado	NoEfecto	Elevado	Remision	Total
Fluvoxamina	Observed	7	15	3	15	40
	Expected	6.75	17.8	2.89	12.5	
Placebo	Observed	7	22	3	11	43
	Expected	7.25	19.2	3.11	13.5	
Total	Observed	14	37	6	26	83
	Expected	14	37	6	26	

χ^2 Tests

	Value	df	p
χ^2	1.83	3	0.608
N	83		