Tema 4
Intervalos de confianza

José R. Berrendero

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Estructura de este tema

- ¿Qué es un intervalo de confianza (IC)?

- IC en problemas relacionados con una muestra:
  - IC para la media de una población normal.
  - IC para una proporción.
  - IC para el parámetro λ de una distribución de Poisson.
  - IC para la varianza de una población normal.

- IC en problemas relacionados con dos muestras:
  - IC para la diferencia de medias: muestras independientes y datos emparejados.
  - IC para la diferencia de proporciones.
  - IC para el cociente de varianzas.

Intervalos de confianza

Un **intervalo de confianza (IC)** para un parámetro es un intervalo, calculado a partir de la muestra, que contiene al parámetro con un alto grado de seguridad.

La **fórmula general** de la mayoría de los intervalos que vamos a estudiar es:

$$[\textsc{Estimador} \mp \textsc{Margen de error}]$$

El **centro** del intervalo es el estimador del parámetro en el que estamos interesados.

El **margen de error** depende

- de la precisión del estimador utilizado,
- del grado de seguridad con el que queremos que el intervalo contenga al parámetro (el nivel de confianza).

IC para la media de una población normal (varianza conocida)

Queremos estimar el contenido medio en grasas (en g/100 g) de la carne de cerdo, μ. Para ello disponemos de una muestra de 12 piezas de carne para la que el contenido medio es $\bar{x} = 24.93$.

Esto significa que $\mu \approx 24.93$. Por supuesto, $\mu \neq 24.93$. Si tomáramos otras 12 piezas distintas nos habría resultado una estimación de μ diferente.

Un IC es una forma de precisar qué significa $\mu \approx 24.93$.

Suponemos que la población es normal y que la desviación típica de la población es conocida y vale $\sigma = 0.25$.

Como $\bar{x} \equiv \mathrm{N}(\mu, 0.25/\sqrt{12})$, sabemos qué valores podríamos esperar si tomáramos muchas muestras de tamaño 12.

Aproximadamente para el 95% de las muestras de tamaño 12 se cumple:

$$-0.072 \times 1.96 < \bar{x} - \mu < 0.072 \times 1.96.$$

Las desigualdades anteriores son equivalentes a:

$$\bar{x} - 0.072 \times 1.96 < \mu < \bar{x} + 0.072 \times 1.96.$$

Aproximadamente para el 95% de las muestras de tamaño 12 se cumple que $\mu \in [\bar{x} \mp 0.1411]$.

Confiamos (con un nivel del 95%) en que la única muestra de la que disponemos sea una de las que verifican la condición.

Decimos que $[24.93 \mp 0.1411]$ es un IC para μ de nivel 95%.

Cuestiones:

- Con los mismos datos del ejemplo anterior calcula dos intervalos cuyos niveles de confianza sean 90% y 99%.
- Se ha obtenido $\bar{x} = 24.93$ pero la muestra era de 36 piezas en lugar de 12. Calcula un intervalo de nivel 95%.
- Se ha obtenido $\bar{x} = 24.93$ con una muestra de 36 piezas pero $\sigma = 1$ en lugar de $\sigma = 0.25$. Calcula un intervalo de nivel 95%.

Fórmula general: Un IC con nivel de confianza $1 - \alpha$ para la media de una población normal con σ conocida viene dado por:

$$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{x} \mp z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

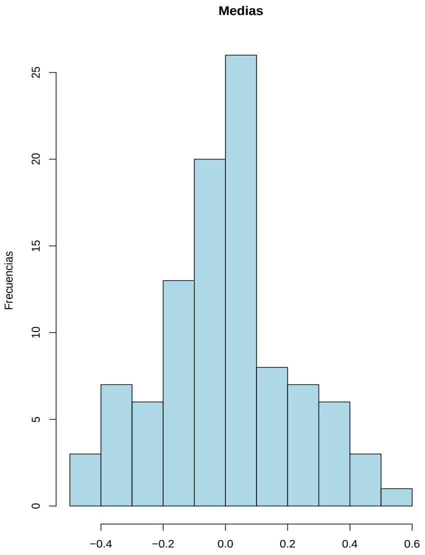
Interpretación del nivel de confianza

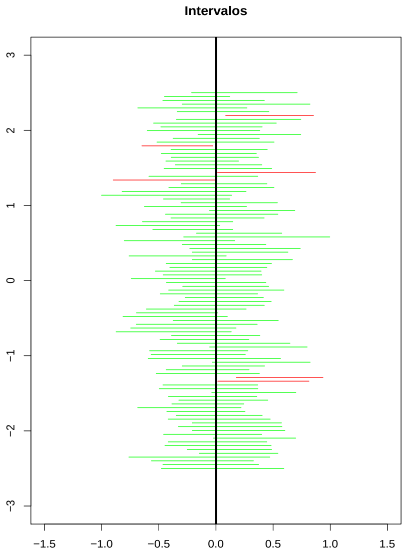
- Población: normal con media $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.
- Se extraen 100 muestras de tamaño $n = 20$.
- Para cada muestra se calcula $\bar{x}$ y el intervalo de confianza para μ de nivel 95% (suponemos varianza poblacional conocida):

$$[\bar{x} \mp z_{0.025}\sigma/\sqrt{n}].$$

- Se representa un histograma de las 100 medias obtenidas, así como los 100 intervalos (en verde si contienen el valor 0 y en rojo si no).

Interpretación del nivel de confianza





Si σ no es conocida y la población no es normal

Como no conocemos σ, sustituimos en la fórmula σ por su estimador s calculado a partir de la muestra.

Cuando el tamaño muestral n es suficientemente grande la fórmula sigue dando un intervalo de confianza aproximadamente válido:

$$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu) \approx \left[\bar{x} \mp z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

El nivel de confianza ya no es exactamente $1-\alpha$. Este nivel es aproximado.

Margen de error

Al radio del intervalo se le suele llamar **margen de error**, E. En la situación anterior:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

El margen de error depende de:

- El **nivel de confianza** deseado, a través de $z_{\alpha/2}$. Se suele tomar $\alpha = 0.05$ lo que da $z_{0.025} = 1.96 \approx 2$.
- La **heterogeneidad de la población**, medida a través de s.
- El **tamaño muestral** n.

Si σ no es conocida y la población es normal

- Cuando la población es normal y σ no es conocida, es posible dar un IC exacto **incluso cuando el tamaño muestral n es pequeño**.

- Para ello, basta mirar en unas tablas distintas. En lugar de buscar $z_{\alpha/2}$ en las tablas de la normal, buscamos $t_{n-1,\alpha/2}$ en las tablas de la distribución t de Student. La fórmula del IC queda
$$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{x} \mp t_{n-1,\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Distribución t de Student

- La distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad (t_{n-1}) es la distribución de

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

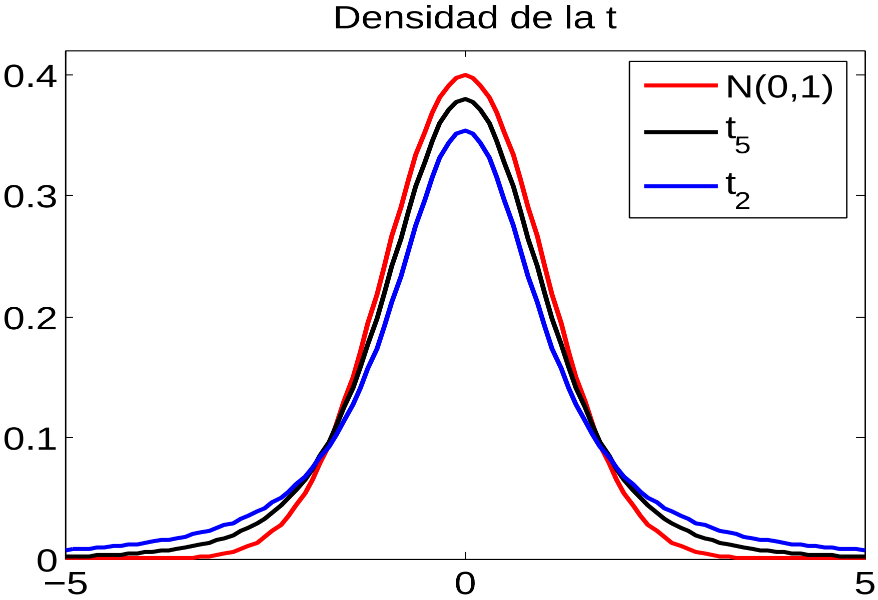
  en una población normal.

- La forma de la densidad de t_n es similar a la de la normal. Es simétrica alrededor de cero.

- Sin embargo, la distribución t_n da más probabilidad a valores lejanos al centro.

- Si n es grande $t_n \cong \mathrm{N}(0,1)$.

Función de densidad de la distribución t-Student



Tablas de la distribución t-Student

	α											
n	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.008	0.005	0.004	0.0025	0.0017
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	39.78	63.66	79.57	127.3	187.2
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	7.811	9.925	11.11	14.09	17.11
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	4.930	5.841	6.322	7.453	8.517
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.010	4.604	4.908	5.598	6.221
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	3.573	4.032	4.262	4.773	5.224
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.320	3.707	3.898	4.317	4.679
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.157	3.499	3.667	4.029	4.339
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.043	3.355	3.507	3.833	4.108
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	2.958	3.250	3.390	3.690	3.941
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	2.894	3.169	3.301	3.581	3.815
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	2.843	3.106	3.231	3.497	3.717
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	2.801	3.055	3.175	3.428	3.638
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	2.767	3.012	3.128	3.372	3.573
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.739	2.977	3.089	3.326	3.520
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.714	2.947	3.056	3.286	3.474
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.693	2.921	3.028	3.252	3.435
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.675	2.898	3.003	3.222	3.401
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.658	2.878	2.982	3.197	3.371
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.644	2.861	2.962	3.174	3.345
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.631	2.845	2.945	3.153	3.322
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.620	2.831	2.930	3.135	3.301
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.610	2.819	2.916	3.119	3.283
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.600	2.807	2.904	3.104	3.266
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.592	2.797	2.892	3.091	3.250
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.584	2.787	2.882	3.078	3.236
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.577	2.779	2.873	3.067	3.223
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.570	2.771	2.864	3.057	3.212
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.564	2.763	2.856	3.047	3.201
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.558	2.756	2.848	3.038	3.190
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.553	2.750	2.841	3.030	3.181
35	0.682	0.852	1.052	1.306	1.690	2.030	2.438	2.532	2.724	2.813	2.996	3.143
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.516	2.704	2.792	2.971	3.115
45	0.680	0.850	1.049	1.301	1.679	2.014	2.412	2.503	2.690	2.776	2.952	3.093
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.494	2.678	2.763	2.937	3.076
55	0.679	0.848	1.046	1.297	1.673	2.004	2.396	2.486	2.668	2.752	2.925	3.062
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.479	2.660	2.744	2.915	3.050
65	0.678	0.847	1.045	1.295	1.669	1.997	2.385	2.474	2.654	2.736	2.906	3.041
70	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.469	2.648	2.730	2.899	3.033
75	0.678	0.846	1.044	1.293	1.665	1.992	2.377	2.465	2.643	2.725	2.892	3.025
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.461	2.639	2.720	2.887	3.019
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.451	2.626	2.706	2.871	3.001
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.444	2.617	2.697	2.860	2.989

¿En qué tablas hay que mirar?

Para calcular intervalos para la media:

	Pob. normal	**Pob. no normal**
n **grande**	t Student	normal
n **pequeño**	t Student	?

Observaciones:

- El tamaño necesario de n depende de cuánto se parezca la población a la normal. Un tamaño $n > 40$ suele ser suficiente.
- Para valores grandes de n la dist. normal y la t son muy parecidas. El resultado será similar.
- El signo de interrogación significa que hay que usar métodos distintos en función de la población. No trataremos estos casos en este curso.

Un ejemplo resuelto

El envenenamiento por DDT causa temblores y convulsiones. En un estudio se ha administrado una dosis de DDT a 4 ratones y se ha medido posteriormente en cada uno el *periodo absolutamente refractario*, es decir, el tiempo que tardan sus nervios en recuperarse tras un estímulo. Las 4 medidas en milisegundos son:

$$1.7 \quad 1.6 \quad 1.8 \quad 1.9$$

(a) Estima el *periodo absolutamente refractario* medio μ para toda la población de ratones de la misma cepa sujeta al mismo tratamiento con DDT.

(b) Calcula el error típico de la estimación anterior.

(c) Calcula un intervalo de confianza para μ con nivel de confianza 90%. (Se supone normalidad).

(d) Calcula otro intervalo, pero ahora con un nivel del 95%

(e) Si se quiere estimar con un nivel de confianza del 95% y un margen de error de ∓ 0.02, ¿cuántos datos son necesarios aproximadamente?

(a) La estimación de μ es la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{1.7 + 1.6 + 1.8 + 1.9}{4} = 1.75.$$

(b) Para calcular el error típico, primero hay que calcular la cuasivarianza muestral:

$$s^2 = \frac{(1.7 - 1.75)^2 + (1.6 - 1.75)^2 + (1.8 - 1.75)^2 + (1.9 - 1.75)^2}{3}$$

Por lo tanto $s^2 \approx 0.017$ y $s = \sqrt{0.017} \approx 0.13$.

El error típico es $s/\sqrt{n} = 0.13/2 = 0.065$.

(c) Como $t_{3,0.05} = 2.353$, un I.C. con nivel de confianza $1 - \alpha = 0.90$ es

$$[1.75 \mp 2.353 \times 0.065] = [1.597\,,\, 1.903].$$

Podemos afirmar $1.597 < \mu < 1.903$ con un nivel del 90%.

(d) Como $t_{3,0.025} = 3.182$, un I.C. con nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$ es

$$[1.75 \mp 3.182 \times 0.065] = [1.543\,,\, 1.957].$$

Podemos afirmar $1.543 < \mu < 1.957$ con un nivel del 95%.

(e) Usamos los datos anteriores como muestra piloto:

$$n \geq \frac{(1.96)^2(0.017)}{(0.02)^2} \approx 163.268.$$

Aproximadamente hacen falta 164 observaciones.

IC para una proporción

Las ideas para construir un IC en este caso son exactamente las mismas que en el caso de la media.

Sabemos que para la distribución de Bernoulli $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ que se puede estimar mediante $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$.

La fórmula del intervalo es

$$\left[\hat{p} \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

y es válida para n grande, ya que se basa en el TCL.

El margen de error en este caso es

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Un ejemplo resuelto

En una encuesta para estudiar la preocupación de la población por su alimentación, se ha preguntado a 965 personas si han seguido alguna dieta en los últimos 5 años. De ellas, 406 han respondido afirmativamente. Con esta información:

(a) Estima la proporción p de la población que ha seguido alguna dieta en los últimos 5 años.

(b) Calcula el error típico del estimador anterior.

(c) Calcula un intervalo de confianza para p con un nivel de confianza del 95%

(d) Si para un nuevo estudio se desea estimar p con un margen de error de $\mp 1\%$ y un nivel de confianza del 95%, ¿a cuántas personas hay que entrevistar aproximadamente?

(a) El estimador de p a partir de los datos disponibles es la proporción muestral $\hat{p} = 406/965 = 0.421$.

(b) El error típico de este estimador es

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.421 \times (1-0.421)}{965}} = 0.0159$$

(c) Como $z_{0.025} = 1.96$, un I.C. con nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$ es

$$[0.421 \mp 1.96 \times 0.0159] = [0.39\,,\,0.45].$$

Podemos afirmar que $0.39 < p < 0.45$ con un nivel de confianza del 95%.

(d) Para calcular n despejamos en la ecuación:

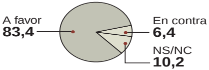
$$1.96 \times \sqrt{\frac{0.421 \times (1 - 0.421)}{n}} = 0.01$$

De aquí obtenemos:

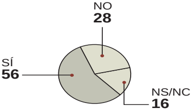
$$n = \frac{0.421 \times (1 - 0.421) \times 1.96^2}{0.01^2} = 9364.246 \approx 9365.$$

Ficha técnica de una encuesta

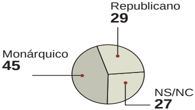
■ **¿Está a favor o en contra de que se modifique la Constitución para abolir la preferencia del hombre sobre la mujer en la sucesión al trono?**
En %



■ **¿Es partidario de que esa reforma se realice cuanto antes?**
En %



■ **¿Usted se considera monárquico o republicano?**
En %



FICHA TÉCNICA

Realización del trabajo de campo: la encuesta ha sido realizada por el Instituto Opina los días 7 y 8 de noviembre de 2005. **Ámbito geográfico:** España. **Recogida de información:** mediante entrevista telefónica asistida por ordenador (CATI). **Universo de análisis:** población mayor de 18 años residente en hogares con teléfono. **Tamaño de la muestra:** 1.000 entrevistas proporcionales. **Error muestral:** el margen de error para el total de la muestra es de ± 3,10% para un margen de confianza del 95% y bajo el supuesto de máxima indeterminación (p=q=50%). **Procedimiento de muestreo:** selección polietápica del entrevistado: unidades primarias de muestreo (municipios) seleccionadas de forma aleatoria proporcional para cada provincia. Unidades secundarias (hogares) mediante la selección aleatoria de números de teléfono. Unidades últimas (individuos) según cuotas cruzadas de sexo, edad y recuerdo de voto en las elecciones generales de 2004.

EL PAÍS

Explicación

- El margen de error del intervalo de confianza de una proporción verifica

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}} = E$$

  ya que el caso $p = q = 1/2$ ($q = 1 - p$) es el más desfavorable.

- Según la ficha técnica, $n = 1000$ y $1 - \alpha = 0.95$ ($z_{0.025} = 1.96$), por lo que en el caso más desfavorable:

$$E = 1.96\sqrt{\frac{1}{4000}} \approx 0.031.$$

- El valor que da la fórmula es consistente con el margen de error de $\mp 3.10\%$ para los porcentajes estimados en el sondeo.

IC para el parámetro λ de una Poisson

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

Como $\mu = \sigma^2 = \lambda$, el TCL implica

$$\frac{\bar{x} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \cong \mathrm{N}(0,1)$$

De aquí se deduce el siguiente IC de confianza aproximada $1-\alpha$,

$$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\lambda) \approx \left[\bar{x} \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}\right]$$

(aproximadamente, para n grande)

IC para el parámetro λ de una Poisson

Ejemplo: Lord Ernest Rutherford, el famoso físico británico de principios del siglo XX, se dedicó a observar desintegraciones radiactivas en su laboratorio. Rutherford tomó n $=$ 2608 intervalos de 7.5 segundos cada uno y contabilizó el número X de partículas que alcanzaban un contador en cada uno de esos intervalos. Sus observaciones fueron

Num. de partículas por intervalo de tiempo (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Num. de intervalos de tiempo con x partículas observadas	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16

Suponiendo que X sigue una distribución de Poisson(λ), calcular un intervalo de confianza al 95% para λ.

Solución

La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{0 \times 57 + 1 \times 203 + \cdots + 10 \times 16}{2608} = 3867.$$

Además, $z_{0.025} = 1.96$.
Por lo tanto,

$$\mathrm{IC}_{0.95}(\lambda) \approx \left[3867 \mp (1.96)\sqrt{\frac{3867}{2608}}\right]$$

$$\mathrm{IC}_{0.95}(\lambda) \approx [3867 \mp 0.0755]$$

Distribución de la varianza en una población normal

¿Qué error se comete al sustituir la varianza poblacional σ^2 por su estimador muestral S^2?

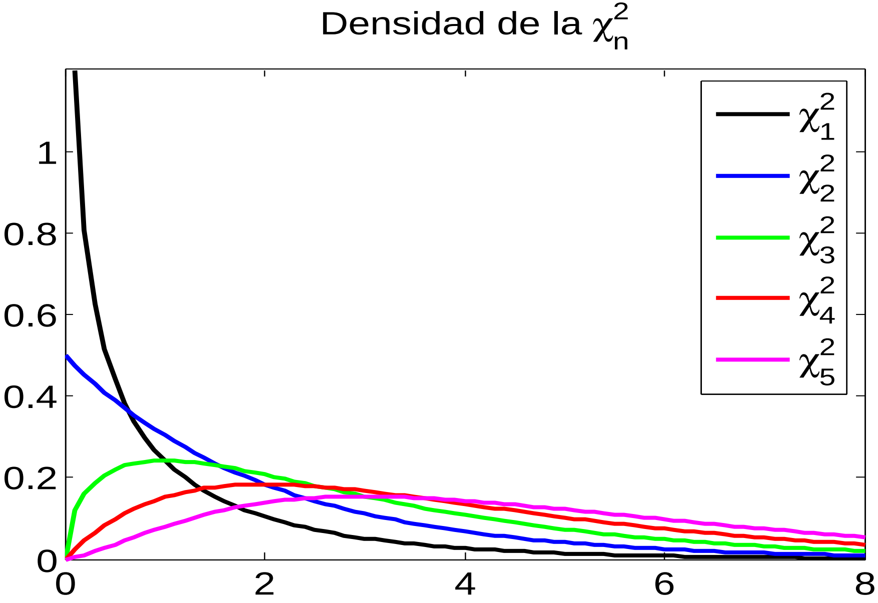
Una posible medida del error es el cociente S^2/σ^2 (no depende de las unidades).

La distribución de este cociente, multiplicado por $n-1$, se llama **distribución χ^2 con $n-1$ grados de libertad** (está tabulada):

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \equiv \chi^2_{n-1}.$$

Para una muestra de 21 datos, ¿cuál es la probabilidad de que S^2 resulte mayor que $1.1\sigma^2$?

Función de densidad de la distribución χ^2



Tablas de la distribución χ^2

	α														
n	0.9975	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025
1	9.82E-06	3.93E-05	1.57E-04	9.82E-04	3.93E-03	1.58E-02	0.1015	0.4549	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	9.141
2	5.01E-03	1.00E-02	2.01E-02	5.06E-02	0.1026	0.2107	0.5754	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60	11.98
3	4.49E-02	7.17E-02	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	14.32
4	0.1449	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	16.42
5	0.3075	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	18.39
6	0.5266	0.6757	0.8721	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	20.25
7	0.7945	0.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	22.04
8	1.104	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	23.77
9	1.450	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	25.46
10	1.827	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	27.11
11	2.232	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.341	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	28.73
12	2.661	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.340	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	30.32
13	3.112	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	12.340	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	31.88
14	3.582	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	33.43
15	4.070	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	34.95
16	4.573	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	36.46
17	5.092	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	37.95
18	5.623	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	39.42
19	6.167	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	40.88
20	6.723	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	42.34
21	7.289	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	43.78
22	7.865	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	45.20
23	8.450	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	46.62
24	9.044	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	48.03
25	9.646	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	49.44
26	10.26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	50.83
27	10.87	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	52.22
28	11.50	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	53.59
29	12.13	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	54.97
30	12.76	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	56.33
35	16.03	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	29.05	34.34	40.22	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27	63.08
40	19.42	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	69.70
45	22.90	24.31	25.90	28.37	30.61	33.35	38.29	44.34	50.98	57.51	61.66	65.41	69.96	73.17	76.22
50	26.46	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	82.66
55	30.10	31.73	33.57	36.40	38.96	42.06	47.61	54.33	61.66	68.80	73.31	77.38	82.29	85.75	89.03
60	33.79	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	95.34
65	37.54	39.38	41.44	44.60	47.45	50.88	56.99	64.33	72.28	79.97	84.82	89.18	94.42	98.11	101.6
70	41.33	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	107.8
75	45.17	47.21	49.48	52.94	56.05	59.79	66.42	74.33	82.86	91.06	96.22	100.8	106.4	110.3	114.0
80	49.04	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3	120.1
90	56.89	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	132.3
100	64.86	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	144.3
110	72.92	75.55	78.46	82.87	86.79	91.47	99.67	109.3	119.6	129.4	135.5	140.9	147.4	151.9	156.2
120	81.07	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	109.2	119.3	130.1	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6	168.1
150	105.9	109.1	112.7	118.0	122.7	128.3	138.0	149.3	161.3	172.6	179.6	185.8	193.2	198.4	203.2
200	148.4	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	186.2	199.3	213.1	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3	260.7

IC para la varianza en una población normal

Para una proporción $1 - \alpha$ de las muestras de tamaño n,

$$\chi^2_{n-1;1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1;\alpha/2}.$$

Despejando σ^2 resulta el siguiente IC:

$$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}\right]$$

El valor del estimador de σ^2 **no** es el centro del intervalo de confianza en este caso. Esto es debido a la asimetría de la distribución χ^2.

Ejemplo

En una explotación minera, las rocas excavadas se someten a un análisis químico para determinar su contenido porcentual de cadmio. Se puede suponer que este contenido es una variable con distribución normal de media μ y varianza σ^2. Después de analizar 25 rocas se obtiene un contenido porcentual medio de 9.77 con una cuasidesviación típica de 3.164. Calcula un IC de nivel 95% para la varianza de la población.

IC para la diferencia de medias (muestras independientes)

Datos

Muestra 1	x_1	$\cdots$	x_m
Muestra 2	y_1	$\cdots$	y_n

Hipótesis sobre los datos

- Las dos muestras proceden de poblaciones normales con medias poblacionales μ_1 y μ_2 respectivamente.
- Las dos varianzas poblacionales son iguales: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.
- Las dos muestras son independientes.

Objetivo

Calcular un IC para $\mu_1 - \mu_2$.

Ejemplo

Se han determinado los valores de epicatequina (una sustancia fenólica) en 10 muestras de vino tinto, encontrando que la media muestral era 195.1 mg/l y el error típico 10.051. Los correspondientes valores para 10 muestras de cerveza fueron 65.5 mg/L y 3.4184. Se desea calcular un IC de nivel 95% para la diferencia del contenido medio de epicatequina en el vino y en la cerveza.

En este ejemplo, $m = n = 10$, $\bar{x} = 195.1$, $\bar{y} = 65.5$, $s_1/\sqrt{10} = 10.051$ y $s_2/\sqrt{10} = 3.4184$.

El centro del intervalo es $\bar{x} - \bar{y} = 129.6$.

Vamos a ver cómo se determina correctamente el margen de error.

IC para la diferencia de medias (muestras independientes)

Como las muestras son independientes,

$$\bar{x} - \bar{y} \equiv \mathrm{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\right)$$

Si σ es conocido, un IC para $\mu_1 - \mu_2$ es (se razona igual que en el caso de una única media):

$$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2) = \left[(\bar{x} - \bar{y}) \mp z_{\alpha/2}\, \sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\right]$$

En la práctica σ nunca se conoce así que es necesario estimarlo a partir de los datos.

Estimador combinado de la varianza

Como σ^2 es la misma para los dos grupos, para estimarla podemos combinar las desviaciones de las dos muestras

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{m+n-2} = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}$$

¿Por qué se divide por $m+n-2$?

Si reemplazamos σ por su estimador s_p, la distribución es t de Student en lugar de normal. El IC resultante es:

$$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2) = \left[(\bar{x} - \bar{y}) \mp t_{m+n-2;\alpha/2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\right]$$

Ejemplo (cont.)

Estimador combinado de la varianza:

$$S_p^2 = \frac{9 \times 31.7841^2 + 9 \times 10.8099^2}{18} = 563.5415$$

ya que $s_1 = 10.051\sqrt{10} = 31.7841$ y $s_2 = 3.4184\sqrt{10} = 10.8099$.

Error típico de la diferencia:

$$S_p\sqrt{1/m + 1/n} = \sqrt{563.5415}\sqrt{2/10} = 10.61642.$$

Como $t_{18,0.025} = 2.101$, el IC de nivel 95% es

$$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu_1 - \mu_2) = [129.6 \mp 2.101 \times 10.61642]$$

Ejercicio: ¿Cúal sería el error típico si las varianzas poblacionales no fuesen iguales?

IC para la diferencia de medias (datos emparejados)

Sea $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ una muestra de pares de v.a. (X, Y), donde X e Y tienen distribución normal pero **no son independientes**.

Si $E(X) = \mu_1$ y $E(Y) = \mu_2$, entonces

$$D = X - Y \equiv N(\mu_D = \mu_1 - \mu_2, \sigma_D)$$

Las diferencias $D_1 = X_1 - Y_1, \ldots, D_n = X_n - Y_n$ son una muestra de la v.a. $D = X - Y$.

Por lo tanto, podemos construir intervalos de confianza para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ y para σ_D como hicimos en la primera parte de este tema.

Ejemplo

Se quieren comparar los efectos X de un nuevo medicamento con Y, los de otro ya comercializado. Se administran ambos a 14 personas con insuficiencia respiratoria, asignando aleatoriamente a cada paciente un tratamiento, y manteniéndolo durante un mes. Luego se le da el tratamiento alternativo durante otro mes. En la cuarta semana de cada tratamiento se observa la FEV1 (*forced expiratory volume*), el volumen de aire que un paciente expulsa en un segundo, tras una inhalación profunda.

Paciente	X	Y	D	Paciente	X	Y	D
1	2.9	3.9	-1.0	8	3.9	2.4	1.5
2	4.0	3.9	0.1	9	2.5	3.6	-1.1
3	3.4	3.3	0.1	10	6.5	2.1	4.4
4	3.2	4.3	-1.1	11	5.5	4.0	1.5
5	3.8	3.2	0.6	12	4.0	3.9	0.1
6	5.2	3.5	1.7	13	5.3	4.0	1.3
7	3.9	2.7	1.2	14	4.3	2.3	2.0

Calcular un intervalo de confianza al 90% para la diferencia media de FEV1 con ambos medicamentos.

IC para la diferencia de proporciones

Sean $X_1, \ldots, X_m$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ muestras independientes de $X \equiv \text{Bernoulli}(p_1)$ e $Y \equiv \text{Bernoulli}(p_2)$.

Por el TCL sabemos que

$$\hat{p}_1 = \bar{X} \cong \text{N}\left(p_1, \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m}}\right) \quad \text{y} \quad \hat{p}_2 = \bar{Y} \cong \text{N}\left(p_2, \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}\right).$$

El IC para la diferencia de proporciones $p_1 - p_2$ es

$$\text{IC}_{1-\alpha}(p_1 - p_2) \approx \left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}\right]$$

(aproximadamente, para m y n grandes).

Ejemplo

Se ha estudiado la prevalencia de caries en un grupo de niños que siguieron un plan de prevención de la enfermedad y en otro grupo de niños que no siguieron el plan y que fueron seleccionados como control. Los datos son los siguientes:

	Niños con caries	Niños sin caries
Grupo control	10	26
Grupo prevención	6	32

Calcula un intervalo de confianza de nivel 95% para la diferencia entre las proporciones de niños con caries en ambas poblaciones (la de los niños que no siguen el plan de prevención y la de los niños que sí lo siguen).