# Tema 3
# Contrastes de hipótesis

José R. Berrendero

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

## Estructura de este tema

- ¿Qué es un contraste de hipótesis?
- Elementos de un contraste: hipótesis, tipos de error, nivel de significación, región crítica.
- Contrastes para la media de una población normal
- Comparación de dos medias: muestras independientes y datos emparejados (sólo se tratará el caso de varianzas iguales)
- Contrastes para una proporción
- Comparación de dos proporciones

## ¿Qué es un contraste de hipótesis?

Una **hipótesis** es una afirmación que se hace sobre la población.

La hipótesis es **paramétrica** si se refiere a los valores que toma alguno de los parámetros poblacionales.

Por ejemplo, una hipótesis paramétrica es: “la media poblacional es positiva” ($\mu > 0$).

Un **contraste de hipótesis** es una técnica estadística para juzgar si los datos aportan evidencia o no para confirmar una hipótesis.

## Ejemplo

Los refrescos de cola *light* utilizan edulcorantes artificiales que pueden perder su efecto con el tiempo.

En un experimento se pidió a varias personas que probaran refrescos dietéticos y calificaran su grado de sabor dulce en una escala de 1 a 10.

Tras almacenar las bebidas durante un mes a alta temperatura (para imitar el efecto de 4 meses de almacenamiento a temperatura ambiente) las mismas personas probaron de nuevo los refrescos y calificaron de nuevo su grado de sabor dulce.

En la siguiente tabla aparecen las diferencias en las puntuaciones (a mayor diferencia, mayor caída del sabor):

$$2,\ 0.4,\ 0.7,\ 2,\ -0.4,\ 2.2,\ -1.3,\ 1.2,\ 1.1,\ 2.3$$

La mayoría de los datos son positivos. Es decir, la mayoría de las personas apreciaron pérdida en el nivel de sabor.

Pero las diferencias no son muy grandes (e incluso dos personas apreciaron un incremento).

La pregunta que trata de responder un contraste de hipótesis es: **¿Proporcionan estos datos evidencia de que el nivel medio de sabor decrece en media?**

La media estimada a partir de los datos es $\bar{x} = 1.02$.

- ¿Refleja esta estimación un auténtico descenso en el nivel medio de sabor?
- ¿Se debe el resultado a razones puramente aleatorias?

El **razonamiento básico** para hacer este contraste es:

- Supongamos que $H_0$ es cierta, es decir, $\mu \leq 0$.
- ¿Es el resultado obtenido a partir de los datos ($\bar{x} = 1.02$) extraño bajo esta hipótesis?
- Si esto es así, los datos aportan evidencia contra $H_0$ y a favor de $H_1$.

Para llevar a cabo el análisis anterior tenemos que estudiar qué valores son los que cabe esperar que tome $\bar{x}$ cuando $H_0$ es cierta.

Para simplificar suponemos de momento que la población es **normal** y que **la varianza es conocida** y vale $\sigma = 1$.

## Elementos de un contraste de hipótesis

La hipótesis para la que se desea encontrar evidencia se llama **hipótesis alternativa**. Se denota $H_1$.

La afirmación contraria a $H_1$ se llama **hipótesis nula**. Se denota $H_0$.

Llamamos $\mu$ al descenso medio (desconocido) del grado de sabor de los refrescos.

Como queremos confirmar si el grado medio realmente desciende, queremos contrastar

$$H_0 : \ \mu \leq 0 \ \text{ frente a } \ H_1 : \ \mu > 0$$

Supongamos que $H_0$ es cierta y que $\mu$ vale 0 (toma el valor en el que más difícil es distinguir entre $H_0$ y $H_1$).

Sabemos (tema 2) que

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \equiv \mathrm{N}(0, 1).$$

Para juzgar si el valor $\bar{x} = 1.02$ es compatible con $\mu = 0$ calculamos

$$t = \frac{1.02 - 0}{1/\sqrt{10}} = 3.2255$$

y comparamos con la distribución normal estándar.

Como 3.2255 es un valor bastante improbable para una distribución $\mathrm{N}(0, 1)$, los datos proporcionan bastante evidencia en contra de $H_0$ y a favor de $H_1$.

Podemos interpretar $t = 3.2255$ como la distancia entre $\bar{x}$ y 0 *medida en desviaciones típicas*.

Mirando las tablas de la normal: $\mathrm{P}(Z > 3.2255) < 0.001$.

Si $\mu = 0$, en menos de 1 de cada 1000 muestras se obtendría un valor de $t$ superior a 3.2255.

Parece que la distancia entre $\bar{x}$ y 0 es "suficientemente grande" como para rechazar $H_0: \mu \leq 0$.

¿Qué significa "suficientemente grande"? Depende de lo seguros que queramos estar a la hora de rechazar o no la hipótesis nula.

Cuando se lleva a cabo un contraste de hipótesis se pueden cometer dos tipos de errores:

- **Error de tipo I**: Rechazar $H_0$ cuando es cierta.
- **Error de tipo II**: Aceptar $H_0$ cuando es falsa.

De los dos errores sólo vamos a poder controlar el error de tipo I. Por ello, se deben definir las hipótesis de forma que el error de tipo I sea el más grave (equivalentemente, $H_1$ debe ser la hipótesis que queremos confirmar).

Se llama **nivel de significación** $\alpha$ de un contraste a la mayor probabilidad de cometer un error de tipo I cuando se utiliza ese contraste.

Vamos a rechazar $H_0: \mu \leq 0$ siempre que la distancia entre $\bar{x}$ y $\mu = 0$ sea "suficientemente grande", mayor que un valor crítico $c$:

$$\frac{\bar{x} - 0}{1/\sqrt{10}} > c.$$

Para determinar $c$ fijamos el nivel de significación $\alpha$. Los valores $\alpha = 0.01$ o $\alpha = 0.05$ son los más habituales.

$$\alpha = \mathrm{P}_{H_0}(\textsc{Rechazar}) = \mathrm{P}_{H_0}\left(\frac{\bar{x} - 0}{1/\sqrt{10}} > c\right) = \mathrm{P}(Z > c).$$

Por lo tanto $c = z_\alpha$

Rechazaremos $H_0: \mu \leq 0$ a nivel $\alpha$ siempre que se verifique:

$$R = \left\{\frac{\bar{x} - 0}{1/\sqrt{10}} > z_\alpha\right\}.$$

A $R$ se le llama **región de rechazo** o **región crítica**.

Para los datos del ejemplo recordemos que

$$\frac{\bar{x} - 0}{1/\sqrt{10}} = 3.2255$$

Para hacer el contraste a nivel $\alpha = 0.05$, buscamos en las tablas $z_{0.05} = 1.64$.

Como $3.2255 > 1.64$, estamos en la región crítica y rechazamos la hipótesis nula $\mu \leq 0$ a nivel $\alpha = 0.05$.

Para la mayoría de los contrastes la región crítica es de la forma:

$$R = \left\{ \frac{\text{DISTANCIA ENTRE DATOS Y } H_0}{\text{E.T. DE LA DISTANCIA}} > c \text{ (TABLAS)} \right\}.$$

Hay muchos posibles contrastes (véase el formulario), pero todos se basan en las ideas que hemos introducido hasta ahora.

En lo que sigue vamos a ver ejemplos de aplicación de las fórmulas en distintas situaciones.

## Contrastes para la media de una población normal (varianza desconocida)

**Contrastes unilaterales**:

- Hipótesis: $H_0 : \mu \leq \mu_0$ frente a $H_1 : \mu > \mu_0$
- Región crítica:

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha} \right\}.$$

- Hipótesis: $H_0 : \mu \geq \mu_0$ frente a $H_1 : \mu < \mu_0$
- Región crítica:

$$R = \left\{ \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{n-1,\alpha} \right\}.$$

**Contraste bilateral**:

- Hipótesis: $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- Región crítica:

$$R = \left\{ \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha/2} \right\}.$$

## Ejemplo del edulcorante cuando $\sigma$ es desconocida

Queremos contrastar $H_0 : \mu \leq 0$ frente a $H_1 : \mu > 0$ (es decir, contraste unilateral con $\mu_0 = 0$) a nivel $\alpha = 0.05$.

Suponemos ahora que $\sigma$ no es conocida. La aproximamos a partir de la muestra:

$$2,\ 0.4,\ 0.7,\ 2,\ -0.4,\ 2.2,\ -1.3,\ 1.2,\ 1.1,\ 2.3$$

Para ello usamos el estimador:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 1.196$$

Calculamos el **estadístico t**:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{1.02 - 0}{1.196/\sqrt{10}} = 2.697.$$

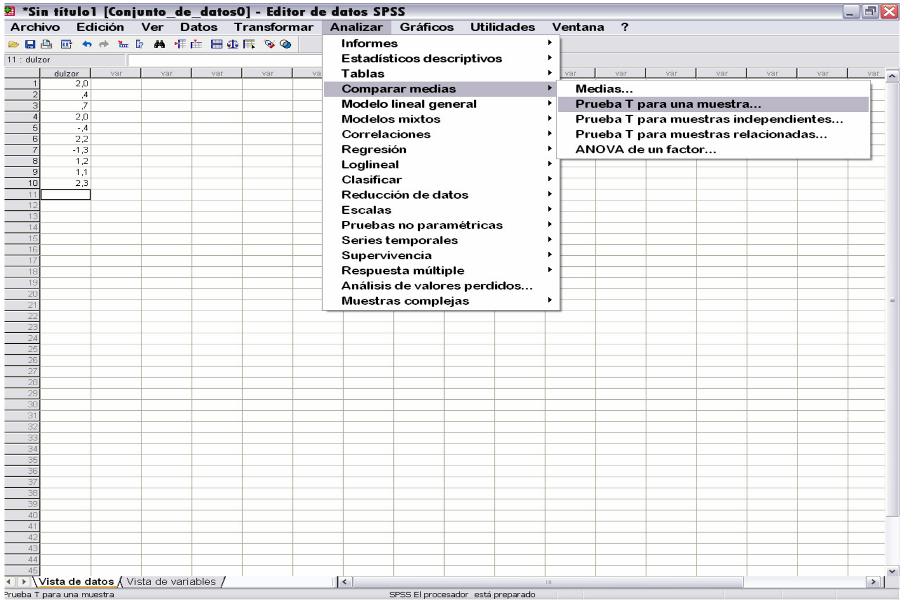
En las tablas de la t buscamos el valor:

$$t_{9,0.05} = 1.833$$

Como $2.697 > 1.833$ estamos en la región crítica y rechazamos $H_0$ a nivel $\alpha = 0.05$.

¿Cuál es la conclusión si fijamos $\alpha = 0.01$?

## Solución con SPSS




## Resultado que da SPSS

**Estadísticos para una muestra**

| | N | Media | Desviación típ. | Error típ. de la media |
|---|---|---|---|---|
| dulzor | 10 | 1,020 | 1,1961 | ,3782 |

**Prueba para una muestra**

| | Valor de prueba = 0 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | t | gl | Sig. (bilateral) | Diferencia de medias | 95% Intervalo de confianza para la diferencia: Inferior | Superior |
| dulzor | 2,697 | 9 | ,025 | 1,0200 | ,164 | 1,876 |

- **Valor de prueba:** $\mu_0$ (el valor de $\mu$ que separa $H_0$ de $H_1$). Por defecto $\mu_0 = 0$.
- **Sig (bilateral):** es el **p-valor** del test bilateral $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (transparencia siguiente)

## P-valor de un contraste

A medida que el nivel de significación disminuye es más difícil rechazar la hipótesis nula (manteniendo los mismos datos).

Hay un valor $\alpha = p$ a partir del cual ya no podemos rechazar $H_0$. Es decir si $\alpha < p$ ya no se rechaza $H_0$.

A $p$ se le llama el **p-valor** del contraste. El p-valor indica el punto de división entre el rechazo y la aceptación:

- Si $\alpha < p$, no podemos rechazar $H_0$ a nivel $\alpha$.
- Si $\alpha > p$, podemos rechazar $H_0$ a nivel $\alpha$.

El p-valor se interpreta como una medida de la evidencia estadística que los datos aportan a favor de la hipótesis alternativa $H_1$ (o en contra de $H_0$): cuando el p-valor es pequeño (digamos, menor o igual que 0.05) se considera que hay una fuerte evidencia a favor de $H_1$.

## SPSS y p-valor

Los paquetes de software estadístico dan como resultado de un test su p-valor. SPSS llama `sig(bilateral)` al p-valor.

Conociendo el p-valor, el usuario puede tomar la decisión de aceptar o rechazar $H_0$ para cualquier $\alpha$.

SPSS siempre calcula el p-valor para el contraste bilateral. Si queremos hacer un contraste unilateral, **tenemos que dividir entre 2 el valor calculado por SPSS**.

En el ejemplo, el p-valor del contraste es $0.025/2 = 0.0125$. Esto significa:

- Si $\alpha < 0.0125$ no podemos rechazar $\mu \leq 0$.
- Si $\alpha > 0.0125$ podemos rechazar $\mu \leq 0$.

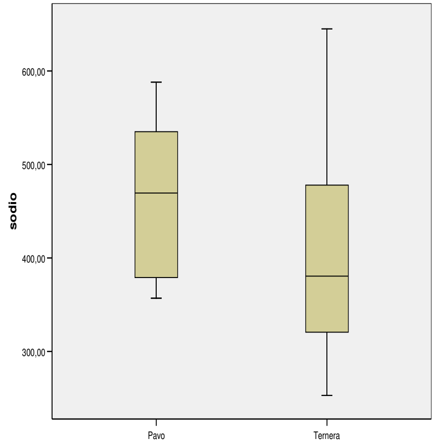
## Comparación de dos medias (muestras independientes)

Se ha considerado la cantidad de calorías y de sodio en salchichas de varias marcas de dos tipos: ternera y pavo.

| | | Casos | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Válidos | | Perdidos | | Total | |
| | tipo | N | Porcentaje | N | Porcentaje | N | Porcentaje |
| sodio | Pavo | 16 | 100,0% | 0 | ,0% | 16 | 100,0% |
| | Ternera | 20 | 100,0% | 0 | ,0% | 20 | 100,0% |

**Descriptivos**

| | tipo | | Estadístico | Error típ. |
|---|---|---|---|---|
| sodio | Pavo | Media | 460,8125 | 21,79435 |
| | | Mediana | 469,5000 | |
| | | Varianza | 7599,896 | |
| | | Desv. típ. | 87,17738 | |
| | | Mínimo | 357 | |
| | | Máximo | 588 | |
| | | Rango | 231,00 | |
| | | Amplitud intercuartil | 161,50 | |
| | Ternera | Media | 401,1500 | 22,90510 |
| | | Mediana | 380,5000 | |
| | | Varianza | 10492,871 | |
| | | Desv. típ. | 102,43472 | |
| | | Mínimo | 253 | |
| | | Máximo | 645 | |
| | | Rango | 392,00 | |
| | | Amplitud intercuartil | 158,75 | |




Parece que, en estas muestras, las salchichas de pavo tienen más sodio en media. Pero las dos muestras se solapan bastante. ¿Son las diferencias muestrales significativas?

¿Aportan evidencia estos datos para afirmar que el contenido medio de sodio de las salchichas de pavo es distinto al de las salchichas de ternera?

$X_1, \ldots, X_{n_1}$ es una muestra de $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma)$
$Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ es una muestra de $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma)$

Supuestos necesarios:

- Las muestras proceden de dos poblaciones normales.
- Las varianzas son desconocidas pero iguales.
- Las dos muestras son independientes.

**Hipótesis que queremos contrastar ($\alpha = 0.05$)**

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 \ \text{ frente a } \ H_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

**Región crítica (formulario)**

$$R = \left\{ \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2, \alpha/2} \right\}.$$

**Estimador combinado de la varianza**

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Con los datos del ejemplo,

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |460.81 - 401.15| = 59.66$$

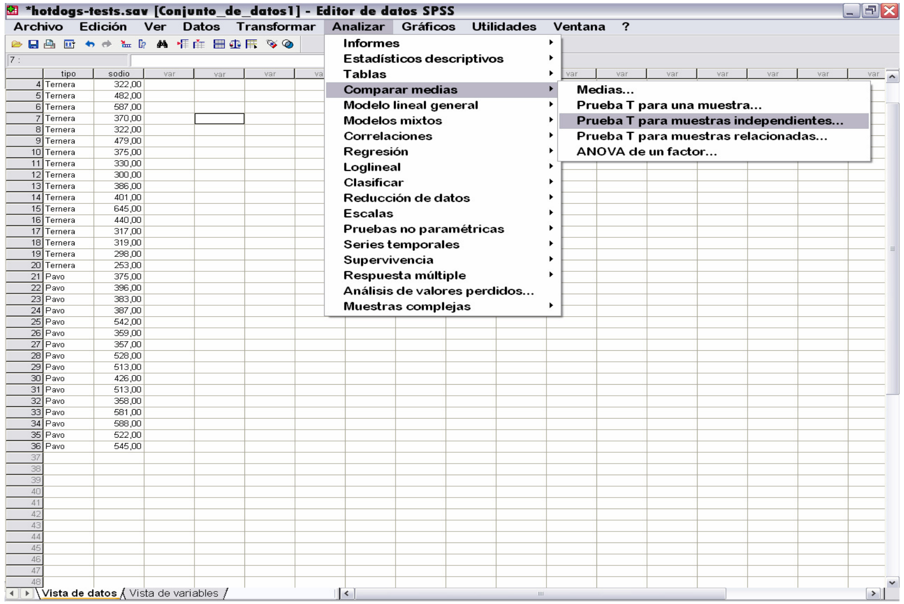
$$s_p^2 = \frac{15 \times 7599.89 + 19 \times 10492.871}{34} = 9216.556 \ \text{ y } \ s_p = 96$$

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{59.66}{96\sqrt{1/16 + 1/20}} = \frac{59.66}{32.2} = 1.853$$

$$t_{34, 0.025} \approx 2.04$$

Como $1.853 < 2.04$, no podemos rechazar $H_0$. Las diferencias encontradas en las cantidades medias de sodio de las dos muestras **no son significativas** al nivel $\alpha = 0.05$.

## Con SPSS




**Estadísticos de grupo**

| | tipo | N | Media | Desviación típ. | Error típ. de la media |
|---|---|---|---|---|---|
| sodio | Pavo | 16 | 460,8125 | 87,17738 | 21,79435 |
| | Ternera | 20 | 401,1500 | 102,43472 | 22,90510 |

**Prueba de muestras independientes**

| | | Prueba de Levene para la igualdad de varianzas | | Prueba T para la igualdad de medias | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | F | Sig. | t | gl | Sig. (bilateral) | Diferencia de medias | Error típ. de la diferencia | 95% Intervalo de confianza para la diferencia | |
| | | | | | | | | | Inferior | Superior |
| sodio | Se han asumido varianzas iguales | ,008 | ,930 | 1,853 | 34 | ,073 | 59,66250 | 32,2003 | -5,77649 | 125,10149 |
| | No se han asumido varianzas iguales | | | 1,887 | 33,84 | ,068 | 59,66250 | 31,6170 | -4,60214 | 123,92714 |

- El p-valor es 0.073. Esto significa que se puede rechazar $H_0$ si $\alpha > 0.073$. Al nivel $\alpha = 0.05$ no podemos rechazar.
- Error típico de la diferencia: $s_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$.

## Comparación de dos medias (datos emparejados)

Se usan cinco dosis de una sustancia ferrosa para determinar si existen diferencias entre llevar a cabo un análisis químico de laboratorio o un análisis de fluorescencia por rayos X para determinar el contenido de hierro. Cada dosis se divide en dos partes iguales a las que se aplica cada uno de los dos procedimientos. Los resultados obtenidos son los siguientes:

| Dosis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rayos X | 2.0 | 2.0 | 2.3 | 2.1 | 2.4 |
| Análisis Químico | 2.2 | 1.9 | 2.5 | 2.3 | 2.4 |

Se supone que las poblaciones son normales. ¿Aportan los datos evidencia suficiente a nivel $\alpha = 0.05$ para afirmar que el contenido medio de hierro detectado cuando se utiliza el análisis químico es diferente del contenido medio detectado cuando se utilizan rayos X?

**Parámetros:**

- $\mu_1$ es el contenido medio detectado por rayos $X$
- $\mu_2$ es el contenido medio detectado por análisis químico.

**Hipótesis:**
Cuando las muestras **no son independientes**, en lugar de contrastar $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ frente a $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, se contrasta

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \mu \neq 0,$$

donde $\mu$ es el valor esperado de las diferencias $d_i = x_i - y_i$.

| Dosis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2.0 | 2.0 | 2.3 | 2.1 | 2.4 |
| $y_i$ | 2.2 | 1.9 | 2.5 | 2.3 | 2.4 |
| $d_i$ | $-0.2$ | 0.1 | $-0.2$ | $-0.2$ | 0 |

Con estos datos: $\bar{d} = -0.1$ y $S_d = 0.1414$.

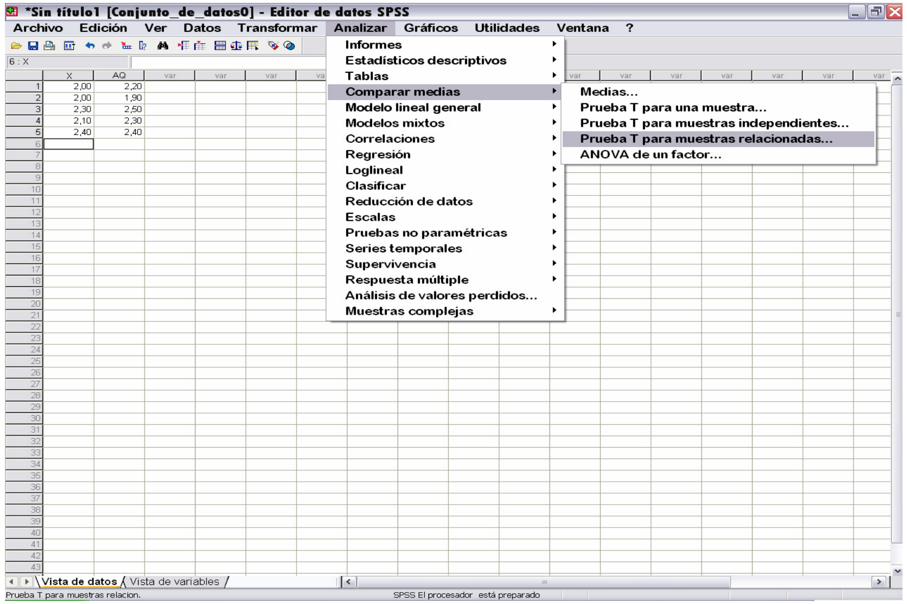
**Región crítica (formulario):**

$$R = \left\{ \frac{|\bar{d}|}{S_d/\sqrt{n}} > t_{n-1;\alpha/2} \right\}.$$

Mirando en las tablas $t_{4;0.025} = 2.776$.
Por otra parte,

$$\frac{|\bar{d}|}{S_d/\sqrt{n}} = \frac{0.1}{0.1414/\sqrt{5}} = 1.5811.$$

Como $1.5811 < 2.776$, los datos disponibles no permiten afirmar a nivel 0.05 que los dos métodos proporcionan cantidades medias de hierro diferentes.




**Estadísticos de muestras relacionadas**

| | | Media | N | Desviación típ. | Error típ. de la media |
|---|---|---|---|---|---|
| Par 1 | X | 2,1600 | 5 | ,18166 | ,08124 |
| | AQ | 2,2600 | 5 | ,23022 | ,10296 |

**Correlaciones de muestras relacionadas**

| | | N | Correlación | Sig. |
|---|---|---|---|---|
| Par 1 | X y AQ | 5 | ,789 | ,113 |

**Prueba de muestras relacionadas**

| | Diferencias relacionadas | | | | | t |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Media | Desviación típ. | Error típ. de la media | 95% Intervalo de confianza para la diferencia | | |
| | | | | Inferior | Superior | |
| | -,10000 | ,14142 | ,06325 | -,27560 | ,07560 | -1,581 |

**Prueba de muestras relacionadas**

| | gl | Sig. (bilateral) |
|---|---|---|
| | 4 | ,189 |

## Otro ejemplo con SPSS

Queremos comparar la media de dos poblaciones. Para ello, obtenemos dos muestras aleatorias independientes con los siguientes resultados:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Muestra 1 | 230 | 235 | 238 | 242 | 242 | 246 |
| Muestra 2 | 232 | 234 | 239 | 245 | 248 | 253 |

Introducimos los datos en SPSS con el resultado siguiente:

## Salida SPSS

**Estadísticos de grupo**

| | Muestra | N | Media | Desviación típ. | Error típ. de la media |
|---|---|---|---|---|---|
| Datos | 1,00 | 6 | | 5,74166 | |
| | 2,00 | 6 | 241,8333 | 8,23205 | 3,36072 |

**Prueba de muestras independientes**

| | | Prueba de Levene para la igualdad de varianzas | | Prueba T para la igualdad de medias | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 95% Intervalo de confianza para la diferencia | |
| | | F | Sig. | t | gl | Sig. (bilateral) | Diferencia de medias | Error típ. de la diferencia | Inferior | Superior |
| Datos | Se han asumido varianzas iguales | 1,601 | ,234 | -,732 | 10 | ,481 | -3,00000 | | -12,12963 | 6,12963 |
| | No se han asumido varianzas iguales | | | -,732 | 8,934 | ,483 | -3,00000 | 4,09742 | -12,27950 | 6,27950 |

## Cuestiones

- Calcula la media de la muestra 1
- Calcula el error típico de la media de la muestra 1
- Calcula un IC de nivel 95% para $\mu_1$
- ¿Cuánto vale el error típico de la diferencia?
- ¿Cuánto vale el p-valor del contraste de $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ frente a $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$?
- ¿Cuánto vale el p-valor del contraste de $H_0 : \mu_2 \leq \mu_1$ frente a $H_1 : \mu_2 > \mu_1$?

## Contrastes para una proporción

En un estudio, 1000 personas siguieron una dieta de adelgazamiento durante 3 meses. De las 1000 personas, 791 perdieron más de 3 kg de peso. ¿Permiten los datos afirmar, con el nivel de significación $\alpha = 0.01$, que más del 70% de la población perdería más de 3 kg de peso de seguir la misma dieta durante el mismo tiempo?

**Hipótesis:**

$$H_0 : \; p \leq 0.7 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \; p > 0.7,$$

donde $p$ es la proporción poblacional que pierde peso.

**Región crítica (formulario):**

$$R = \left\{ \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > z_\alpha \right\}$$

En este caso, $n = 1000$, $p_0 = 0.7$, $\hat{p} = 0.791$ y $z_{0.01} = 2.33$.

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.791 - 0.7}{\sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{1000}}} = 6.28$$

Por lo tanto, podemos rechazar $H_0$ y afirmar que más del 70% de la población perdería más de 3 kg de peso de seguir la misma dieta durante el mismo tiempo.

## Comparación de dos proporciones

Se ha llevado a cabo un estudio para determinar si un medicamento dirigido a reducir el nivel de colesterol reduce también la probabilidad de sufrir un infarto. Para ello, a hombres de entre 45 y 55 años se les asignó aleatoriamente uno de los dos tratamientos siguientes:

- 2051 hombres tomaron un medicamento para reducir el nivel de colesterol
- 2030 hombres tomaron un placebo

Durante los cinco años que duró el estudio, 56 de los hombres que tomaron el medicamento, y 84 de los que tomaron el placebo, sufrieron infartos.

¿Podemos afirmar a nivel 0.05 que el medicamento es efectivo?

**Parámetros:**

- $p_1$: Probabilidad de sufrir un infarto si se toma el medicamento.
- $p_2$: Probabilidad de sufrir un infarto si se toma el placebo.

**Estimadores de los parámetros:**

$$\hat{p}_1 = \frac{56}{2051} = 0.0273 \quad \text{y} \quad \hat{p}_2 = \frac{84}{2030} = 0.0414$$

**Hipótesis:** $H_0 : p_2 \leq p_1$ frente a $H_1 : p_2 > p_1$.

**Estimación de la probabilidad de infarto si fuese** $p_1 = p_2$ (es decir, cuando $H_0$ es cierta pero es difícil distinguir $H_0$ de $H_1$):

$$\bar{p} = \frac{\text{Numero total de infartos}}{\text{Numero total de personas}} = \frac{56+84}{2051+2030} = 0.0343$$

**Región crítica (formulario)**

$$R = \left\{ \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} > z_\alpha \right\}$$

Con los datos del ejemplo:

$$\frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.0141}{\sqrt{0.0343 \times 0.9657 \times \left(\frac{1}{2051}+\frac{1}{2030}\right)}} = 2.47$$

$$z_{0.05} = 1.64$$

**Como** $2.47 > 1.64$**, podemos rechazar** $H_0$ **y afirmar que el medicamento es efectivo a nivel** $\alpha = 0.05$**.**