Probabilidad II
Tema 4: La función característica

José R. Berrendero

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Estructura de este tema

- Definición. Propiedades básicas.
- Teorema de unicidad y fórmulas de inversión.
- La función característica y los momentos de una v.a.
- Función característica de vectores aleatorios.
- La distribución normal multivariante.

Variables aleatorias complejas

$$Z : (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ aplicación.}$$

Sean $X = \mathrm{Re}(Z)$, $Y = \mathrm{Im}(Z)$ parte real e imaginaria de Z, es decir $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) \longrightarrow \mathbb{R}$ y

$$Z = X + iY$$

Z se dice **variable aleatoria compleja** si es medible cuando en $\mathbb{C}$ se considera la σ-álgebra boreliana asociada a la topología usual.

Nota: Z v.a. compleja si y solo si (X, Y) es un vector aleatorio bidimensional (es decir, si X e Y son v.a. unidimensionales).

Diremos que Z es **integrable** si X e Y son integrables. En tal caso, la **esperanza de** Z se define

$$\mathrm{E}Z = \mathrm{E}(X) + i\mathrm{E}(Y).$$

Esperanza de variables aleatorias complejas

(1) Si Z integrable, entonces $\mathrm{E}Z \in \mathbb{C}$.

(2) Z integrable si y solo si $\mathrm{E}|Z| < \infty$.

(3) **Linealidad:** Si Z_1, Z_2 v.a. complejas integrables y $a, b \in \mathbb{C}$, entonces $aZ_1 + bZ_2$ es integrable y

$$\mathrm{E}(aZ_1 + bZ_2) = a\mathrm{E}(Z_1) + b\mathrm{E}(Z_2).$$

(4) Si Z es integrable, entonces $|\mathrm{E}(Z)| \leq \mathrm{E}|Z|$.

(5) **Teorema de convergencia dominada:** Si $Z_n \to Z$ y $|Z_n| \leq Y$ v.a. integrable, entonces Z_n y Z son integrables y

$$\mathrm{E}(Z) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Z_n).$$

(6) Si $Z_1, \ldots, Z_n$ son v.a. independientes e integrables en $\mathbb{C}$, entonces $\mathrm{E}(Z_1 \cdots Z_n) = \mathrm{E}(Z_1) \cdots \mathrm{E}(Z_n)$.

Definición de la función característica

Sean X una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

La **función característica** (f.c.) de X se define como

$$\varphi_X(t) := \mathrm{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x).$$

Se verifica,

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) dF_X(x) + i \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sen}(tx) dF_X(x).$$

- Estrechamente relacionada con la transformada de Fourier.
- Si $X \equiv \mathrm{B}(1, 1/2)$, ¿cuál es su f.c.?

Propiedades básicas

(1) $\varphi_X(0) = 1$ y $|\varphi_X(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(2) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_{-X}(t)$.

(3) $\varphi_X(t)$ es uniformemente continua.

(4) Si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes, entonces:

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

(5) Si $Y = aX + b$, entonces $\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_{aX}(t)$.

Funciones características de algunas distribuciones

(1) $X = c$ c.s. (degenerada), $\qquad \varphi_X(t) = e^{itc}$.

(2) $X \sim \mathrm{B}(1; p)$, $\qquad \varphi_X(t) = (q + pe^{it})$.

(3) $X \sim \mathrm{B}(n; p)$, $\qquad \varphi_X(t) = (q + pe^{it})^n$.

(4) $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$, $\qquad \varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

(5) $X \sim \mathrm{G}(p)$, $\qquad \varphi_X(t) = \dfrac{p}{1 - qe^{it}}$.

(6) $X \sim \mathrm{BN}(r; p)$, $\qquad \varphi_X(t) = \left(\dfrac{p}{1 - qe^{it}}\right)^r$.

(7) $X \sim \mathrm{U}(a, b)$, $\qquad \varphi_X(t) = \dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$.

En particular,

- $X \sim \mathrm{U}(-1, 1)$, $\qquad \varphi_X(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.
- $X \sim \mathrm{U}(-c, c)$, $\qquad \varphi_X(t) = \dfrac{\sin tc}{tc}$.

Funciones características de algunas distribuciones

(8) X con densidad triangular $f(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$,

$$\varphi_X(t) = 2\left(\frac{1 - \cos t}{t^2}\right).$$

(9) $X \sim \text{Exp}(a)$, $\qquad \varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-1}.$

(10) X Cauchy, $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + x^2}$, $\qquad \varphi_X(t) = e^{-|t|}.$

(11) $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > 0)$

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}, \ (x > 0), \qquad \varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

(12) $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$, $\qquad \varphi_X(t) = \exp\left\{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}.$

Fórmulas de inversión

La función característica caracteriza la distribución de una v.a.

Teorema de unicidad

Sean X e Y dos v.a. tales que $\varphi_X = \varphi_Y$. Entonces $F_X = F_Y$.

Es consecuencia de las fórmulas de inversión:

Proposición

Sea X una v.a. con función de distribución F y función característica φ, con valores en $\mathbb{Z}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn} \varphi(t) dt.$$

Fórmulas de inversión

Teorema

Sea X una v.a. con función de distribución F y función característica φ. Para $a < b$,

$$F(b) - F(a) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(X = a) - \frac{1}{2}\mathrm{P}(X = b) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi(t) dt.$$

Teorema

Si $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$, entonces X es absolutamente continua con función de densidad f continua y acotada dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt.$$

Sumas de v.a. independientes

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ independientes} \\ X \sim \mathrm{B}(n; p) \\ Y \sim \mathrm{B}(m; p) \end{array}\right\} \Longrightarrow X + Y \sim \mathrm{B}(n + m; p).$$

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ independientes} \\ X \sim \mathrm{P}(\lambda) \\ Y \sim \mathrm{P}(\mu) \end{array}\right\} \Longrightarrow X + Y \sim \mathrm{P}(\lambda + \mu).$$

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ independientes} \\ X \sim \mathrm{BN}(r; p) \\ Y \sim \mathrm{BN}(s; p) \end{array}\right\} \Longrightarrow X + Y \sim \mathrm{BN}(r + s; p).$$

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ independientes} \\ X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha_1; \beta) \\ Y \sim \mathrm{Gamma}(\alpha_2; \beta) \end{array}\right\} \Longrightarrow X + Y \sim \mathrm{Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2; \beta).$$

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \text{ independientes} \\ X \sim \mathrm{N}(\mu_1; \sigma_1^2) \\ Y \sim \mathrm{N}(\mu_2; \sigma_2^2) \end{array}\right\} \Longrightarrow X + Y \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Función característica y momentos de una v.a.

Lema

$$\left|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!}\right| \leq \min\left\{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!}\right\}$$

(Gut, p. 556 o Resnick, p. 297)

Proposición

Sea X una v.a. tal que $\mathrm{E}|X|^n < \infty$. Sea φ la f.c. de X. Entonces,

$$\left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k \mathrm{E}(X^k)}{k!}\right| \leq \mathrm{E}\left[\min\left\{\frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|tX|^n}{n!}\right\}\right].$$

Corolario

Si $\mathrm{E}|X|^n < \infty$ para todo $n \geq 1$ y además $\lim_{n\to\infty} \frac{|t|^n}{n!}\mathrm{E}|X|^n = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k \mathrm{E}(X^k)}{k!}.$$

Función característica y momentos de una v.a.

Observación: Una condición suficiente para que se cumplan las hipótesis del corolario es

$$\mathrm{E}(e^{tX}) < \infty, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: Si $X \equiv \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $\mathrm{E}(e^{tX}) = \exp\{t\mu + t^2\sigma^2/2\} < \infty$.

Proposición

Sea X una v.a. tal que $\mathrm{E}|X|^n < \infty$. Sea φ la f.c. de X. Entonces $\varphi^{(k)}$, la derivada $k-$ésima de φ, existe para $k = 1, \ldots, n$ y

$$\varphi^{(k)}(t) = \mathrm{E}[(iX)^k e^{itX}].$$

En particular, $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathrm{E}(X^k)$.

Función característica de un vector aleatorio

Sean $X = (X_1, \ldots, X_n)'$ un vector aleatorio sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. La **función característica** (f.c.) de X se define como

$$\varphi_X(t_1, \ldots, t_n) := \mathrm{E}(e^{i(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n)}).$$

Si $t = (t_1, \ldots, t_n)'$ (en columna), $\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{it'X})$.

Observación: El teorema de unicidad también es válido para vectores aleatorios, es decir, la función característica de un vector aleatorio también caracteriza su distribución.

Dos aplicaciones

Caracterización de la independencia mediante la f.c.

Proposición

Las componentes del vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)$ son independientes si y solo si $\varphi_X(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t_i)$, para todo $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.

Caracterización de la distribución mediante proyecciones

Proposición

Sean X e Y dos vectores aleatorios en $\mathbb{R}^n$. Entonces, $X =_d Y$ si y solo si $a'X =_d a'Y$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$.

Distribución normal multivariante

Proposición
Sea $\varphi(t) = \exp\{it'\mu - (1/2)t'\Sigma t\}$, donde $\mu, t \in \mathbb{R}^n$ y Σ es una matriz $n \times n$ simétrica y semidefinida positiva. Entonces existe un vector aleatorio X, cuya f.c. es φ.

Definición
Se dice que el vector aleatorio X tiene distribución normal multivariante con vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ (simétrica y semidefinida positiva) si su función característica es $\varphi(t) = \exp\{it'\mu - (1/2)t'\Sigma t\}$. (Notación: $X \equiv \mathrm{N}_n(\mu, \Sigma)$.)

Observaciones: Si $X = (X_1, \ldots, X_n)' \equiv \mathrm{N}_n(\mu, \Sigma)$,

(a) ¿Cuál es la distribución de X_i?
(b) ¿Cuál es la distribución del vector $(X_i, X_j)'$, $i \neq j$?
(c) ¿Cuál es la distribución de la combinación lineal $a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$?

Distribución normal multivariante

Proposición

Sea $X \equiv N_n(\mu, \Sigma)$ y supongamos que $|\Sigma| > 0$, donde $|\Sigma|$ denota el determinante de Σ. Entonces X es un vector aleatorio absolutamente continuo con función de densidad:

$$f_X(x) = |2\pi\Sigma|^{-1/2} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\}$$

Densidad de $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ con $\boldsymbol{\mu} = (0,0)'$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}$.