Probabilidad II
Tema 2: Independencia

José R. Berrendero

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Estructura de este tema

- Independencia de sucesos y de σ-álgebras.
- Criterio básico de independencia.
- Ley 0-1 de Kolmogorov.
- Lemas de Borel-Cantelli.
- Independencia de variables aleatorias.

Independencia de dos sucesos

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ espacio de probabilidad. Se dice que dos sucesos $A, B \in \mathcal{F}$ son independientes si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

(Notación: $AB = A \cap B$.)

Observaciones

- Si $\mathrm{P}(A) = 0$, entonces A y B indeps. para todo $B \in \mathcal{F}$.
- Si $\mathrm{P}(A) = 1$, entonces A y B indeps. para todo $B \in \mathcal{F}$.
- Si A y B indeps. con $\mathrm{P}(B) > 0$, entonces $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$.
- Si A y B independientes, entonces:
  - A, B^c independientes.
  - A^c, B independientes.
  - A^c, B^c independientes.

Independencia de sucesos

Los sucesos $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{F}$ son independientes si para toda colección finita $\{i_1, \ldots, i_n\}$ de índices distintos de I,

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \cdots A_{i_n}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_n})$$

Observación: $A, B, C \in \mathcal{F}$ son independientes si:

(1) $$\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \\ \mathrm{P}(AC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) \\ \mathrm{P}(BC) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) \end{array} \right\} \quad \{A, B, C\} \text{ ind. dos a dos}$$

(2) $$\mathrm{P}(ABC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

La condición (1), independencia dos a dos, no implica independencia. La condición (2) tampoco.

Ejemplos

Ejemplo 1: seleccionamos con probabilidad $1/4$ entre los puntos $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$. Para $k=1,2,3$ consideramos los sucesos A_k, la coordenada k es igual a 1.

- Son independientes dos a dos pero no son independientes.
- Calcula $\mathrm{P}(A_1A_2|A_3)$ y $\mathrm{P}(A_1A_2)$.

Ejemplo 2: Se lanza un dado dos veces y se consideran los sucesos A (la segunda tirada es 1,2 o 5), B (la segunda tirada es 4,5 o 6) y C (la suma de las dos tiradas es 9).

- Se cumple que $\mathrm{P}(ABC)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$.
- Sin embargo no son independientes dos a dos.

Criterio básico de independencia

Independencia de familias de sucesos
Las clases de sucesos $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ son independientes si para cada elección $\{C_i : C_i \in \mathcal{C}_i,\ i \in I\}$, los sucesos $\{C_i\}_{i\in I}$ son independientes. Es decir, si para cada colección finita $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$, se verifica $\mathrm{P}(C_{i_1} \cdots C_{i_k}) = \mathrm{P}(C_{i_1}) \cdots \mathrm{P}(C_{i_k})$.

Observación
A, B independientes, entonces $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ independientes.

Teorema (criterio básico de independencia)
Sean $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \subset \mathcal{F}$ π-sistemas independientes. Entonces las σ-álgebras que generan, $\sigma(\mathcal{C}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{C}_n)$, son independientes.

Criterio básico de independencia

Aplicaciones

- $\{A_1, \ldots, A_n\}$ independientes. $\mathcal{C}_i = \{A_i, \Omega\}$ π-sistema. Entonces, las clases $\sigma(\mathcal{C}_i) = \{\emptyset, A_i, A_i^c, \Omega\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ son independientes.
- $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ independientes. Demuestra que $\mathcal{F}_A = \sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ y $\mathcal{F}_B = \sigma(\mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4 \cup \mathcal{F}_5)$ son también independientes.

Ejemplo

A, B, C, D, E sucesos independientes. Las σ-álgebras $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}, \ldots, \mathcal{F}_5 = \{\emptyset, E, E^c, \Omega\}$ son independientes. Por tanto, $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ y $\sigma(\mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4 \cup \mathcal{F}_5)$ son también independientes.
En particular, los sucesos AB^c y $C \cup (D \setminus E)$ son independientes.

Teorema de agrupamiento

Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ familia independiente de σ-álgebras de $\mathcal{F}$, $\{I_j\}_{j \in J}$ partición de I y $\mathcal{F}_{I_j} = \sigma\left(\bigcup_{i \in I_j} \mathcal{F}_i\right)$. Se tiene que las σ-álgebras $\{\mathcal{F}_{I_j}\}_{j \in J}$ son independientes.

La ley 0-1 de Kolmogorov

Sea $\{\mathcal{F}_n\}$ una sucesión de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Por ejemplo, $\mathcal{F}_n = \sigma(A_n)$.

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$ definimos $\mathcal{G}_n = \sigma\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{F}_k\right)$.

La σ-álgebra $\mathcal{G}_n$ está formada por los sucesos que dependen de lo que ocurre de $n+1$ en adelante. Se verifica $\mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2 \supset \cdots$

La σ-**álgebra asintótica** (relativa a $\{\mathcal{F}_n\}$) es

$$\mathcal{F}_\infty := \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \mathcal{F}_k\right)$$

¿Cómo cambia $\mathcal{F}_\infty$ si cambiamos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ por otras tres sub-σ-álgebras?

Ejemplo: si $\mathcal{F}_n = \sigma(A_n)$, $\limsup A_n \in \mathcal{F}_\infty$ y $\liminf A_n \in \mathcal{F}_\infty$.

La ley 0-1 de Kolmogorov

Bajo la hipótesis de independencia, los sucesos asintóticos tienen probabilidad cero o probabilidad uno.

Teorema (ley 0-1 de Kolmogorov)
Sean $\{\mathcal{F}_n\} \subset \mathcal{F}$ sub-σ-álgebras independientes. Para todo $A \in \mathcal{F}_\infty$, se tiene $\mathrm{P}(A) = 0$ o $\mathrm{P}(A) = 1$.

Ejemplo
Si $A_1, A_2, \ldots$ son independientes, $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$ o $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1$.

En este caso, los lemas de Borel-Cantelli son más informativos porque dan un criterio que permite saber cuándo estamos en una u otra situación.

Lemas de Borel-Cantelli

Primer lema de Borel-Cantelli. Sea $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$.

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty$, entonces $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$.

Segundo lema de Borel-Cantelli. Sea $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ **independientes**.

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \infty$, entonces $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1$.

Ejemplo

- Si se lanza una moneda infinitas veces, ¿cuál es la probabilidad de que a partir de cierto momento ya no se obtengan más caras?
- La misma cuestión si cada lanzamiento se realiza con una moneda diferente tal que la probabilidad de cara en la tirada n es $p_n = 1/n$. ¿Y si fuese $p_n = 1/n^2$?

Independencia de variables aleatorias

$\{X_i, i \in I\}$ forman una familia de v.a. independientes si las σ-álgebras que generan, $\{\sigma(X_i), i \in I\}$, son independientes.

Dada una familia de v.a. $\{X_i, i \in I\}$, sus **funciones de distribución finito-dimensionales** se definen:

$$F_J(x_j, j \in J) := \mathrm{P}\{X_j \leq x_j, j \in J\},$$

para todos los subconjuntos finitos $J \subset I$.

Proposición (criterio de factorización)
$\{X_i, i \in I\}$ forman una familia de v.a. independientes si y solo si para todo subconjunto finito $J \subset I$

$$F_J(x_j, j \in J) = \prod_{j \in J} \mathrm{P}(X_j \leq x_j).$$

Independencia de variables aleatorias

Corolario
Las v.a. $X_1, \ldots, X_n$ son independientes si y solo si

$$\mathrm{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i \leq x_i).$$

Corolario
Las v.a. discretas $X_1, \ldots, X_n$ con valores en S (numerable) son independientes si y solo si

$$\mathrm{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i = x_i),$$

para todo $x_i \in S$, $i = 1, \ldots, n$.

Corolario

X_i v.a. absolutamente continua con densidad $f_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

(a) Si $(X_1, \ldots, X_n)$ tiene densidad $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ (c.s. Lebesgue), entonces $X_1, \ldots, X_n$ independientes.

(b) Si $X_1, \ldots, X_n$ independientes, entonces $(X_1, \ldots, X_n)$ tiene densidad $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$.

Observación: puede ocurrir que $X_1, \ldots, X_n$ sean absolutamente continuas (resp. medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$) pero el vector $(X_1, \ldots, X_n)$ no lo sea (resp. medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$).

Independencia de variables aleatorias

Proposición
Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. indepenientes y sean $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ funciones borelianas. Entonces $f(X_1, \ldots, X_k)$ y $g(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ son v.a. independientes.

Cuestión: Si X es independiente de Y y X es independiente de Z, ¿podemos afirmar que X es independiente de $f(Y, Z)$?

Ley 0-1 de Kolmogorov para v.a.
Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de v.a. independientes. Sea $\mathcal{G}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ y $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{G}_n$. Si $A \in \mathcal{F}_\infty$, entonces $\mathrm{P}(A) = 0$ o $\mathrm{P}(A) = 1$.

Ejemplo: La probabilidad de que la serie $\sum_{n=1}^\infty X_n$ sea convergente es cero o es uno.