Probabilidad II
Introducción

José R. Berrendero

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Datos de contacto

José Ramón Berrendero

- Despacho: 08-210
- Correo electrónico: `joser.berrendero@uam.es`
- Teléfono: 91 497 6690
- Web:
  `http://matematicas.uam.es/~joser.berrendero/index.html`

Evaluación

La calificación final de la asignatura se calculará con la siguiente fórmula:

$$\text{Nota final} = \begin{cases} F & \text{si } F < 4 \\ 5 + \frac{5}{7}(F + C - 5) & \text{si } F \geq 4 \end{cases},$$

donde

- F es la nota obtenida en el examen final (sobre 10 puntos).
- C es la nota obtenida en un control que se realizará hacia la mitad del curso (sobre 2 puntos).

Hilbert

Traducción al inglés de la conferencia de Hilbert en el Congreso de Matemáticos de París de 1900

El sexto problema de Hilbert

6. Mathematical treatment of the axioms of physics

The investigations on the foundations of geometry suggest the problem: *To treat in the same manner, by means of axioms, those physical sciences in which mathematics plays an important part; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics.*

As to the axioms of the theory of probabilities,[14] it seems to me desirable that their logical investigation should be accompanied by a rigorous and satisfactory development of the method of mean values in mathematical physics, and in particular in the kinetic theory of gases.

Kolmogorov

Kolmogorov, A. (1933). Los fundamentos de la teoría de la probabilidad.

PROLOGO A LA PRIMERA EDICION

El objetivo del trabajo expuesto es fundamentar axiomáticamente la teoría de las probabilidades. La idea central del autor fue la inclusión natural de los fundamentos de la teoría de las probabilidades, consideradas aún no hace mucho, completamente peculiares, en la serie de conceptos generales de la matemática moderna. Antes del surgimiento de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue, este problema era casi desalentador. Después de las investigaciones de Lebesgue quedó clara la analogía entre la medida de conjuntos y la probabilidad de un suceso, como también entre la integral de funciones y la esperanza matemática de la variable aleatoria. Esta analogía permite una continuación: así, por ejemplo, muchas propiedades de las variables aleatorias independientes son completamente análogas a las correspondientes propiedades de las funciones ortogonales. Para que a partir de esta analogía se

Espacios de probabilidad

Espacio de probabilidad (tema 1):

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$$

- Ω es un conjunto arbitrario.
- $\mathcal{F}$ es el conjunto de sucesos (subconjuntos de Ω que forman una σ-álgebra).
- P es una medida tal que $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

En comparación con teoría de la medida:

- Se añade un concepto fundamental nuevo: la idea de **independencia** (tema 2).
- Otras σ-álgebras diferentes de $\mathcal{F}$ representarán papeles importantes.

Objetivo 1. Leyes de los grandes números (LGN)

Si $X_1, X_2, \ldots$ son los resultados que se obtienen al realizar de forma independiente un experimento aleatorio,

$$\bar{X}_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to \mu.$$

- ¿Que tipo de objeto matemático es X_i? (tema 1)
- ¿Qué significa la expresión *de forma independiente*? (tema 2)
- ¿En qué sentido una sucesión de valores aleatorios converge a un límite? (tema 5)
- ¿Cuándo existe el límite? (tema 5)
- Si existe el límite μ, ¿cuál es? (temas 3 y 5)

Objetivo 1. Leyes de los grandes números (LGN)

Una posible definición de convergencia (LFGN):

$$\mathrm{P}\left[\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\left\{|\bar{X}_m - \mu| < \frac{1}{k}\right\}\right] = 1.$$

- La unión numerable y la intersección numerable de conjuntos de $\mathcal{F}$ debe pertenecer a $\mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}$ tiene que ser una σ-álgebra.
- Sin embargo, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ es demasiado grande en la mayoría de ejemplos de interés.

Objetivo 2. Teorema central del límite (TCL)

Si a_n es una sucesión de números reales, estudiar el comportamiento cuando $n \to \infty$ de

$$a_n(\bar{X}_n - \mu)$$

- Tipo de convergencia (tema 6)
- Velocidad de convergencia ¿Cuál es la sucesión a_n adecuada? (tema 6)
- ¿Cuál es la distribución límite? (tema 6)

Objetivo 3. Esperanza condicionada

Si X e Y son los resultados de dos experimentos aleatorios, definir de forma adecuada y completamente general $\mathrm{E}(Y|X)$, el valor esperado de Y dado que se conoce el valor de X. (Tema 7, en función del tiempo disponible).

- Es un concepto fundamental en problemas de predicción.
- También importante para definir distintos tipos de procesos estocásticos:
  - Procesos de Markov:

$$\mathrm{P}(a < X_{n+1} \leq b | X_1, X_2, \ldots, X_n) = \mathrm{P}(a < X_{n+1} \leq b | X_n).$$

  - Martingalas:

$$\mathrm{E}(X_{n+1} | X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_n.$$

Temario

1. **Espacios de probabilidad**
   Álgebras y σ-álgebras, π-sistemas, λ-sistemas. Espacios de probabilidad. Propiedades elementales. Sucesiones de sucesos. Función de distribución. Probabilidad condicionada. Variables y vectores aleatorios.

2. **Independencia.**
   Independencia de sucesos y de σ-álgebras. Criterio básico de independencia. Ley 0-1 de Kolmogorov. Lemas de Borel-Cantelli. Independencia de variables aleatorias.

3. **Esperanza.**
   Esperanza y momentos de variables y vectores aleatorios. Algunas desigualdades importantes.

4 Función característica.

Propiedades básicas. Fórmulas de inversión. Función característica y momentos.

5 Convergencias estocásticas y leyes de los grandes números.

Convergencia casi segura, en probabilidad y en media. Relaciones entre los distintos conceptos de convergencia. Leyes fuertes y débiles de los grandes números.

6 La convergencia en distribución y el teorema central del límite.

Caracterizaciones de la convergencia en distribución. Teorema de continuidad. Teoremas centrales del límite.

7 Esperanza condicionada.

Esperanza condicionada a una σ-álgebra. La esperanza condicionada como proyección. Aplicaciones.

Bibliografía

- Ash, R. B. and Doleans-Dade, C. (2000). *Probability and measure theory*. Academic Press.
- Gut, A. (2012). *Probability: a graduate course* . Springer.
- Resnick, S. I. (2013). *A probability path*. Springer.
- Shiryaev, A. N. (2016). *Probability 1 (third edition)*. Springer.
- Williams, D. (1991). *Probability with martingales*. Cambridge University Press.