PROBABILIDAD II **Curso 2018/2019**
Grado en Matemáticas

Relación 7 de problemas

1. Sea $X, Y \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Demuestra que, si $\mathrm{E}(X|Y) = Y$ y $\mathrm{E}(Y|X) = X$, entonces $\mathrm{P}(X = Y) = 1$. (Indicación: Prueba que $\mathrm{E}[(X - Y)^2] = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(Y^2)$.)

2. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. integrables y $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$. Demuestra que

$$\mathrm{E}(S_k|S_n) = \frac{k}{n} S_n \quad \text{c.s.}$$

3. Sea X una v.a. definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ con $\mathrm{E}(X^2) < \infty$. Sean $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ dos $\sigma-$álgebras con $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{F}$. Demuestra que

$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X|\mathcal{D}_2))^2] \leq \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X|\mathcal{D}_1))^2].$$

Interpreta este resultado.

4. Supongamos que $E(X^2) < \infty$ y sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ una σ-álgebra. Se define la varianza de X condicionada a $\mathcal{D}$, como

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{D}) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X|\mathcal{D}))^2|\mathcal{D}].$$

(a) Demuestra que $\mathrm{Var}(X|\mathcal{D}) = \mathrm{E}(X^2|\mathcal{D}) - \mathrm{E}(X|\mathcal{D})^2$.
(b) Demuestra que $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(X|\mathcal{D})) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(X|\mathcal{D}))$. (Indicación: Resta y suma $\mathrm{E}(X|\mathcal{D})$ dentro de $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))^2]$ y desarrolla el cuadrado).
(c) Sean $Y_1, Y_2, \ldots,$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media μ y varianza finita σ^2. Sea N una variable aleatoria independiente de las Y_i y con valores enteros y positivos. Definamos $S_N = \sum_{i=1}^N Y_i$. Utiliza el apartado (b) para calcular $\mathrm{Var}(S_N)$ en términos de μ, σ^2, $\mathrm{E}(N)$, $\mathrm{Var}(N)$.

5. Sea $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$, una filtracion y sea X una variable aleatoria integrable. Definamos $M_n = \mathrm{E}(X|\mathcal{F}_n)$, para todo $n \geq 0$. Demuestra que M_n es una martingala respecto a $\mathcal{F}_n$.

6. Una urna contiene dos bolas, una blanca y otra negra. Se extrae aleatoriamente una de las bolas y se vuelve a introducir en la urna junto con otra bola del mismo color que la extraída. Sea X_n la fracción de bolas blancas en la urna tras repetir n veces este procedimiento. Demuestra que X_n es una martingala respecto a la filtración $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.