PROBABILIDAD II **Curso 2018/2019**
Grado en Matemáticas

Relación 6 de problemas

1. Sean (X_n) e (Y_n) dos sucesiones de variables aleatorias tales que para todo n, X_n es independiente de Y_n. Demuestra que si $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{d}} Y$, entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{d}} X + Y$, donde X e Y son dos variables aleatorias independientes.

2. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con la siguiente distribución:

$$\mathrm{P}(X_1 = j) = \frac{1}{10}, \quad j = 0, 1, \ldots, 9.$$

(a) Calcula la función característica de X_1. (Para dar una expresión sencilla puede ser útil la fórmula de la suma de los primeros términos de una progresión geométrica: $\sum_{j=0}^n r^j = (r^{n+1} - 1)/(r - 1)$.)

(b) Calcula la función característica de la variable aleatoria

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{10^k}.$$

Simplifica la expresión resultante todo lo posible.

(c) Determina cuál es el límite en distribución de la sucesión U_n.

3. Sean X_n e Y_n dos sucesiones de v.a. tales que $X_n = O_p(1)$ e $Y_n = o_p(1)$. Demuestra que $X_n Y_n = o_p(1)$.

4. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Determina razonadamente cuál es el límite en distribución de las siguientes sucesiones:

(a) $\overline{X}_n := n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n)$.

(b) $\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1/2)$.

(c) $12n(\overline{X}_n - 1/2)^2$.

(d) $\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1/2)^2$.

(e) $(\sqrt{n} + 1)(\overline{X}_n - 1/2)$.

(f) $\sqrt{n}(e^{\overline{X}_n} - e^{1/2})$.

(g) $n^{1/3}(e^{\overline{X}_n} - e^{1/2})$.

5. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes e idénticamente distribuidas tales que $\mathrm{E}(X_1^4) < \infty$. Sea $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ y sea $\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ la varianza muestral calculada con los n primeras variables de la sucesión.

(a) Estudia el comportamiento asintótico de $\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)$.
(b) Aplica el método delta para deducir la distribución límite de $\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma)$.
(c) ¿Cuál es la distribución límite de $\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - 1)$ si las variables X_i tienen distribución normal estándar? Compara el resultado con la distribución exacta de $\hat{\sigma}^2$, que en este caso es conocida.

6. (Condición de Lyapunov.) Sea $X_{n,k}$, $n \geq 1$, $1 \leq k \leq r_n$, un arreglo triangular de v.a. tales que $X_{n,1}, \ldots, X_{n,k_n}$ son independientes con varianzas finitas no todas nulas cuya suma se denota por s_n^2. Sea $\mu_{n,k} = \mathrm{E}(X_{n,k})$. Demuestra que, si existe $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{r_n} \mathrm{E}|X_{n,k} - \mu_{n,k}|^{2+\delta} = 0,$$

entonces se cumple la condición de Lindeberg.

7. A partir de la versión para arreglos triangulares, demuestra la siguiente versión estándar del teorema de Lindeberg-Feller: sea X_n una sucesión de v.a. independientes con $\mathrm{E}(X_n) = \mu_n$ y $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2$, con $\sigma^2 > 0$ para algún n. Sea $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$ y $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Se verifica la siguiente condición de Lindeberg: si $n \to \infty$,

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{|X_k - \mu_k| \geq \epsilon s_n\}} |X_k - \mu_k|^2 dP \to 0, \quad \text{para todo } \epsilon > 0.$$

Entonces se tiene

$$\frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{s_n} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1).$$

Escribe la condición de Lyapunov para la situación descrita en este ejercicio.

8. Sea $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes tales que X_n tiene distribución de Bernoulli de parámetro p_n. Sea $s_n^2 = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)$. Demuestra que si $s_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - p_i)}{s_n} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1).$$

(Indicación: comprueba que se cumple la condición de Lyapunov con $\delta = 1$.)

9. Sea X_n una sucesión de v.a. independientes e idénticamente distribuidas con $\mathrm{E}(X_n) = \mu$ y $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$. Sea $c_{n,k}$, con $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq n$, un arreglo triangular de constantes tal que, si $n \to \infty$,

$$\max_{k=1,\ldots,n} \frac{c_{n,k}^2}{\sum_{k=1}^n c_{n,k}^2} \to 0.$$

Demuestra que

$$\frac{\sum_{k=1}^n c_{n,k}(X_k - \mu)}{\sigma\sqrt{\sum_{k=1}^n c_{n,k}^2}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1).$$

10. Sean $X_1, X_2, \dots$ v.a.i.i.d. con media igual a cero y varianza igual a uno. Demuestra que

$$\frac{X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n}{\sqrt{1 + 4 + \cdots + n^2}} \xrightarrow{\text{d}} \mathrm{N}(0,1).$$

(Indicación: puede ser útil recordar que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, es decir, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ es un polinomio de grado 3 en n).