PROBABILIDAD II **Curso 2018/2019**
Grado en Matemáticas

Relación 5 de problemas

1. Sea X_n una sucesión de v.a. Demuestra que si $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ y $X_n \xrightarrow{\text{P}} Y$, entonces $\text{P}(X = Y) = 1$. Demuestra que si $X_n \xrightarrow{\text{m-}r} X$ y $X_n \xrightarrow{\text{m-}r} Y$, entonces $\text{P}(X = Y) = 1$.

2. Demuestra que si $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{P}} Y$, entonces $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{P}} X + Y$ y $X_nY_n \xrightarrow{\text{P}} XY$. (Indicación: razonando con subsucesiones es fácil).

3. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. tales que $\text{Var}(X_n) \leq K$, para todo $n \geq 1$, y $\text{Cov}(X_i, X_j) \leq 0$, si $i \neq j$. Demuestra que, si $a > 1/2$,

$$\frac{S_n - \text{E}(S_n)}{n^a} \xrightarrow{\text{m-2}} 0.$$

4. Sea X_n una sucesión monótona de v.a. Demuestra que $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ si y solo si $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X$.

5. Sea $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. con $\text{E}|X_1| < \infty$. Demuestra que $n^{-1} \max\{|X_1|, \ldots, |X_n|\}$ converge a cero en probabilidad. (Indicación: usa que si $\text{E}|X| < \infty$, entonces $\lim_{x\to\infty} x\text{P}(|X| > x) = 0$. Demuestra también esta propiedad.)

6. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. con distribución $\text{N}(\mu, \sigma^2)$. Da una demostración directa (sin usar ninguna LFGN) de que $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{c.s.}} \mu$, donde $\bar{X}_n = n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n)$. (Indicación: hay que usar de manera conveniente la desigualdad de Markov y después el primer lema de Borel-Cantelli.)

7. (Teorema de Weierstrass.) Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Definamos la sucesión de polinomios (polinomios de Bernstein):

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1 - x)^{n-k}.$$

Demuestra que $p_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, es decir, $\sup_{x\in[0,1]} |p_n(x) - f(x)| \to 0$, si $n \to \infty$. (Indicación: considera la sucesión de v.a.i.i.d. $X_1, X_2, \ldots$, donde X_i tiene distribución de Bernoulli de parámetro x. Entonces $p_n(x) = \text{E}[f(S_n/n)]$.)

8. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes tales que X_n tiene distribución de Poisson de parámetro n. Estudia la convergencia casi segura de la sucesión $(X_1 + \cdots + X_n)/n^2$.

9. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. con distribución uniforme en $(0,1)$. Demuestra que

$$Y_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{X_1 + \cdots + X_n}$$

converge c.s. Calcula $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n)$.