PROBABILIDAD II **Curso 2018/2019**
Grado en Matemáticas

Relación 4 de problemas

1. Sea X una v.a. absolutamente continua con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcula la función característica de X y demuestra que su distribución es la misma que la de $Y_1 - Y_2$, donde Y_1 e Y_2 son dos v.a. independientes con distribución exponencial de parámetro 1.

2. Utiliza el resultado del problema anterior y una de las fórmulas de inversión para calcular la función característica de la distribución de Cauchy, cuya función de densidad viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con distribución de Cauchy, calcula la distribución de su promedio $\bar{X}_n = n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n)$.

3. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson truncada en cero de parámetro λ. La función de probabilidad de X es:

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(a) Calcula la función característica de X.
(b) Usa la función característica para calcular $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{E}(X^2)$.
(c) Sean X e Y variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Poisson truncada en cero de parámetro λ. ¿Es la distribución de $X + Y$ también de Poisson truncada en cero (con un valor del parámetro no necesariamente igual a λ)?

4. Sean X_1 y X_2 v.a. independientes con distribución exponencial de parámetro 1. Calcula la función característica de $U = \max\{X_1, X_2\}$. Demuestra que las v.a. U y $V = X_1 + X_2/2$ tienen la misma distribución.

5. (Relación de Parseval) Sean X e Y dos v.a. con funciones de distribución F y G respectivamente, y funciones características φ y γ respectivamente.

(a) Demuestra que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy}\varphi(y)dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x-u)dF(x)$. En particular,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x)dF(x).$$

(b) Usa el resultado del apartado anterior para demostrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos y}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{e}.$$

(Indicación: considera X tal que $\mathrm{P}(X = \mp 1) = 1/2$ e Y con distribución de Cauchy.)

6. El vector aleatorio (X, Y) tiene densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)] & \text{si } |x| \leq 1,\ |y| \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demuestra que $\varphi_{X+Y} \equiv \varphi_X \varphi_Y$, pero X e Y *no* son independientes.

7. Calcula $\mathrm{E}(X^k)$, $k = 1, 2, \ldots$ donde X es una v.a. con distribución normal estándar.

8. Sea $X \equiv \mathrm{N}_n(\mu, \Sigma)$. Calcula la distribución del vector $Y = AX + b$, donde A es una matriz $p \times n$ y $b \in \mathbb{R}^p$.

9. Sea (X, Y) un vector aleatorio normal bidimensional.

(a) Demuestra que X e Y son variables aleatorias independientes si y solo si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
(b) Determina la distribución del vector $(X+Y, X-Y)$. ¿Son independientes las v.a. $X+Y$ y $X-Y$?