PROBABILIDAD II **Curso 2018/2019**
Grado en Matemáticas

Relación 3 de problemas

1. Se lanza n veces una moneda equilibrada. Sea X el número de veces que aparece *cruz seguida de cara*. Halla $\mathrm{E}(X)$.

2. Se lanza n veces un dado equilibrado. Hallar $\mathrm{E}(X)$, siendo X el producto de las n puntuaciones que se obtienen.

3. Sea X una v.a. no negativa con función de distribución F. Demuestra que

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > t)dt = \int_0^\infty (1 - F(t))dt.$$

Demuestra que para una v.a. arbitraria se verifica

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(t))dt - \int_{-\infty}^0 F(t)dt.$$

siempre que alguna de las dos integrales que aparecen sea finita.

4. Demuestra que si X toma valores enteros no negativos, entonces $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^\infty \mathrm{P}(X \geq n)$.

5. Sea X es una variable aleatoria tal que $\sum_{n=0}^\infty \mathrm{P}(|X| \geq n) < \infty$. Demuestra que $\mathrm{E}(|X|) < \infty$.

6. Sea $X_1, \dots, X_n$ v.a. independientes no negativas con la misma función de distribución F. Expresa $\mathrm{E}(\text{máx}\{X_1, \dots, X_n\})$ y $\mathrm{E}(\text{mín}\{X_1, \dots, X_n\})$ en función de F. Aplica el resultado obtenido para calcular ambas esperanzas si las variables tienen distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

7. Sean $N, X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias. Se supone que N toma valores en $\mathbb{N}$ y consideramos la variable $Y = \sum_{i=1}^N X_i$. Suponemos además que $N, X_1, X_2, \dots$ son independientes, y que las X_i tienen la misma distribución. Mostrar que si N y X_1 son integrables, entonces Y también lo es y $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(N)\mathrm{E}(X_1)$.

8. Sea X una v.a. tal que $|X| \leq K$ para una cierta constante K. Demuestra que si $p > 0$ y $0 < \epsilon < K$, se tiene

$$\mathrm{P}(|X| \geq \epsilon) \geq \frac{\mathrm{E}|X|^p - \epsilon^p}{K^p - \epsilon^p}.$$

9. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Bernoulli de parámetro p. Se define $\hat{p} = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

(a) Acota superiormente $\mathrm{P}(|\hat{p} - p| \geq \epsilon)$ utilizando las desigualdades de Chebychev y de Hoeffding.

(b) Para cada una de las dos cotas del apartado anterior, determina el valor de n necesario para garantizar $\mathrm{P}(|\hat{p} - p| < 0{,}03) \geq 0{,}95$, para todo $p \in (0, 1)$.

10. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. tales que $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ y $\rho(X_i, X_j) = \rho$, si $i \neq j$, donde $\rho \geq -(n-1)^{-1}$. Calcula la varianza de la media muestral $\bar{X} = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Compara el resultado con el obtenido si las variables fueran independientes.