PROBABILIDAD II **Curso 2018/2019**
Grado en Matemáticas

Relación 2 de problemas

1. Se lanza n veces una moneda trucada tal que la probabilidad de que salga cara es p. Sea A el suceso consistente en que sale cara en el primer lanzamiento y sea B_k el suceso consistente en que han salido exactamente k caras en los n lanzamientos ($0 \leq k \leq n$). Determina cuál debe ser la relación entre p, k y n para que los sucesos A y B_k sean independientes.

2. Suponiendo que A, B, C, D, E son sucesos independientes, determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) AB es independiente de $C^c \cup (DE^c)$.
(b) $A \cup B$ es independiente de AC.
(c) Si $\mathrm{P}(C) > 0$, $\mathrm{P}(AB|C) = \mathrm{P}(A|C)\mathrm{P}(B|C)$.
(d) $\mathrm{P}(AB|F) = \mathrm{P}(A|F)\mathrm{P}(B|F)$, para cualquier F con $\mathrm{P}(F) > 0$.

3. Demuestra que si $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty$, entonces $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$. (Indicación: Recuerda el problema 7(e) de la relación 1 de ejercicios.)

4. Sean $B, A_1, A_2, \ldots$ sucesos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(B \cap A_n) < \infty$. Demuestra que $\mathrm{P}(\limsup A_n) \leq 1 - \mathrm{P}(B)$.

5. Sean $A_1, A_2, \ldots$ sucesos independientes tales que $\mathrm{P}(A_n) < 1$ ($n \geq 1$) y $\mathrm{P}(\cup_n A_n) = 1$. Demuestra que $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1$. Demuestra que la conclusión no se mantiene si se suprime la condición de independencia. (Indicación: Pasa al complementario).

6. Sea $X = (U_1, \ldots, U_d)$ un vector aleatorio con distribución uniforme sobre $[0,1]^d$, el hipercubo unidad de dimensión $d \in \mathbb{N}$.

(a) Determina la función de distribución de la variable aleatoria

$$Y = \min\{U_1, 1 - U_1, U_2, 1 - U_2, \ldots, U_d, 1 - U_d\}$$

que corresponde a la distancia del punto X a la frontera del hipercubo.

(b) Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos uniformemente sobre $[0,1]^d$, sea $Y_1, Y_2, \ldots$ la correspondiente sucesión de distancias a la frontera de $[0,1]^d$ y sea $\epsilon_n = 1/2 - 1/n$. Calcula la probabilidad de que ocurra $Y_n > \epsilon_n$, para infinitos valores de n.

7. Sean $A_1, A_2, \ldots$ sucesos independientes. Según la convergencia o divergencia de las series $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_n)$ y $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_n^c)$, se presentan, en principio, cuatro casos posibles. En cada caso, describir qué ocurre con $\mathrm{P}(\limsup A_n)$ y $\mathrm{P}(\liminf A_n)$.

8. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes tales que X_n tiene distribución geométrica de parámetro $p_n = n^{-1}$ (es decir, $\mathrm{P}(X_n = k) = n^{-1}(1 - n^{-1})^k$, para $k = 0, 1, \ldots$).

(a) Calcula $\mathrm{P}(\limsup\{X_n \geq n\})$ y $\mathrm{P}(\liminf\{X_n \geq n\})$ usando los lemas de Borel-Cantelli.
(b) ¿Cómo se puede llegar a la misma conclusión usando la ley 0-1 de Kolmogorov?

9. Demuestra las dos siguientes afirmaciones:

(a) Sea X una variable aleatoria tal que $\mathrm{P}(X = c) = 1$, donde $c \in \mathbb{R}$. Entonces X es independiente de cualquier otra variable aleatoria Y.

(b) Sea X una variable aleatoria independiente de sí misma. Entonces, existe una constante c tal que $\mathrm{P}(X = c) = 1$. (INDICACIÓN: Demuestra que la función de distribución solo puede tomar los valores cero o uno.)