PROBABILIDAD II **Curso 2018/2019**
Grado en Matemáticas

Relación 1 de problemas

1. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, dos σ-álgebras sobre Ω. Se define $\mathcal{C} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}$. Demuestra que $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \sigma(\mathcal{C})$.

2. Demuestra que $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es un λ-sistema si y solo si (1) $\Omega \in \mathcal{L}$, (2) $A \in \mathcal{L}$, $B \in \mathcal{L}$ con $A \subset B$ implica que $B - A \in \mathcal{L}$, (3) si $A_n \in \mathcal{L}$, $n \geq 1$, y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$.

3. Determina si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

(a) $\mathrm{P}(A \cap B) \geq \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B^c)$.
(b) $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \mathrm{P}(A_1) - \sum_{i=2}^{n} \mathrm{P}(A_i)$.
(c) $\mathrm{P}(A \triangle B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 2\mathrm{P}(A \cap B)$
$= 2\mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$.
(d) $\mathrm{P}(A \cap B) \leq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.
(e) $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \leq \text{mín}(\mathrm{P}(A_1), \ldots, \mathrm{P}(A_n))$.
(f) $\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \text{máx}(\mathrm{P}(A_1), \ldots, \mathrm{P}(A_n))$.
(g) Si $\mathrm{P}(A_k) = 1$ para $k \geq 1$, entonces $\mathrm{P}(\cap_{k=1}^{\infty} A_k) = 1$.

(Recuerda que "$\triangle$"simboliza la *diferencia simétrica*, definida por $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.)

4. Sean $A_1, A_2, \ldots$ sucesos (en un espacio de probabilidad) tales que $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) > n-1$. Demuestra que $\mathrm{P}(\cap_{k=1}^{n} A_k) > 0$.

5. Sean $A_1, A_2, \ldots$ sucesos (en un espacio de probabilidad) tales que $\mathrm{P}(A_i \cap A_j) = 0$, siempre que $i \neq j$. Demuestra que

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

6. Construir sucesiones de sucesos $\{A_n\}$ tales que: (a) $\mathrm{P}(\limsup A_n) = \alpha$ ($\alpha \in [0,1]$ fijo); (b) $\sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(A_n) = \infty$ y $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$.

7. Sean A_n y B_n subconjuntos de Ω. Demuestra:

(a) $(\limsup A_n) \cap (\limsup B_n) \supset \limsup(A_n \cap B_n)$.
(b) $(\limsup A_n) \cup (\limsup B_n) = \limsup(A_n \cup B_n)$.
(c) $(\liminf A_n) \cap (\liminf B_n) = \liminf(A_n \cap B_n)$.
(d) $(\liminf A_n) \cup (\liminf B_n) \subset \liminf(A_n \cup B_n)$.
(e) $\limsup A_n - \liminf A_n = \limsup(A_n - A_{n+1}) = \limsup(A_{n+1} - A_n)$.
(f) Si $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1 = \mathrm{P}(\liminf B_n)$, entonces $\mathrm{P}(\limsup(A_n \cap B_n)) = 1$.
(g) De $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1 = \mathrm{P}(\limsup B_n)$ no se sigue, en general, que $\mathrm{P}(\limsup(A_n \cap B_n)) = 1$.

8. Determina si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones relativas a probabilidades condicionadas (se supone en todos los casos que los sucesos condicionantes son de probabilidad no nula):

(a) $\mathrm{P}(A|C) + \mathrm{P}(A|C^c) = 1$.
(b) $\mathrm{P}(A|C) + \mathrm{P}(A^c|C^c) = 1$.
(c) Si $\mathrm{P}(A|C) \geq \mathrm{P}(B|C)$ y $\mathrm{P}(A|C^c) \geq \mathrm{P}(B|C^c)$, entonces $\mathrm{P}(A) \geq \mathrm{P}(B)$.
(d) $\mathrm{P}(A|B) \geq (\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1)/\mathrm{P}(B)$.

9. Sean $N, X_1, X_2, \ldots$ v.a. sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Se supone que N toma valores en $\mathbb{N}$. Demuestra que $\sum_{i=1}^N X_i$, $\max\{X_1, \ldots, X_N\}$ y $\min\{X_1, \ldots, X_N\}$ son variables aleatorias.

10. Sea X una v.a. con función de distribución continua F. Demuestra que $Y = F(X)$ es una variable aleatoria y calcula su función de distribución.

11. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. y sea $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Demuestra que $\sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) = \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots)$.