ESTADÍSTICA II **Curso 2016/2017**
Grado en Matemáticas

Relación 1 de problemas

1. Sea $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)' \equiv N_3(\mu, \Sigma)$, donde $\mu = (0,0,0)'$ y

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula la distribución del vector $(X_1, X_2)'$, donde $X_1 = Y_1 + Y_3$ y $X_2 = Y_2 + Y_3$.
(b) ¿Existe alguna combinación lineal de las variables aleatorias Y_i que sea independiente de X_1?

2. Sea $X = (X_1, X_2, X_3)'$ un vector aleatorio con distribución normal tridimensional con vector de medias $(0,0,0)'$ y matriz de covarianzas

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determina razonadamente cuáles de los siguientes pares de variables o vectores aleatorios son independientes y cuáles no: (i) X_1 y X_2; (ii) $(X_1, X_3)'$ y X_2; (iii) X_1 y $X_1 + 3X_2 - 2X_3$.
(b) Determina una matriz B tal que la variable aleatoria $(X_2, X_3)B(X_2, X_3)'$ tenga distribución χ^2 con 2 grados de libertad.

3. Sea $(X, Y)'$ un vector aleatorio con distribución normal bidimensional. Tanto X como Y tienen distribución normal estándar. La covarianza entre X e Y es ρ, donde $|\rho| < 1$.
(a) Determina cuál es la distribución del vector $(2X - 3Y, X + Y)'$.
(b) Determina cuál es la distribución de la variable $(X^2 - 2\rho XY + Y^2)/(1 - \rho^2)$.

4. Sean Y_1 e Y_2 dos variable aleatorias independientes con distribución normal estándar.
(a) Demuestra que el vector $Y = (Y_1, Y_2)$ tiene distribución normal bidimensional y calcula la distribución del vector $X = (2Y_1 + Y_2, Y_2 - 2Y_1)$.
(b) ¿Son las dos distribuciones marginales de X independientes? Determina una matriz B tal que $X'BX$ tenga distribución χ^2 con 2 grados de libertad.

5. Sea $(X, Y)'$ un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + 2y^2)\right].$$

Calcula la distribución condicionada de X dado $Y = y$, y la de Y dado $X = x$.

6. Sea $X = (X_1, X_2)'$ un vector aleatorio con distribución normal bidimensional con vector de medias $(1,1)'$ y matriz de covarianzas

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcula la distribución de $X_1 + X_2$ condicionada por el valor de $X_1 - X_2$.

7. Sea $X = (X_1, X_2, X_3)'$ un vector aleatorio con distribución normal tridimensional con vector de medias $(0,0,0)'$ y matriz de covarianzas

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Definamos las v.a. $Y_1 = X_1 + X_3$, $Y_2 = 2X_1 - X_2$ e $Y_3 = 2X_3 - X_2$. Calcula la distribución de Y_3 dado que $Y_1 = 0$ e $Y_2 = 1$.

8. Sea $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ un vector normal multivariante tal que las coordenadas Y_i tienen distribución $\mathrm{N}(0,1)$ y, además, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \rho$, si $i \neq j$.
(a) Escribe el vector de medias y la matriz de covarianzas del vector $X = (Y_1 + Y_2, Y_1 - Y_2)'$. ¿Son $Y_1 + Y_2$ e $Y_1 - Y_2$ dos variables aleatorias independientes?
(b) Si Σ es la matriz de covarianzas de X, ¿cuál es la distribución de la variable aleatoria $Z = X'\Sigma^{-1}X$?
(c) Si $\rho = 1/2$, calcula la varianza de la media muestral $\bar{Y} = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$ (en función del tamaño muestral n).

9. Demuestra que si X es un vector aleatorio con distribución $\mathrm{N}_k(\mu, \Sigma)$, entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ y v.a.i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_k$ con distribución χ_1^2 tales que $\|X - \mu\|^2$ se distribuye igual que $\lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_k Y_k$. En particular, deduce que si Σ es simétrica e idempotente y $\mu = 0$, entonces $\|X\|^2$ tiene distribución χ_r^2, donde r es la traza de Σ.