Tema 3

Optimización lineal. Algoritmo del simplex

José R. Berrendero

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Contenidos del tema 3

- Teorema fundamental de la programación lineal.
- Algoritmo del simplex.
- Ejemplos.
- La tabla del simplex. Pivoteo.
- Método de las dos fases.
- Optimización lineal con `R`

Teorema fundamental de la programación lineal

Por el teorema de representación, el problema lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & c^\top x \\
\text{s.a.} & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

es equivalente a:

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & c^\top \left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j d_j\right] \\
\text{s.a.} & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \\
 & \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k \\
 & \mu_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, \ell,
\end{array}
$$

donde $x_1, \ldots, x_k$ son los puntos extremos del conjunto factible y $d_1, \ldots, d_\ell$ son sus direcciones extremas.

Teorema fundamental de la programación lineal

Teorema: Consideremos un problema de optimización lineal en forma estándar. Sean $x_1, \dots, x_k$ los puntos extremos del conjunto factible y sean $d_1, \dots, d_\ell$ sus direcciones extremas. El problema tiene solución factible óptima si y solo si $c^\top d_j \geq 0$, para todo $j = 1, \dots, \ell$. Si esta condición se cumple, existe un punto extremo que es solución factible óptima del problema.

- Interpretación de la condición de existencia de solución.
- ¿Puede haber exactamente dos soluciones factibles óptimas?
- Para resolver un problema lineal se podría comprobar que tiene solución, evaluar $c^\top x_i$ para todos los puntos extremos y elegir el mejor de ellos. En la práctica este método no es útil porque el número de puntos extremos puede ser muy grande.

El algoritmo del simplex

- Es un método sistemático para pasar de un punto extremo a otro de manera que siempre mejore el objetivo.

- En cada paso se puede detectar si ya hemos llegado al óptimo o aún tenemos que pasar a otro punto extremo. También se puede detectar si el problema no tiene solución óptima.

- Pasar de un punto extremo a otro corresponde a cambiar la base B por una base nueva $\hat{B}$.

- En el simplex ambas bases difieren en un único vector de modo que las operaciones del cambio de base son relativamente sencillas.

El algoritmo del simplex

- **Solución factible básica inicial:**

$$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^\top = (\bar{x}_B^\top, \bar{x}_N^\top)^\top = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\bar{b}$ es el vector de coordenadas de b respecto a la base B.
- Valor objetivo inicial: $\bar{z} = c_B^\top B^{-1} b = c_B^\top \bar{b}$.
- Valor objetivo en cualquier otro punto factible $x = (x_B^\top, x_N^\top)^\top$:

$$\begin{aligned} z &= c_B^\top(\bar{b} - B^{-1}Nx_N) + c_N^\top x_N = \bar{z} - (c_B^\top B^{-1}N - c_N^\top)x_N \\ &= \bar{z} - \sum_{j \in N}(z_j - c_j)x_j, \end{aligned}$$

  donde $z_j = c_B^\top B^{-1} a_j := c_B^\top y_j$.
- $y_j = B^{-1}a_j \Leftrightarrow a_j = y_{1j}a_1 + \cdots + y_{mj}a_m$, es decir, y_j es el vector de coordenadas de la columna no básica a_j respecto a la base B.

El algoritmo del simplex

$$z = \bar{z} - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j.$$

- ¿Qué ocurre si $z_j - c_j \leq 0$, para todo $j \in N$?
- Supongamos que existe $k \in N$ con $z_k - c_k > 0$.
- Vamos a pasar de $\bar{x}$ a una nueva solución factible básica:

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \overset{(r)}{0}, \ldots, \hat{x}_m, 0, \ldots, \overset{(k)}{\alpha}, \ldots, 0)^\top, \quad \alpha > 0.$$

- El nuevo valor objetivo es: $\hat{z} = \bar{z} - (z_k - c_k)\alpha$.

El algoritmo del simplex

- **Criterio de entrada:** Entra a la base la variable k tal que

$$z_k - c_k = \max_{j \in N}\{z_j - c_j : z_j - c_j > 0\}.$$

- Hay que aumentar α tanto como sea posible sin salirnos del conjunto factible: $A\hat{x} = b$ es equivalente a

$$\hat{x} = \bar{x} + \alpha \begin{pmatrix} -y_k \\ e_k \end{pmatrix}, \text{ donde } y_k = B^{-1} a_k.$$

- ¿Qué ocurre si $y_k \leq 0$?

- Supongamos que $y_k \nleq 0$.

El algoritmo del simplex

- Para que $\hat{x}$ sea factible también hace falta $\hat{x} \geq 0$:

$$\hat{x}_B \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b} - \alpha y_k \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}},$$

para todo $i = 1, \ldots, m$ tal que $y_{ik} > 0$.

- El mayor valor posible de α es:

$$\alpha = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} := \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

- **Criterio de salida:** sale de la base la variable r en la que se alcanza el mínimo anterior.

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Pasamos primero a la forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & -3x_1 - x_2 - 2x_3 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 6.
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Solución factible básica inicial: $\bar{x} = (0, 0, 0, 2, 5, 6)^\top$, para la que el objetivo es $\bar{z} = 0$.

- Escribe los valores de: B, $\bar{b}$, c_B, y_j y $z_j - c_j$, para todo $j \in N$.
- ¿Es $\bar{x}$ la solución factible óptima del problema?
- ¿Qué variable k entra en la base? ¿Qué y_k le corresponde?
- ¿Qué variable r sale de la base?

Pivoteo

Necesitamos expresar los vectores a_j y b respecto a la nueva base $\hat{B} = \{a_1, a_5, a_6\}$. A esta operación se le llama **pivoteo**.

El **pivote** es el coeficiente y_{rk} correspondiente a la fila de la variable que sale y la columna de la que entra.

¿Cuál es el pivote en el ejemplo?

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 &= 6 \end{aligned}$$

Pivoteo

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6$$

- La fila r se divide por el pivote para que el coeficiente de x_k sea 1.
- Al resto de filas se les resta la fila r multiplicada por el valor adecuado para que x_k ya no aparezca en esa fila.

$$x_1 + x_2/2 + x_3/2 + x_4/2 = 1$$
$$3x_2/2 + 5x_3/2 - x_4/2 + x_5 = 4$$
$$x_2 - x_4 + x_6 = 4$$

Ejemplo

Solución factible básica actual: $\hat{x} = (1, 0, 0, 0, 4, 4)^\top$, para la que el objetivo es $\hat{z} = -3$.

- Escribe los valores de: c_B, y_j y $z_j - c_j$, para todo $j \in N$.
- ¿Es $\bar{x}$ la solución factible óptima del problema?
- ¿Qué variable k entra en la base? ¿Qué y_k le corresponde?
- ¿Qué variable r sale de la base?

Convergencia

Si en cada paso encontramos $\bar{b} = B^{-1}b > 0$, entonces $\bar{x}$ y $\hat{x}$ son puntos extremos distintos.

Como hay un número finito de puntos extremos, el algoritmo converge en un número finito de iteraciones.

Si en algún paso $\bar{b}_r = 0$, entonces $\alpha = 0$. Cambia la base, pero el punto extremo es el mismo.

Esto podría ocurrir infinitas veces y entonces el algoritmo del simplex no converge (se dice que ha ocurrido un ciclo).

Hay criterios de entrada y salida para evitar los ciclos: regla de Bland

Tabla simplex

Los elementos para efectuar cada iteración se suelen disponer ordenadamente en forma de tabla:

c	$c_B^\top$	$c_N^\top$
Variables	$x_B^\top$	$x_N^\top$
$x_B = \bar{b}$	$\mathbb{I}_{m\times m}$	$B^{-1}N$
$z - c$	0	$c_B^\top B^{-1}N - c_N^\top$

- Las columnas corresponden a variables básicas y no básicas.
- Las filas corresponden a las variables básicas.

Ejemplo

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -4x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_5 = 6 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Tabla inicial: $B = (a_3, a_4, a_5) = \mathbb{I}_{3\times 3}$

c	-4	-3	0	0	0
Variables	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$x_3 = 2$	-1	1	1	0	0
$x_4 = 6$	1	2	0	1	0
$x_5 = 6$	2	1	0	0	1
$z_j - c_j$	4	3	0	0	0

Aplica los criterios de entrada y salida a la base.

Ejemplo (primera iteración)

c	-4	-3	0	0	0
Variables	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$x_3 = 2$	-1	1	1	0	0
$x_4 = 6$	1	2	0	1	0
$x_5 = 6$	**2**	1	0	0	1
$z_j - c_j$	4	3	0	0	0

c	-4	-3	0	0	0
Variables	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$x_3 = 5$	0	$3/2$	1	0	$1/2$
$x_4 = 3$	0	$3/2$	0	1	-$1/2$
$x_1 = 3$	1	$1/2$	0	0	$1/2$
$z_j - c_j$	0	1	0	0	-2

Ejemplo (segunda iteración)

c	-4	-3	0	0	0
Variables	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$x_3 = 5$	0	3/2	1	0	1/2
$x_4 = 3$	0	**3/2**	0	1	-1/2
$x_1 = 3$	1	1/2	0	0	1/2
$z_j - c_j$	0	1	0	0	-2

c	-4	-3	0	0	0
Variables	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$x_3 = 2$	0	0	1	-1	1
$x_2 = 2$	0	1	0	2/3	-1/3
$x_1 = 2$	1	0	0	-1/3	2/3
$z_j - c_j$	0	0	0	-2/3	-5/3

La solución factible óptima es $(2, 2, 2, 0, 0)^\top$ y el valor objetivo

Actualización de la tabla

Columna de la izquierda

$$\hat{x}_i = \bar{b}_i - \alpha y_{ik} = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} y_{ik}$$

$$\hat{x}_k = \alpha = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}.$$

Valores y_{ij}

$$a_k = y_{1k} a_1 + \cdots + y_{rk} a_r + \cdots + y_{mk} a_m$$

$$a_r = -\frac{y_{1k}}{y_{rk}} a_1 - \cdots + \frac{1}{y_{rk}} a_k - \cdots - \frac{y_{mk}}{y_{rk}} a_m$$

$$a_j = \left(y_{1j} - \frac{y_{1k}}{y_{rk}} y_{rj} \right) a_1 + \cdots + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} a_k + \cdots + \left(y_{mj} - \frac{y_{mk}}{y_{rk}} y_{rj} \right) a_m$$

Actualización de la tabla

Valores y_{ij}

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{ik}, \quad \text{si } i \neq r,$$
$$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$$

Última fila:

$$\begin{aligned}
\hat{z}_j - \hat{c}_j &= \sum_{r \neq i=1}^{m} c_i \hat{y}_{ij} + c_k \hat{y}_{rj} - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(y_{ij} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} y_{ik} \right) + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} - c_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i y_{ij} - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \sum_{i=1}^{m} c_i y_{ik} + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k)
\end{aligned}$$

Actualización de la tabla

En resumen:

- La fila del pivote (fila r) se divide por el pivote (y_{rk}). Así se consigue que $\hat{y}_{rk} = 1$.
- A la fila i se les resta la fila r actualizada y multiplicada por y_{ik}. Así se consigue que $\hat{y}_{ik} = 0$.
- A la última fila se le resta la fila r actualizada y multiplicada por $z_k - c_k$. Así se consigue que $\hat{z}_k - \hat{c}_k = 0$

Método de las dos fases

Es un método útil para:

- Encontrar una solución factible básica inicial.
- Detectar si el conjunto factible es vacío.
- Detectar si hay restricciones redundantes.

Fase 1: Se introducen variables artificiales y se minimiza su suma.

Fase 2: Si la suma óptima no es cero entonces el problema original no es factible. En caso contrario las variables artificiales habrán abandonado la base y dispondremos de una base inicial de variables *legítimas*.

Fase 1

Si $e = (1, \ldots, 1)^\top$, se resuelve el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & e^\top x^a \\ \text{s.a.} & Ax + \mathbb{I}x^a = b \\ & x \geq 0,\ x^a \geq 0 \end{array}$$

- Variables artificiales son diferentes a variables de holgura.
- Este problema tiene una solución factible básica obvia en la que las variables básicas son las artificiales.
- Sea $(\bar{x}, \bar{x}^a)$ el óptimo al final de la fase 1.

Fase 2

Caso 1: $\bar{x}^a \neq 0$, el problema original no es factible (¿por qué?).

Caso 2: $\bar{x}^a = 0$, pueden ocurrir a su vez dos casos

- **Ninguna variable artificial es básica.** En este caso se eliminan de la tabla las columnas de las variables artificiales. Se calculan los valores $z_j - c_j$ y se continúa como en el método simplex habitual.
- **Hay alguna variable artificial en la base al nivel 0 (degeneración).** Se busca en la fila un pivote para poder sustituirla por una variable *legítima*. Se calculan los valores $z_j - c_j$ y se continúa como en el método simplex habitual.

Ejemplo

Problema original:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Problema a resolver en la fase 1:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x_1^a + x_2^a \\ \text{s.a.} & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_1^a = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_2^a = 3 \\ & x_i \geq 0,\ x_i^a \geq 0 \end{array}$$

Fase 1

c	0	0	0	1	1
Variables	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
$x_1^a = 4$	2	1	2	1	0
$x_2^a = 3$	**3**	3	1	0	1
$z_j - c_j$	5	4	3	0	0

c	0	0	0	1	1
Variables	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
$x_1^a = 2$	0	-1	**4/3**	1	-2/3
$x_1 = 1$	1	1	1/3	0	1/3
$z_j - c_j$	0	-1	4/3	0	-5/3

c	0	0	0	1	1
Variables	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
$x_3 = 3/2$	0	-3/4	1	3/4	-1/2
$x_1 = 1/2$	1	5/4	0	-1/4	1/2

Fase 2

- Partimos de la solución factible básica en la última tabla de la fase 1.
- Se eliminan las variables artificiales.
- Se actualizan la primera y la última fila de la tabla.

c	4	1	1
Variables	x_1	x_2	x_3
$x_1 = 1/2$	1	**5/4**	0
$x_3 = 3/2$	0	-3/4	1
$z_j - c_j$	0	13/4	0

Para las variables básicas $z_j - c_j = 0$. Además,

$$z_2 - c_2 = (4, 1)\begin{pmatrix} 5/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} - 1 = 13/4.$$

Fase 2

c	4	1	1
Variables	x_1	x_2	x_3
$x_2 = 2/5$	$4/5$	1	0
$x_3 = 9/5$	$3/5$	0	1
$z_j - c_j$	-13/5	0	0

La solución factible óptima del problema viene dada por
$\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 2/5$ y $\bar{x}_3 = 9/5$
y el valor objetivo óptimo es $\bar{z} = 11/5$.

Ejemplo

Aplica el método de las dos fases para resolver:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \qquad & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
\text{s.a.} \qquad & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& 2x_2 + 3x_3 = 10 \\
& x_3 \leq 2 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$