Tema 1
Introducción

José R. Berrendero

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Información de contacto

José Ramón Berrendero Díaz

Correo electrónico: joser.berrendero@uam.es

Teléfono: 91 497 66 90

Despacho: Módulo 08 - Despacho 210

Página web: http://www.uam.es/joser.berrendero

Temario

1. Introducción.
2. Conjuntos convexos.
3. Optimización lineal. El algoritmo del simplex.
4. Funciones convexas y optimización convexa.
5. Dualidad y condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.
6. Aplicaciones.

Bibliografía básica

- Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J. y Sherali, H. D. (2011). *Linear programming and network flows*. John Wiley & Sons.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. y Shetty, C. M. (2013). *Nonlinear programming: theory and algorithms*. John Wiley & Sons.
- Boyd, S. y Vandenberghe, L. (2009). *Convex optimization*. Cambridge university press.

Contenidos del Tema 1

- Elementos de un problema de optimización.
- Problemas lineales en forma canónica y estándar.
- Problemas convexos.

Ejemplo

Una empresa produce pintura para interiores y para exteriores a partir de dos materias primas M1 y M2. La siguiente tabla resume las cantidades necesarias de cada una por tonelada de pintura, la máxima cantidad disponible diaria y los beneficios por la venta (para cada tonelada de pintura).

Materia prima	Pint. exteriores	Pint. interiores	Disponibilidad
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Beneficio	5	4	

Según un estudio de mercado, la demanda diaria de pintura de interiores es, como mucho de 2 t y la de interiores no excede a la de exteriores en más de 1 t.

¿Que cantidad de cada tipo de pintura se debe fabricar diariamente para maximizar el beneficio?

Elementos de un problema de optimización

- Variables de decisión que hay que determinar:
  producción diaria de pintura para exteriores (x_1) y de pintura para interiores (x_2).

- Una función objetivo que hay que optimizar:
  el beneficio ($5x_1 + 4x_2$)

- Unas restricciones que se deben satisfacer necesariamente:
  disponibilidad de materias primas y producir menos que la cantidad máxima demandada.

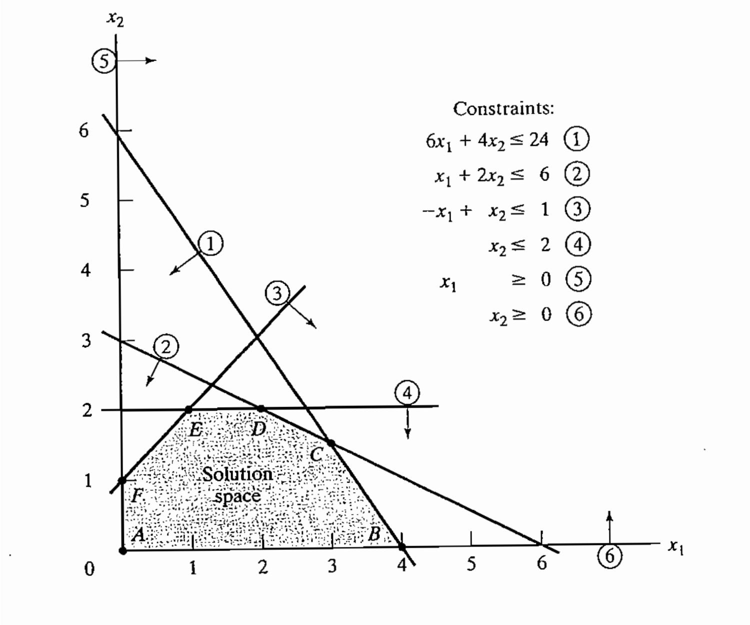
Ejemplo

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & 5x_1 + 4x_2 \\
\\
\text{s.a.} & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & x_2 \leq 2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
\end{array}
$$

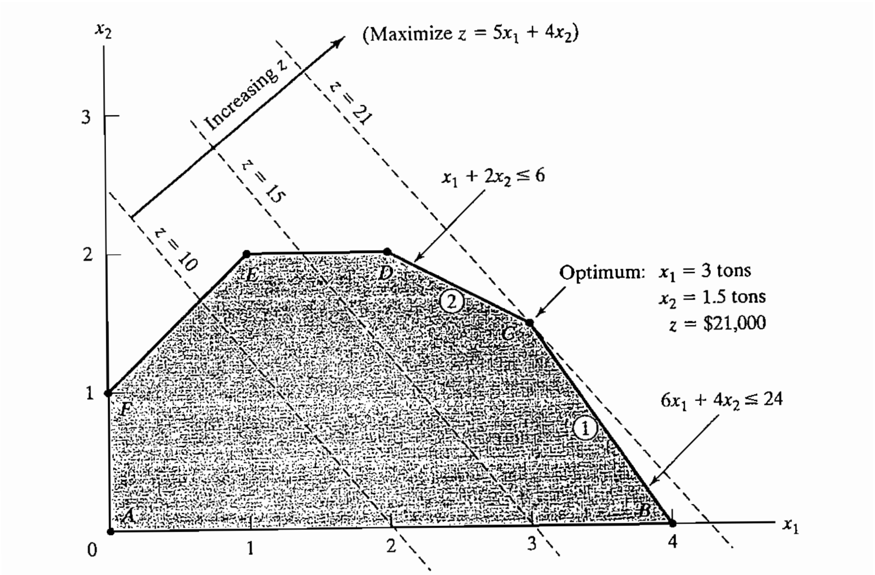
Elementos de un problema de optimización

- Cualquier punto que verifique todas las restricciones se llama **solución factible**.
- El **conjunto factible** es el conjunto de todas las soluciones factibles (en el dominio de la función objetivo).
- La **solución factible óptima** es la solución factible para la que se optimiza el objetivo.
- Un **problema** de optimización es **lineal** si tanto la función objetivo como las funciones que definen las restricciones son lineales.

Solución gráfica



Solución gráfica



Observaciones

- En un problema lineal, el conjunto factible es un conjunto convexo (un poliedro).
- La solución coincide con uno de los vértices del conjunto factible.
- El vértice está definido por dos restricciones que se satisfacen con igualdad (saturadas).
- La propiedad anterior es la base del algoritmo del simplex.
- Un problema lineal puede tener una solución factible óptima única, puede tener infinitas soluciones o puede no tener solución.

Ejemplos

Resuelve gráficamente los problemas lineales siguientes:

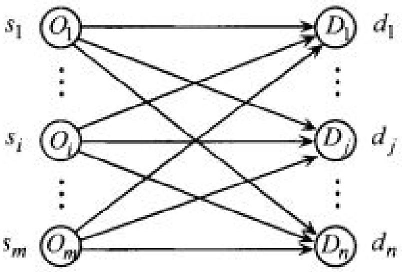
$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Problema del transporte

En m fábricas se pueden producir las cantidades $s_1, \ldots, s_m$ de un producto. La demanda de ese producto en n destinos es $d_1, \ldots, d_n$. Se supone que $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$. El coste de traslado de cada unidad de producto desde la fábrica i hasta el destino j es c_{ij}.



El problema es determinar qué cantidades hay que trasladar desde i hasta j de forma que se minimice el coste total del transporte.

Problema de asignación

Cada trabajo para el mejor trabajador posible

Hay que asignar n tareas a n trabajadores. Si se asigna la tarea i al trabajador j se incurre en un coste de c_{ij}.

El problema es asignar las tareas a los trabajadores de manera que se minimice el coste.

Flujo de coste mínimo en una red

Se considera una red con n nodos $i = 1, \ldots, n$.

En cada nodo hay una oferta $b_i > 0$ (demanda si $b_i < 0$).

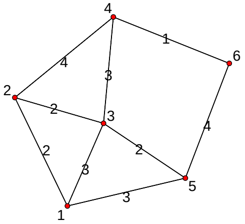
La red está equilibrada: $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$.

Asociado a cada arco (i, j) hay un coste unitario de flujo c_{ij}.

Problema: determinar el flujo $x_{ij} \geq 0$ de coste mínimo tal que el flujo neto (cantidad de salida menos cantidad de llegada) en cada nodo sea b_i.

Flujo de coste mínimo en una red

El grafo representa una red ferroviaria de seis ciudades. Hay dos locomotoras en el nodo 2 y una más en el nodo 1. Se requieren tres locomotoras en el 6. En cada arco aparece el coste de trasladar una locomotora entre cada dos nodos.



Plantear el problema de cómo trasladar las locomotoras con el mínimo coste.

Forma estándar de un problema lineal

Un problema lineal siempre se puede escribir en la siguiente **forma estándar**:

$$\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.a.} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & \ldots \\
 & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
 & x_1 \geq 0, \ \cdots, x_n \geq 0
\end{array}$$

Matricialmente:

$$\begin{array}{lr}
\text{minimizar} & c^\top x \\
\text{s.a.} & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}$$

Para escribir un problema en forma estándar

- Maximizar una función f equivale a minimizar $-f$.
- Si una restricción es

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n \leq b_j,$$

se añade una **variable de holgura** $x_{n+1} \geq 0$ para obtener

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + x_{n+1} = b_j.$$

- Si una restricción es

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n \geq b_j,$$

se multiplica por -1 y se aplica el punto anterior.
- Si una variable x_i no está restringida a tomar valores positivos se expresa como diferencia de dos variables positivas:

$$x_i = x_i' - x_i'', \quad x_i' \geq 0, \ x_i'' \geq 0.$$

Escribe en forma estándar

$$\begin{array}{lr} \text{maximizar} & 3x_1 + 2x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \geq 5 \\ & x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{minimizar} & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 - 2x_2 = 0 \\ & x_2 \geq 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{maximizar} & x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_3 = 1 \\ & x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Forma canónica de un problema lineal

Un problema lineal siempre se puede escribir en la siguiente **forma canónica**:

Problemas de minimización:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^\top x \\ \text{s.a.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Problemas de maximización:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & c^\top x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Problemas de optimización convexos

Son problemas de minimización en los que la función objetivo es convexa, las funciones que definen las restricciones de desigualdad también son convexas y las restricciones de igualdad son lineales.

Formalmente,

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & f(x) & \\ \text{s.a.} & f_i(x) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\ & a_i^\top x = b_i, & i = 1, \ldots, p, \end{array}$$

donde las funciones $f, f_1, \ldots, f_n$ son convexas.

Si el problema es de maximización, para que el problema sea convexo la función objetivo debe ser cóncava.

Ejemplo: optimización de una cartera de acciones

Un inversor quiere decidir qué proporción x_i de los fondos disponibles invierte en n posibles acciones cuyos beneficios r_i, con $i = 1, \ldots, n$, son variables aleatorias tales que $\mathbb{E}(r_i) = \mu_i$, $\mathrm{Var}(r_i) = \sigma_i^2$ y

$$\mathrm{Cov}(r_i, r_j) = \sigma_{ij} = \mathbb{E}[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)], \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

El beneficio obtenido es $R = \sum_{i=1}^n x_i r_i$.

Beneficio esperado:

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i := x^\top \mu.$$

Varianza (riesgo) del beneficio:

$$\mathrm{Var}(R) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} = x^\top \Sigma x.$$

Ejemplo: optimización de una cartera de acciones

El objetivo general es maximizar el beneficio con el menor riesgo posible.

Un posible problema a resolver para encontrar la cartera óptima:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x^\top \mu - \lambda x^\top \Sigma x \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x \geq 0, \end{array}$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro que refleja la aversión al riesgo.

Como Σ es semidefinida positiva, puede demostrarse que la función objetivo es cóncava, mientras que las restricciones son lineales. Se trata de un **problema de optimización convexo** (cuadrático).