Relación 5 de problemas

1. Considera el problema max $x_1 + x_2^2 + x_3$ sujeto a $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq b$, donde $0 < b < 1/2$.

(a) Resuélvelo en función de b utilizando las condiciones KKT.
(b) Sea $F(b)$ la función que da el valor objetivo óptimo en función de b. ¿Qué relación existe entre esta función y los multiplicadores de KKT?

2. Sean f y g_i $(i = 1,\dots,m)$ funciones con derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^n$. Consideremos el problema

$$\text{(P)} \quad \min f(x) \ \text{ s.a. } \ g_i(x) = 0, \ \ i = 1,\dots,m.$$

Sea $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto factible para (P) tal que existen números reales $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ para los que

$$\nabla f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) = 0.$$

Supongamos que f es convexa, g_i es convexa si $\lambda_i > 0$ y g_i es cóncava si $\lambda_i < 0$. Demuestra que $\overline{x}$ es un mínimo global de (P).

3. Considera el problema

$$\min x_1 + x_2 - x_3 \text{ s.a. } \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 27, \ \ x_1 + x_2 \leq 10.$$

(a) Calcula todos los puntos que satisfacen las condiciones KKT correspondientes al problema anterior.
(b) ¿Podemos asegurar que los puntos calculados en el apartado anterior son mínimos globales del problema? ¿Existe algún mínimo global que no verifique las condiciones KKT?

4. Considera el problema

$$\max x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 \text{ s.a. } \ x_1 + x_2 \geq 1.$$

(a) Calcula todos los puntos que satisfacen las condiciones KKT correspondientes al problema anterior.
(b) ¿Podemos asegurar que los puntos calculados en el apartado anterior son máximos globales del problema? ¿Existe algún máximo global que no verifique las condiciones KKT?

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ convexa y diferenciable. Considera el problema de minimizar $f(x_1, x_2)$ sujeto a $x_1 \geq x_2$. Supongamos que el problema tiene solución factible óptima.

(a) Escribe las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) correspondientes al problema anterior. ¿Qué condiciones debe cumplir $\nabla f(x_1, x_2)$ para que el punto (x_1, x_2) verifique las condiciones KKT? Distingue los casos $x_1 = x_2$ y $x_1 \neq x_2$.

(b) Determina razonadamente si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:
   (1) Si un punto verifica las condiciones KKT entonces es la solución factible óptima de este problema.
   (2) La solución factible óptima de este problema podría no verificar las condiciones KKT.

(c) Si $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_1 + \beta x_2$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, determina todos los valores de α y β para los que la solución del problema tiene sus dos coordenadas iguales.

6. Considera el problema de minimizar $f(x)$ s.a. $f_i(x) \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$, donde todas las funciones son convexas y diferenciables. Sean $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ tales que satisfacen las condiciones KKT. Demuestra que $\nabla f(\bar{x})^\top (x - \bar{x}) \geq 0$, para cualquier punto factible x del problema. (Sabemos que esta condición implica que $\bar{x}$ es la solución óptima.)

7. Sea $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$. Considera el problema de maximizar $f(x) = c^\top x$ s.a. $x^\top x \leq 1$. Calcula los puntos que verifican las condiciones KKT del problema y determina su máximo global.

8. Demuestra la desigualdad de dualidad débil ($\bar{d} \leq \bar{p}$) en los casos $\bar{p} = -\infty$ (el problema primal es no acotado) y $\bar{d} = \infty$ (el problema dual es no acotado).

9. Sean $a_i \in \mathbb{R}^n$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$. Considera el problema de minimizar una función lineal a trozos:

$$\text{Minimizar } \max_{i=1,\ldots,m} (a_i^\top x + b_i), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Definiendo $y_i = a_i^\top x + b_i$, este problema se puede expresar de forma equivalente como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \displaystyle\max_{i=1,\ldots,m} y_i \\ \text{sujeto a} & \\ & a_i^\top x + b_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Demuestra que el correspondiente problema dual es

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & b^\top u \\ \text{sujeto a} & \\ & A^\top u = 0 \\ & \mathbf{1}^\top u = 1 \\ & u \geq 0, \end{array}$$

donde A es una matriz cuyas filas son los vectores $a_1, \ldots, a_m$. (Conclusión: la minimización de una función lineal a trozos se puede reducir a un problema de optimización lineal.)

10. Considera el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & \\ & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,2 \end{array}$$

(a) Plantea el método de las dos fases con variables artificiales y lleva a cabo una iteración del mismo.
(b) Resuelve el problema utilizando el algoritmo simplex-dual.

11. Se dispone de dos complejos vitamínicos (marcas 1 y 2) cuyos costes por unidad de peso son 30 y 40 euros, respectivamente. Se desea asegurar la ingesta de un mínimo de 36 unidades de vitamina A al día, 28 unidades de vitamina C y 32 de vitamina D. Supongamos que la marca 1 proporciona (por unidad de peso) 2 unidades de vitamina A, 2 de vitamina C y 8 de vitamina D. La marca 2 proporciona 3, 2 y 2 unidades respectivamente.

(a) Plantea el problema de optimización para calcular la combinación de coste más bajo que garantice la ingesta mínima diaria de las tres vitaminas.
(b) Lleva a cabo una iteración del algoritmo simplex-dual para resolver este problema.

12. Considera el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,\dots,3 \end{array}$$

(a) Escribe el problema en forma estándar. Escribe la tabla inicial del algoritmo simplex y lleva a cabo una iteración del algoritmo. ¿Se ha alcanzado con esta iteración la solución factible óptima?
(b) Escribe el problema dual, resuélvelo gráficamente y utiliza la solución del dual para calcular la solución del primal.
(c) Escribe la primera tabla del algoritmo simplex-dual y lleva a cabo una iteración del algoritmo. ¿Se ha alcanzado con esta iteración la solución factible óptima?

13. Considera el problema

$$\text{Minimizar } x^2 + 1, \quad \text{s.a. } (x-2)(x-4) \leq 0.$$

(a) Determina el conjunto factible, el valor óptimo y la solución factible óptima del problema.
(b) Calcula la correspondiente función dual.
(c) Plantea y resuelve el problema dual. ¿Hay dualidad fuerte? ¿Se verifica la condición de Slater?