Relación 4 de problemas

1. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, y sea $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función definida sobre él.

(a) Demuestra que una condición necesaria, pero no suficiente, para que f sea convexa es que, para cada número real α, el conjunto $\{x \in D : f(x) \leq \alpha\}$ sea convexo.
(b) Demuestra que una condición necesaria y suficiente para que f sea convexa es que el epigrafo de f sea un conjunto convexo.

2. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cuasiconvexa si los conjuntos $S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$ son convexos para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestra que f es cuasiconvexa si y solo si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0,1]$ se verifica $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \text{máx}\{f(x), f(y)\}$.

3. Comprueba si las siguientes funciones son convexas o cóncavas (o ni convexas ni cóncavas) en su dominio de definición:

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2$.
(b) $f(x_1, x_2) = 8x_1 - 6x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$.
(c) $f(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, x_2\}$.
(d) $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2)^2$.

4. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa.

(a) (Lema de las tres cuerdas) Sean $x, y, z \in I$ con $x < y < z$, demuestra

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Deduce que la función $g(x) = (f(x) - f(a))/(x - a)$, definida para $x \neq a$, es creciente.
(b) Sea c un punto del interior de I. Demuestra que existen las derivadas por la derecha y por la izquierda de f en c y verifican $f'_-(c) \leq f'_+(c)$.
(c) Sean a y b puntos del interior de I con $a < b$ entonces, por el apartado (b), existen las derivadas por la derecha y por la izquierda de f en a y b. Demuestra que se verifica:

$$f'_-(a) \leq f'_+(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_-(b) \leq f'_+(b).$$

(d) Si f es derivable, demuestra que f es convexa si y solo si f' es creciente.
(e) Si f es derivable dos veces, demuestra que f es convexa si y solo si $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in I$.

5. Utiliza la desigualdad de Jensen (aplicada a una función convexa adecuada) para demostrar que si $x_1, \ldots, x_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, entonces

$$\prod_{i=1}^{m} x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i.$$

6. Una función f es log-convexa si es positiva y $\log f$ es convexa. Demuestra que toda función log-convexa es convexa. Demuestra que la función gamma, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$, $x > 0$, es log-convexa (*Indicación: usa la desigualdad de Hölder*).

7. Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ convexa y derivable. Demuestra que la función que da los promedios de f sobre los intervalos $[0,x]$, es decir $F(x) = (1/x)\int_0^x f(t)dt$, también es convexa. (*Indicación: calcula $F''(x)$ y exprésala en la forma $F''(x) = (2/x^3)\int_0^x g(x,t)dt$, para cierta función $g(x,t)$*).

8. Considera el problema $\min f(x)$ s.a. $x \geq 0$, donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa y diferenciable. Demuestra que $\bar{x}$ es la solución factible óptima de este problema si y solo si para todo $i = 1\ldots,n$ se cumple $\bar{x}_i \geq 0$, $f_i'(\bar{x}) \geq 0$ y $\bar{x}_i f_i'(\bar{x}) = 0$.

9. Sean $f_1,\ldots,f_m$ funciones convexas definidas sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ convexo y supongamos que no existe $x \in D$ tal que $f_1(x) < 0,\ldots,f_m(x) < 0$.

(a) Demuestra que el conjunto

$$S = \{(y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m : \text{existe } x \in D \text{ con } f_1(x) < y_1,\ldots,f_m(x) < y_m\}$$

es convexo.

(b) Demuestra que existen escalares no negativos $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, no todos nulos, tales que $\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_m f_m(x) \geq 0$ para todo $x \in D$.

10. Un subgradiente de una función $f : D \to \mathbb{R}$ en el punto $\bar{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ es un vector $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) \geq f(\bar{x}) + u^\top(x - \bar{x})$, para todo $x \in D$.

(a) Demuestra que el conjunto de subgradientes de una función en un punto (la subdiferencial de la función en ese punto) es un conjunto convexo.

(b) Demuestra que si $f : D \to \mathbb{R}$ es convexa y diferenciable en un conjunto abierto y convexo D, entonces el único subgradiente de f en cualquier $\bar{x} \in D$ es $\nabla f(\bar{x})$.

(c) Determina los subgradientes de la función $f(x) = \|x\|$, donde $\|\cdot\|$ es cualquier norma procedente de un producto escalar.

(d) Sea $f : S \to \mathbb{R}$, con $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Considera el problema $\min f(x)$ s.a. $x \in S$. Demuestra que $\bar{x} \in S$ es la solución de este problema si f tiene un subgradiente u en $\bar{x}$ tal que $u^\top(x - \bar{x}) \geq 0$, para todo $x \in S$. (Si f es convexa el recíproco también es cierto pero la demostración, basada en los teoremas de separación de conjuntos convexos, es más complicada.)