Relación 3 de problemas

1. Resuelve el siguiente problema de optimización lineal utilizando el algoritmo del simplex:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & x_2 - 3x_3 + 2x_5 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\ & -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ & -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

2. Una fábrica usa tres máquinas para producir dos tipos de productos. La siguiente tabla indica el número de horas que cada máquina necesita para producir una unidad de cada producto y el tiempo total de disponibilidad para cada máquina durante el período de producción. Los directivos de la fábrica quieren maximizar el número total de productos fabricados, pero quieren que la cantidad de producto 1 sea al menos un tercio del total de la producción.

	Tiempo necesario		
Máquina	Producto 1	Producto 2	Tiempo disponible
Torno	1.1	2.0	1000
Lijadora	3.0	4.5	2000
Enceradora	2.5	1.3	1500

(a) Plantea el correspondiente problema de optimización.
(b) Expresa este problema en una forma adecuada para poder resolverlo aplicando el algoritmo del simplex. A continuación, realiza una sola iteración de este algoritmo.

3. Consideremos el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

(a) Calcula una dirección extrema y dos puntos extremos del conjunto factible.
(b) Determina unos coeficientes c_1, c_2, c_3 de la función objetivo tales que el problema no tenga solución óptima finita.
(c) Determina unos coeficientes c_1, c_2, c_3 de la función objetivo tales que el problema tenga infinitas soluciones óptimas.

4. Dado un problema de optimización lineal mín $c^\top x$ sujeto a $Ax = b$, $x \geq 0$, ¿es posible conseguir un problema en el que no exista solución óptima finita cambiando únicamente el vector b? Responde a la misma pregunta para el vector c.

5. Consideremos el problema de optimización

$$\min z = c^\top x \text{ sujeto a } x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

donde $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ y A es una matriz $m \times n$ de rango m.

(a) Supongamos que $S \neq \emptyset$ y que para un cierto vector no nulo $d \geq 0$, $d \in \mathbb{R}^n$, se verifica $Ad = 0$. ¿Puede asegurarse entonces que existe un vector $c \neq 0$ tal que el problema tiene solución óptima no acotada?

(b) ¿Puede ocurrir que una solución óptima tenga más de m componentes estrictamente positivas?

(c) Si $\bar{x} \in S$ tiene exactamente m componentes estrictamente positivas, ¿puede asegurarse que $\bar{x}$ es un punto extremo de S?

6. Consideremos el problema: maximizar $x_1 + 3x_2 + x_3$, sujeto a $Ax \leq b$, $x \geq 0$, siendo A una matriz 2×3, $b \in \mathbb{R}^2$ $(b \geq 0)$ y $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$. Se resuelve este problema pasándolo a forma estándar (para lo cual se añaden dos variables de holgura x_4 y x_5) y aplicando el algoritmo del simplex. La tabla final del algoritmo ha sido:

c_j	-1	-3	-1	0	0
Variables	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$x_1 = 12$	1	4	3	1	0
$x_5 = 16$	0	6	2	1	1

(a) Calcula la matriz A y el vector b.

(b) Supongamos que el vector de costes $c = (1, 3, 1, 0, 0)^\top$ se reemplaza por $\hat{c} = c + \lambda\gamma$, siendo λ un número no negativo y $\gamma = (1, 1, 1, 0, 0)^\top$. ¿Para qué valores de λ sigue siendo solución óptima $x = (12, 0, 0, 0, 16)^\top$?

7. Considera la siguiente tabla del simplex para un problema lineal de minimización (a, b, c, d y e denotan aquí parámetros reales):

c_j	0	b	e	0	0
Variables	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$x_1 = a$	1	c	3	0	0
$x_4 = 2$	0	d	2	1	0
$x_5 = 4$	0	-1	1	0	1

Determina condiciones sobre los parámetros a, b, c, d y e de manera que

(a) La tabla corresponda a una solución óptima.

(b) La tabla indique la situación de *solución óptima no acotada*.

(c) La tabla corresponda a una solución óptima y la región factible no sea acotada.

8. Demuestra que, en el algoritmo del simplex, una variable que sale de la base en una determinada iteración no puede volver a entrar en la base en la iteración inmediatamente posterior.

9. Estudia cómo puede detectarse mediante el algoritmo del simplex la existencia de "alternativa óptima", es decir, la existencia de más de una solución óptima.

10. En una iteración del algoritmo del simplex aplicado a un problema lineal de minimización se obtiene la tabla siguiente:

	-2	3	0	0
	x_1	x_2	x_3	x_4
$x_3 = 4$	c	0	1	$1/5$
$x_1 = a$	d	e	0	2
	f	-1	g	h

El valor del objetivo del problema en la solución básica factible a la que corresponde la tabla anterior es -6. Las variables x_3 y x_4 son de holgura y formaban la base inicial.
(a) Calcula el valor de las siete incógnitas a, c, d, e, f, g y h.
(b) ¿Corresponde la tabla a una solución básica factible óptima?

11. Se consideran los dos problemas siguientes:

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= c^t x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= c^t x \\ Ax &= b + \theta d \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

donde A es una matriz $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^m$ y $\theta \geq 0$. Dada una solución básica óptima para el primer problema, $\overline{x}$, correspondiente a una base B, ¿para qué valores de θ seguirá siendo B la base correspondiente a una solución básica óptima para el segundo problema?

12. Al final de la primera fase de la resolución de un algoritmo del simplex se ha obtenido la siguiente tabla:

Variables	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a	x_2^a	x_3^a
$x_3 = 0$	0	0	1	3	0	0	-1/3	0	2/3
$x_2 = 5$	0	1	0	16	1/2	-2	-7/3	3	8/3
$x_1 = 7/3$	1	0	0	14/3	1/3	-1/3	-5/9	1	7/9

Calcula la matriz A y el vector b del sistema de restricciones inicial (las variables x_i^a son artificiales).