Investigación Operativa **Curso 2015/2016**
Grado en Matemáticas

Relación 2 de problemas

1. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Dado $\epsilon \geq 0$,la dilatación de S se define como $S_\epsilon = \{x : d(x, S) \leq \epsilon\}$, donde $d(x, S) = \text{ínf}_{y \in S} \|x - y\|$. La erosión de S se define como $S_{-\epsilon} = \{x : B(x, \epsilon) \subset S\}$, donde $B(x, \epsilon)$ es la bola cerrada con centro x y radio ϵ. Demuestra que si S es convexo, entonces tanto S_ϵ como $S_{-\epsilon}$ son conjuntos convexos.

2. Sean $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Considera los puntos que están más cerca de x_0 que de otro de los puntos x_i, es decir,

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \|x - x_i\|, \, i = 1, \ldots, k\}.$$

El conjunto V se llama región de Voronoi de x_0 respecto de $x_1, \ldots, x_k$.

(a) Demuestra que V es un poliedro. Determina una matriz A y un vector b tales que $V = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.
(b) Recíprocamente, dado un poliedro P con interior no vacío, determina $x_0, \ldots, x_k$ de manera que P sea la región de Voronoi de x_0 respecto de $x_1, \ldots, x_k$.

3. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío y sean $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$.

(a) Demuestra que $(\lambda_1 + \lambda_2)S = \lambda_1 S + \lambda_2 S$.
(b) Determina razonadamente si es cierta o no la propiedad del apartado anterior cuando el conjunto S no es convexo.

4. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado tal que si $x_1, x_2 \in S$, entonces $(x_1 + x_2)/2 \in S$. Demuestra que S es convexo.

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de n vectores independientes e idénticamente distribuidos, con distribución uniforme en el cuadrado unidad $S = [0, 1]^2$. Consideramos la variable aleatoria N_n correspondiente al número de vértices del cierre convexo de $X_1, \ldots, X_n$.

(a) Escribe una función en R que dos argumentos n y B, y que dé como resultado un vector con B realizaciones de la variable N_n.
(b) Genera $B = 10000$ realizaciones de la v.a. N_n para $n = 100$. Calcula la media y la desviación típica de los valores obtenidos y representa el correspondiente histograma. ¿A qué distribución se parece el histograma obtenido?

6. Demuestra que si $S \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces $\text{int}(S)$ y $\bar{S}$ también son conjuntos convexos.

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo con $\text{int}(S) \neq \emptyset$. ~~Demuestra $\text{int}(\bar{S}) = \text{int}(S)$.~~ Demuestra $\bar{S} = \overline{\text{int}(S)}$.

8. Da un ejemplo para probar que el cierre convexo, $\text{conv}(S)$, de un conjunto cerrado no es necesariamente cerrado. Utiliza el teorema de Caratheodory para probar que si S es compacto, entonces $\text{conv}(S)$ es compacto.

9. Encuentra un ejemplo que muestre que la implicación

$$S_1 \text{ y } S_2 \text{ son convexos cerrados } \Rightarrow S_1 + S_2 \text{ es cerrado,}$$

no es cierta en general. Prueba que esta implicación es cierta cuando al menos uno de los dos conjuntos S_1 o S_2 se supone compacto.

10. Demuestra que un conjunto convexo cerrado es igual a la intersección de todos los semiespacios cerrados que lo contienen.

11. Sean S_1 y S_2 dos conjuntos convexos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ tales que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Demuestra que existe $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, tal que

$$\text{ínf}\{p^\top x : x \in S_1\} \geq \sup\{p^\top x : x \in S_2\}.$$

Si, además, los conjuntos son cerrados y uno de ellos es acotado, demostrar que existe $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, y $\epsilon > 0$ tales que

$$\text{ínf}\{p^\top x : x \in S_1\} \geq \epsilon + \sup\{p^\top x : x \in S_2\}.$$

Sugerencia: Para la primera parte, considera $S = \{x_1 - x_2 : x_1 \in S_1,\ x_2 \in S_2\}$ y aplica algún teorema de separación.

12. La función soporte de un conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}^n$ se define de la forma siguiente:

$$S_C(p) = \sup\{p^\top x : x \in C\}.$$

Sean C y D dos conjuntos convexos y compactos. Demuestra que $C = D$ si y solo si las correspondientes funciones soporte son iguales.

13. Demuestra que si x es una solución factible básica de $S = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$, entonces es un punto extremo de S.

14. Halla los puntos extremos de los siguientes conjuntos:

(a) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 \geq 2, -x_1 + x_2 = 4, x_1, x_2 \geq 0\}$.
(b) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \leq 10, -x_1 + 2x_2 = 4, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$.