Cierre e interior de conjuntos convexos

José R. Berrendero*

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid

Teorema 1. *Un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^n$ tiene interior relativo no vacío.*

Demostración. Sea A el menor subespacio afín que contiene a S. Supongamos que la dimensión afín de S es r de manera que existen $x_0, x_1, \ldots, x_r$ en S tales que

$$x \in A \Leftrightarrow x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i, \quad \text{con } \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1.$$

Definamos $x = (x_0 + \cdots + x_r)/(r+1) \in S \cap A$. Las coordenadas de un punto respecto a la base afín $x_0, \ldots, x_r$ son funciones continuas. Dado que las coordenadas de x son positivas, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, cualquier punto $y \in B(x, \epsilon) \cap A$ se puede escribir de la forma

$$y = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i, \quad \text{con } \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1, \ \lambda_i > 0, \ i = 1, \ldots, r.$$

Por lo tanto $y \in S$. Dado que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap A \subset S$, se verifica que x pertenece al interior relativo de S. □

Teorema 2. *El interior de un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ es vacío si y solo si el conjunto está contenido en un hiperplano de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Dado que el interior de un hiperplano es vacío, también lo es el de cualquiera de sus subconjuntos. Por otra parte, si S no está contenido en un hiperplano, su dimensión afín es n, y por tanto su interior y su interior relativo coinciden. Por el teorema 1, el interior de S no es vacío. □

Teorema 3. *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo con $int(S) \neq \emptyset$. Sea $x_1 \in \bar{S}$, $x_2 \in int(S)$. Entonces, $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in int(S)$, para todo $\theta \in [0, 1)$.*

Demostración. Sea $y = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$. Como $x_2 \in \mathrm{int}(S)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x_2, \epsilon) \subset S$. Sea $\tilde{y} \in B(y, \eta)$, con $\eta = \epsilon(1-\theta)$. Como $x_1 \in \bar{S}$, existe $\tilde{x}_1 \in S$ tal que

$$\|x_1 - \tilde{x}_1\| < \frac{\eta - \|\tilde{y} - y\|}{\theta} \Leftrightarrow \|y - \tilde{y}\| + \theta\|x_1 - \tilde{x}_1\| < \eta.$$

Sea $\tilde{x}_2 = (\tilde{y} - \theta\tilde{x}_1)/(1-\theta)$ (o, equivalentemente, $\tilde{y} = \theta\tilde{x}_1 + (1-\theta)\tilde{x}_2$). Se verifica

$$\|x_2 - \tilde{x}_2\| = \frac{\|y - \theta x_1 - \tilde{y} + \theta\tilde{x}_1\|}{1-\theta} \leq \frac{1}{1-\theta}(\|y - \tilde{y}\| + \theta\|x_1 - \tilde{x}_1\|) < \frac{\eta}{1-\theta} = \epsilon.$$

Por lo tanto tenemos que $\tilde{x}_2 \in S$ y por la convexidad de S, $\tilde{y} \in S$.

Hemos probado que existe $\eta > 0$ tal que $B(y, \eta) \subset S$ lo que implica que $y \in \mathrm{int}(S)$. □

*Correo electrónico: joser.berrendero@uam.es

Teorema 4. *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo, entonces tanto int(S) como $\bar{S}$ son conjuntos convexos.*

Demostración. Ejercicio 6 de la hoja 2. $\square$

Teorema 5. *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo, entonces int$(S) =$ int$(\bar{S})$. Si int$(S) \neq \emptyset$, entonces $\bar{S} = \overline{\text{int}(S)}$.*

Demostración. Para la primera parte, si $\text{int}(S) = \emptyset$, entonces S y $\bar{S}$ están incluidos en un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto, $\text{int}(S) = \text{int}(\bar{S}) = \emptyset$. En el caso $\text{int}(S) \neq \emptyset$, si $x \in \text{int}(\bar{S})$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset \bar{S}$. Tomamos $y \in \text{int}(S)$, $y \neq x$, y definimos $z = x + \Delta(x - y)$, donde $\Delta = \epsilon/(2\|x - y\|)$. Entonces, $\|z - x\| = \Delta\|x - y\| = \epsilon/2$ lo que implica que $z \in B(x, \epsilon) \subset \bar{S}$. Dado que $x = \lambda z + (1 - \lambda)y$, con $\lambda = (1 + \Delta)^{-1} \in (0, 1)$, el teorema 3 garantiza que $x \in \text{int}(S)$, es decir, $\text{int}(\bar{S}) \subset \text{int}(S)$. La inclusión contraria es trivial.

Para la segunda parte, ejercicio 7 de la hoja 2. $\square$

Teorema 6. *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ convexo, entonces $\partial S = \partial \bar{S}$.*

Demostración. Por el teorema 5, se cumple $\text{int}(S) = \text{int}(\bar{S})$ y por lo tanto

$$\partial \bar{S} = \bar{S} \setminus \text{int}(\bar{S}) = \bar{S} \setminus \text{int}(S) = \partial S.$$

$\square$