# Sobre una acotación de Burgess para sumas parciales de Gauss

Fernando Chamizo Lorente

Universidad Autónoma de Madrid
http://www.uam.es/fernando.chamizo

Salamanca, 29 de julio de 2009

# Índice

# Sumas exponenciales y de caracteres

## Sumas generales

$$\text{Trigonométrica} = \sum_{1\le n\le N} e\big(f(n)\big), \qquad \text{De caracteres} = \sum_{1\le n\le N} \chi\big(f(n)\big)$$

con $e(x) = e^{2\pi i x}$ y $\chi =$ carácter de Dirichlet.

## Caso lineal

- Trigonométrica $\longrightarrow$ Trivial (núcleo de Dirichlet)

$$\sum_{1\le n\le N} e\big(\alpha n + \beta\big) \le C \,\text{mín}\,\big(N, \|\alpha\|^{-1}\big)$$

- Caracteres $\longrightarrow$ Sumas largas (Pólya-Vinogradov)

  $\longrightarrow$ Sumas cortas (Burgess)

## Sumas largas caracteres (Pólya-Vinogradov)

Técnica de completación + sumas de Gauss $\sum_{n=1}^{q} \chi(n) e(an/q)$

Se puede cambiar cualquier rango de sumación por otro mayor, a cambio de introducir una fase lineal en los sumandos y de perder un logaritmo en la estimación.

$$\Big|\sum_{1 \le n \le N} \chi(n)\Big| \le C(\log q)\Big|\sum_{n=1}^{q} \chi(n) e(an/q)\Big| \le C\sqrt{q}\log q$$

$\chi$ = carácter de Dirichlet módulo $q$.

## Sumas cortas de caracteres (Burgess)

Hölder $\longrightarrow \sum \chi(P(n)/Q(n))$ + RH en $\mathbb{F}_p$

## Sumas mixtas cortas

$$S(N,H) = \sum_{N<n\le N+H} \chi(n)e(\alpha n)$$

con $\chi$ = carácter de Dirichlet módulo $p$ primo.

## Partial Gauss Sums. *Bull. London Math. Soc.* 20 (1988) 589-592.

D.A. Burgess: Para $\alpha = k/p$

$$S(N,H) \ll H^{1-1/r} p^{1/4(r-1)} \log^2 p, \qquad r = 2, 3, \dots$$

## Simplificación en la prueba y ligera mejora

Para $\alpha \in \mathbb{R}$

$$S(N,H) \ll H^{1-1/r} p^{1/4(r-1)} (\log p)^{1/r}, \qquad r = 2, 3, \dots$$

# ¿Dónde aparecen las sumas mixtas?

Análisis de Fourier: $f(x) \longrightarrow \sum a_k e(kx/T)$

$$\sum \chi(n) f(n) \quad \longrightarrow \quad \sum \chi(n) e(kn/T)$$

### Un ejemplo de sumas mixtas cortas *(Promedio de funciones L)*

El símbolo de Legendre es un carácter en cada una de sus variables

$$\sum_{m \text{ larga}} \sum_{n \text{ corta}} \left(\frac{m}{n}\right) = \sum_{n \text{ corta}} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{m}{n}\right) f(m)$$

Fourier + cambio sumación $\longrightarrow$ Suma mixta corta

# La prueba: ideas generales

Sumando por partes $\sum \chi(n)e(\alpha n) \longrightarrow \sum \chi(n)e(kn/p)$ porque $|p\alpha - k| < 1 \Rightarrow e((\alpha - k/p)n)$ no llega a oscilar.

La prueba sigue las líneas de la simplificación de Iwaniec-Kowalski para las sumas cortar puras.

Una idea clave (ya presente en los trabajos I.M. Vinogradov) es aumentar artificialmente el número de puntos de sumación.

Repetir varias veces una suma trigonométrica o de caracteres puede ser una buena idea si sabemos reordenar el resultado de modo que el método aplicado lo interprete como un promedio.

$h$ muy pequeño en comparación con $H$

$$\sum_{N<n\leq N+H} \chi(n)e\big(k\frac{n}{p}\big) \qquad \longleftrightarrow \qquad \sum_{N<n\leq N+H} \chi(n+h)e\big(k\frac{n+h}{p}\big)$$

Repetimos $AB$ (mucho menor que $H$) veces la misma suma

$$S = \frac{1}{AB}\sum_{a=1}^{A}\sum_{b=1}^{B}\sum_{N<n\leq N+H} \chi(n+ab)e\big(k\frac{n+ab}{p}\big)$$

$n = ax$, $\chi(\overline{a}n) = \chi(\overline{a})\chi(n)$

$$S \ll \frac{1}{AB}\sum_{x=1}^{p}\nu(x)\sup_{\gamma}\Big|\sum_{b=1}^{B}\chi(x+b)e\big(\gamma\frac{x+b}{p}\big)\Big|,$$

$$\nu(x) = \{a \leq A \;:\; N < ax \pmod{p} \leq N+H\}$$

## Primer promedio artificial

$$S \ll \frac{1}{AB}\sum_{x=1}^{p}\nu(x)\sup_{\gamma}\Big|\sum_{b=1}^{B}\chi(x+b)e\big(\gamma\frac{x+b}{p}\big)\Big|.$$

Es suficiente para las sumas puras (Iwaniec-Kowalski) pero no para las mixtas.

## Segundo promedio artificial

$$S \ll \frac{1}{AB}\sum_{x=1}^{p}\nu(x)\sup_{\gamma}\frac{B}{p}\sum_{\beta=\gamma}^{\gamma+p/B}\Big|\sum_{b=1}^{B}\chi(x+b)e\big(\beta\frac{x+b}{p}\big)\Big|$$

porque $e\big(\gamma\frac{x+b}{p}\big)$ no llega a oscilar en $b$ si $\gamma \mapsto \beta$.

$$S \ll \frac{1}{Ap}\sum_{x=1}^{p}\nu(x)\sup_{\gamma}\sum_{\beta=\gamma}^{\gamma+p/B}\Big|\sum_{b=1}^{B}\chi(x+b)e\Big(\beta\frac{x+b}{p}\Big)\Big|$$

## Promedio artificial

- Ventaja: los resultados en media son más sencillos que los puntuales
- Desventaja: argumento y coeficientes más complicados

$\nu(x) =$ múltiplos (módulo $p$) hasta $Ax$ en un intervalo de longitud $H$.

Trivial $\longrightarrow \|\nu\|_1 = AH$, Elemental $\longrightarrow \|\nu\|_2 \ll \sqrt{AH}$ (aprox.)

## Coeficientes en media

$$\|\nu\|_t := \Big(\sum|\nu(x)|^t\Big)^{1/t} \ll (AH)^{1/t}$$

Aplicando Hölder, $r \in \mathbb{Z}^+$, y completando la suma en $\beta$

$$S \longrightarrow \sum_{x=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{p} \Big| \sum_{b \le B} \chi(x+b) e\big(\beta \frac{x+b}{p}\big) \Big|^{2r}.$$

Hemos perdido al aplicar Hölder y añadir términos en la suma en $\beta$ pero ahora podemos "evaluar" el resultado:

- Término diagonal: $p^2 B^r$
- No diagonal: $pB^{2r-1}$ sumas $\sum_{x=1}^{p} \chi(g(x)) \ll p^{1/2}$ (Weil)

## Optimización

Para $B = p^{1/(2r-2)}$ se tiene $p^2 B^r = p^{3/2} B^{2r-1}$ y eligiendo también $A$ de forma óptima, se tiene el resultado.

# Comentarios

1. ¿Se podría extender el resultado a <u>todos</u> los módulos compuestos?
   Ni siquiera en el caso de sumas puras de caracteres se ha conseguido para cualquier $r$.
2. Probablemente el caso de caracteres reales es especial porque siempre se puede pasar al caso libre de cuadrados usando los símbolos de Legendre.
3. ¿Se podría usar alguna variante para mejorar los promedios de funciones $L$ reales en media?