Representaciones como suma de dos cuadrados en anillos cuadráticos

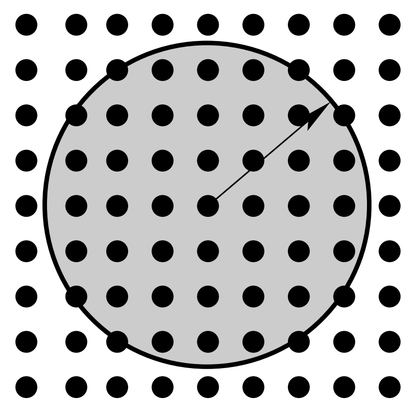
Fernando Chamizo

Valencia 2005

1. Los antecedentes

Problema del círculo
Gauss, Hardy, Landau

Radio= $\sqrt{N}$
Área=πN



$$\sum_{n\leq N} r(n) = \pi N + O(N^{\alpha}) \qquad ¿\alpha?$$

$r(n) \to$ función caótica
$\sum r(n) \to$ función suave

Conjetura (Hardy): $\forall\ \alpha > 1/4 = 0'25$
Huxley (2003): $\forall\ \alpha > 131/416 = 0'3149\ldots$

Generalización a cuerpos de números: Rademacher, Schaal, Rausch.

2. El problema

Formulación genérica:

Calcular el promedio del número de representaciones como suma de dos cuadrados en $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$, $k > 1$.

$$(a + d\sqrt{k})^2 + (c - b\sqrt{k})^2 = n + m\sqrt{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = a^2 + kb^2 + c^2 + kd^2 \\ m/2 = ad - bc \end{cases}$$

Promedios:

1) Sobre $n, m \in [1, N] \to$ puntos del retículo en el elipsoide $a^2 + kb^2 + c^2 + kd^2 \le N$.

Landau, Kloosterman $\to$ error óptimo

2) Sobre $n \in [1, N]$, m fijado $\to$ Problema del círculo hiperbólico. Muy irregular, error no bien conocido.

$$\sum_{n \le N} r(n + 60\sqrt{k}) \sim 14'4N \qquad \sum_{n \le N} r(n + 62\sqrt{k}) \sim 6'193\ldots N$$

Objetivo: $$\sum_{n \le N} \sum_{m \le M} r(n + m\sqrt{k})$$

Rango de $N \to$ largo $\qquad$ Rango de $M \to$ corto

3. Aparece el grupo modular

$\mathbb{H} =$ semiplano superior
Métrica: $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$
Distancia: $\rho(z,w) = \text{arc}\cosh(1 + u(z,w))$

$$\text{con } u(z,w) = \frac{|z-w|^2}{4\text{Im } z \text{ Im } w}$$

Isometrías de $\mathbb{H}$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \qquad ad - bc = 1.$$

$u(\gamma z, i) \longrightarrow$ Forma cuadrática

$$u\Big(\gamma \frac{i}{\sqrt{k}}, i\Big) + 2 = \frac{a^2 + kb^2 + c^2 + kd^2}{\sqrt{k}}$$

Entonces:

$$\sum_{n \le N} r(n + 2\sqrt{k}) =$$

$$\#\Big\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ : \ u\Big(\gamma \frac{i}{\sqrt{k}}, i\Big) + 2 \le \frac{N}{\sqrt{k}}\Big\}$$

(Problema del círculo hiperbólico)

Operadores de Hecke:

$$T_m f(z) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{ad=m} \sum_{b=1}^{d} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

$$\begin{array}{ccc} \det = 1 & \longrightarrow & \det = m \\ r(n+2\sqrt{k}) & \longrightarrow & r(n+2m\sqrt{k}) \end{array}$$

Reformulación Modular:

Sea

$$H(X; z, w) = \#\big\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ : \ u\big(\gamma z, w\big) + 2 \le X\big\}.$$

Estimar

$$\sum_{n \le N} \sum_{m \le M} r(n + m\sqrt{k}) =$$

$$\sum_{m \le M/2} \sqrt{m} T_m \big|_{z=i/\sqrt{k}} H\big(\frac{N}{m\sqrt{k}}; z, i\big).$$

Promedios de operadores de Hecke aplicados a funciones no holomorfas.

4. Teoría espectral de formas modulares

Fourier $\longrightarrow$ Toda función periódica se puede desarrollar en serie de senos y cosenos

$$f(x) = \sum a_n e^{2\pi i n x}.$$

Maass $\longrightarrow$ Toda función $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-periódica (automorfa) se puede desarrollar en formas de Maass y series de Eisenstein

$$f(z) = \sum a_j u_j(z) + \dots$$

$u_j(z) = u_j(\gamma z)$ (automorfas)
$-\Delta u_j = \mu_j u_j$ (autofunciones), $\qquad \mu_j \sim Cj$
$T_m u_j = \lambda_j(m) u_j$ (autofunciones)

Fórmula de sumación de Poisson:

$$\sum_n f(|n + x - y|) = \sum_m \widetilde{f}(m) e^{2\pi i m x} e^{-2\pi i m y}$$

Fórmula de pretraza:

$$\sum_\gamma f\big(u(\gamma z, w)\big) = \sum_j \widetilde{f}(\mu_j) u_j(z) \overline{u_j(w)}.$$

5. Desarrollo espectral

$$u_0 = \text{cte} \;\Rightarrow\; T_m u_0 = \frac{\sigma(m)}{\sqrt{m}} u_0 \;\rightarrow\; \text{término principal}$$

$P :=$ Término principal $\;\rightarrow\;$ promedio de $\sigma(m)$

$$P = \frac{\pi^2}{2\sqrt{k}} s(M) NM, \qquad s(M) \approx 1 \;\; (\text{si } M \text{ grande})$$

u_j, $j \neq 0$ oscilatorias $\;\rightarrow\;$ $E :=$ Término de error.

$$\sum_{n \leq N} \sum_{m \leq M} r(n + m\sqrt{k}) = P + E$$

Esencialmente

$$E \;=\; \sum_{\sqrt{\mu_j} < \Delta^{-1}} u_j(i/\sqrt{k}) \overline{u_j(i)} \sum_{m \leq M/2} \lambda_j(m) g_j(m) \\ +\; O(NM\Delta)$$

Δ muy pequeño $\Rightarrow$ suma muy larga
Δ grande $\Rightarrow$ error $NM\Delta$ grande

6. Dos conjeturas

$g_j(m)$ se comporta como $\mu_j^{-3/4}(NM)^{1/2}m^{-1/2-i\sqrt{\mu_j}}$.
$\lambda_j(m)$ y $u_j(z)$ oscilan de forma poco conocida.

<u>Conjetura 1</u>: Las autofunciones u_j no presentan picos grandes.

$$|u_j(z)| = O(\mu_j^{\epsilon}) \qquad \forall\, \epsilon > 0.$$

Mejor resultado puntual: $|u_j(z)| = O(\mu_j^{5/24+\epsilon})$ (Iwaniec, Sarnak).

<u>Conjetura 2</u>: La función $L(s) = \sum \lambda_j(m)m^{-s}$ es pequeña en la línea crítica.

Deligne $\rightarrow$ cota óptima para $\lambda_j(m)$ en el caso holomorfo.

Conjetura de Ramanujan-Petersson en el caso no holomorfo: $|\lambda_j(n)| \leq d(n)$.

Mejor resultado puntual: $|\lambda_j(n)| \leq d(n)n^{7/64}$ (Kim, Sarnak).

8. Resultados condicionales

Conjeturalmente

$$\sum_{\sqrt{\mu_j}<\Delta^{-1}} u_j(i/\sqrt{k})\overline{u_j(i)} \sum_{m\le M/2} \lambda_j(m) g_j(m)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \swarrow$$

$$\sum_{\sqrt{\mu_j}<\Delta^{-1}} 1\cdot 1\cdot \mu_j^{-3/4}(NM)^{1/2} = O\big((NM)^{1/2}\Delta^{-1/2}\big)$$

$$E = O\big((NM)^{1/2}\Delta^{-1/2} + NM\Delta\big)$$

Elección óptima: $\Delta = (NM)^{-1/3}$

Teorema: Bajo la conjetura 2 se tiene

$$E = O(N^{2/3}M^{2/3}) \qquad \text{para } \ N > M^2.$$

Teorema: Bajo una forma débil de la conjetura 1 se tiene

$$E = O(N^{2/3}M^{2/3}) \qquad \text{para } \ N > M^{2'25}.$$

9. Resultados incondicionales

Resultados en media $\to$ Una autofunción (o una función L) podría ser grande, pero no la mayoría de ellas.

$$\frac{1}{\#\{j\ :\ \mu_j < N\}} \sum_{\mu_j<N} |u_j(z)|^n = O(N^\epsilon) \quad \forall \epsilon > 0$$

Conocido para $n = 2$, desconocido para $n > 2$.

Cota puntual para u_j + resultados en media para u_j + resultados en media para funciones $L \Rightarrow$

Teorema: Si $N > M^{6'5}$

$$E = O(N^\alpha M^\alpha) \qquad \forall \alpha > \frac{29}{41} = 0'7073\ldots$$