

Problemas de puntos del retículo

Fernando Chamizo Lorente

Universidad Autónoma de Madrid

<http://www.uam.es/fernando.chamizo>

19 de julio de 2007

Índice

- 1 Introducción
- 2 Análisis armónico
- 3 F. de sumación
- 4 P. de incertidumbre
- 5 Cuatro problemas

Buscando en el MSC

Buscando en el MSC

Mathematical Subject Classification

00-xx	General	
01-xx	History and biography	
03-xx	Mathematical logic and foundations	
05-xx	Combinatorics	
06-xx	Order, lattices, ordered algebraic structures	
08-xx	General algebraic systems	
11-xx	Number theory	▶
12-xx	Field theory and polynomials	
...		
97-xx	Mathematics education	

Buscando en el MSC

Mathematical Subject Classification	
00-xx	General
01-xx	History and biography
03-xx	Mathematical logic and foundations
05-xx	Combinatorics
06-xx	Order, lattices, ordered algebraic structures
08-xx	General algebraic systems
11-xx	Number theory
12-xx	Field theory and polynomials
...	
97-xx	Mathematics education

11-XX Number theory	
11Axx	Elementary number theory
...	
11Lxx	Exponential sums and character sums
11Mxx	Zeta and L-functions: analytic theory
11Nxx	Multiplicative number theory
11Pxx	Additive number theory; partitions
...	
11Z05	Miscellaneous applications of number theory

65 · 27

Buscando en el MSC

Mathematical Subject Classification		
00-xx	General	
01-xx	History and biography	
03-xx	Mathematical logic and foundations	
05-xx	Combinatorics	
06-xx	Order, lattices, ordered algebraic structures	
08-xx	General algebraic systems	
11-xx	Number theory	
12-xx	Field theory and polynomials	
...		
97-xx	Mathematics education	

11-XX Number theory	
11Axx	Elementary number theory
...	
11Lxx	Exponential sums and character sums
11Mxx	Zeta and L-functions: analytic theory
11Nxx	Multiplicative number theory
11Pxx	Additive number theory; partitions
...	
11Z05	Miscellaneous applications of number theory

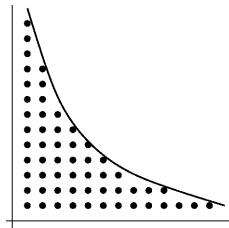
11PXX Additive number theory; partitions	
11P05	Waring's problem and variants
11P21	Lattice points in specified regions
11P32	Goldbach-type theorems; other additive questions involving primes
11P55	Applications of the Hardy-Littlewood method
11P70	Inverse problems of additive number theory
11P81	Elementary theory of partitions
11P82	Analytic theory of partitions
11P83	Partitions; congruences and congruential restrictions
11P99	None of the above, but in this section

$$65 \cdot 27 \cdot 9 = 15795$$

¿Qué tipo de problemas tratamos?

$$\sum_{n=1}^N d(n) = N \log N + (2\gamma - 1)N + \text{error}$$

Problema del divisor (Dirichlet)



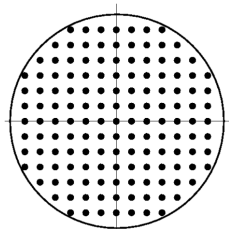
¿Qué tipo de problemas tratamos?

$$\sum_{n=1}^N d(n) = N \log N + (2\gamma - 1)N + \text{error}$$

Problema del divisor (Dirichlet)

$$\sum_{n=1}^N r(n) = \pi N + \text{error}$$

Problema del círculo (Gauss)



¿Qué tipo de problemas tratamos?

$$\sum_{n=1}^N d(n) = N \log N + (2\gamma - 1)N + \text{error}$$

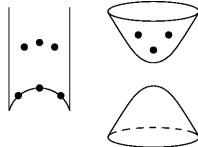
Problema del divisor (Dirichlet)

$$\sum_{n=1}^N r(n) = \pi N + \text{error}$$

Problema del círculo (Gauss)

$$\sum_{d=1}^N h(-d) = \frac{\pi}{18\zeta(3)} N^{3/2} - \frac{3}{2\pi^2} N + \text{error}$$

Promedio del número de clases (Gauss)



Análisis armónico

¿Teoría analítica de números?

Análisis \longleftrightarrow Aritmética \longleftrightarrow Álgebra

¿Análisis \longleftrightarrow continuo,

Álgebra \longleftrightarrow discreto?

Análisis armónico

¿Teoría analítica de números?

Análisis \longleftrightarrow Aritmética \longleftrightarrow Álgebra

¿Análisis \longleftrightarrow continuo,

Álgebra \longleftrightarrow discreto?

αναλυσις. liberación, disolución, fin, muerte; solución.

Análisis armónico

¿Teoría analítica de números?

Análisis \longleftrightarrow Aritmética \longleftrightarrow Álgebra

¿Análisis \longleftrightarrow continuo,

Álgebra \longleftrightarrow discreto?

αναλυσις. liberación, disolución, fin, muerte; solución.

El análisis armónico permite descomponer (analizar) funciones complicadas en armónicos sencillos (tonos puros).

Análisis armónico

¿Teoría analítica de números?

Análisis \longleftrightarrow Aritmética \longleftrightarrow Álgebra

¿Análisis \longleftrightarrow continuo,

Álgebra \longleftrightarrow discreto?

αναλυσις. liberación, disolución, fin, muerte; solución.

El análisis armónico permite descomponer (analizar) funciones complicadas en armónicos sencillos (tonos puros).

Los armónicos muchas veces forman un conjunto discreto.

Ejemplos de análisis armónico

Espacio	Armónicos (caracteres)
1-periódicas, L^2	$e^{2\pi i n x} \quad n \in \mathbb{Z}$
$L^2(\mathbb{R}^n)$	$e^{2\pi i \xi \cdot x} \quad \xi \in \mathbb{R}^n$
$f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$	$e^{2\pi i n x/m}$
$f : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \longrightarrow \mathbb{C}$	$\chi(x)$
$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -periódicas, $L^2(\mathbb{H})$	formas de Maass, $E(z, s)$
$f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}$, adèles	$e^{2\pi i \lambda(\xi \cdot \mathbf{x})}, \quad \lambda(\mathbf{t}) = \sum \pm \mathrm{Tr}_{K_v/\mathbb{Q}_p}(\mathbf{t})$

El tipo de análisis depende de la estructura del problema.

Ejemplo: $f(x) = 1$ si $x \equiv 1 \pmod{m}$ y 0 en el resto.

Análisis en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y en $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m e^{-2\pi i n/m} e^{2\pi i n x/m}, \quad f(x) = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi} \chi(x)$$

El tipo de análisis depende de la estructura del problema.

Ejemplo: $f(x) = 1$ si $x \equiv 1 \pmod{m}$ y 0 en el resto.

Análisis en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y en $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m e^{-2\pi i n/m} e^{2\pi i n x/m}, \quad f(x) = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi} \chi(x)$$

$$\log \prod_{\chi} \sum \frac{\chi(n)}{n^s} = \log \prod_{\chi} \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \stackrel{\log(1-x)^{-1} \sim x}{\approx} \phi(m) \sum_p \frac{f(p)}{p^s}$$

$$\log \left(L(s, \chi_0) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi) \right) \stackrel{s \approx 1^+}{\rightarrow} \log \left(\frac{\phi(m)}{m(s-1)} \cdot \text{cte} \neq 0 \right) \rightarrow \infty$$

El tipo de análisis depende de la estructura del problema.

Ejemplo: $f(x) = 1$ si $x \equiv 1 \pmod{m}$ y 0 en el resto.

Análisis en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y en $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m e^{-2\pi i n/m} e^{2\pi i n x/m}, \quad f(x) = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\chi} \chi(x)$$

$$\log \prod_{\chi} \sum \frac{\chi(n)}{n^s} = \log \prod_{\chi} \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \stackrel{\log(1-x)^{-1} \sim x}{\approx} \phi(m) \sum_p \frac{f(p)}{p^s}$$

$$\log \left(L(s, \chi_0) \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi) \right) \stackrel{s \approx 1^+}{\rightarrow} \log \left(\frac{\phi(m)}{m(s-1)} \cdot \text{cte} \neq 0 \right) \rightarrow \infty$$

\Rightarrow Hay infinitos primos en progresiones aritméticas
(similar para $x \equiv a \pmod{m}$ con a, m coprimos).

Fórmulas de sumación

H discreto $< G$ abeliano localmente compacto

$$\text{Sumación de Poisson} \longrightarrow |G/H| \sum_{h \in H} f(h) = \sum_{c \in \widehat{G/H}} \widehat{f}(c)$$

Fórmulas de sumación

H discreto $< G$ abeliano localmente compacto

$$\text{Sumación de Poisson} \longrightarrow |G/H| \sum_{h \in H} f(h) = \sum_{c \in \widehat{G/H}} \widehat{f}(c)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m), & \widehat{f}(\xi) &= \int f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &\downarrow & & \\ \sum e^{-\pi n^2 x} &= x^{-1/2} \sum e^{-\pi n^2 / x} \\ &\downarrow & & \\ \Lambda(s) &= \Lambda(1-s), & \Lambda(s) &= \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \end{aligned}$$

Fórmulas de sumación

H discreto $< G$ abeliano localmente compacto

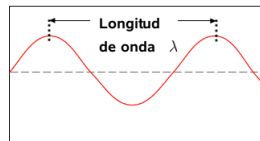
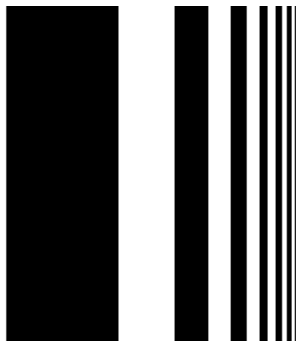
$$\text{Sumación de Poisson} \longrightarrow |G/H| \sum_{h \in H} f(h) = \sum_{c \in \widehat{G/H}} \widehat{f}(c)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m), & \widehat{f}(\xi) &= \int f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &\downarrow & & \\ \sum e^{-\pi n^2 x} &= x^{-1/2} \sum e^{-\pi n^2 / x} \\ &\downarrow & & \\ \Lambda(s) &= \Lambda(1-s), & \Lambda(s) &= \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \end{aligned}$$

fórmulas de sumación \leftarrow formas modulares \rightarrow ec. funcionales

Principio de incertidumbre

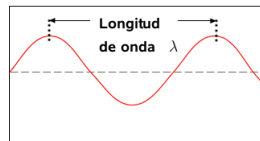
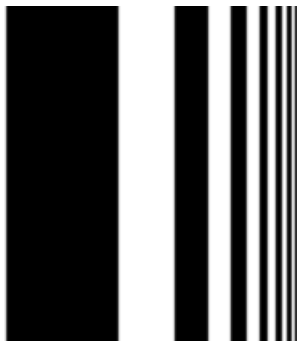
Con ondas de frecuencia $< \nu$ vemos borroso en longitudes $\lambda < 1/\nu$



$$\nu < \infty, \quad \lambda > 0$$

Principio de incertidumbre

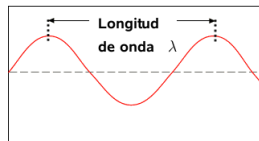
Con ondas de frecuencia $< \nu$ vemos borroso en longitudes $\lambda < 1/\nu$



$$\nu < 100, \quad \lambda > 0,01$$

Principio de incertidumbre

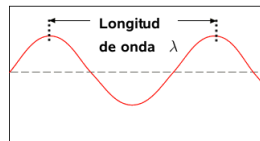
Con ondas de frecuencia $< \nu$ vemos borroso en longitudes $\lambda < 1/\nu$



$$\nu < 50, \quad \lambda > 0,02$$

Principio de incertidumbre

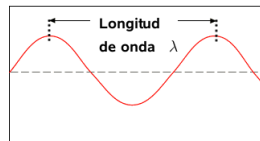
Con ondas de frecuencia $< \nu$ vemos borroso en longitudes $\lambda < 1/\nu$



$$\nu < 20, \quad \lambda > 0,05$$

Principio de incertidumbre

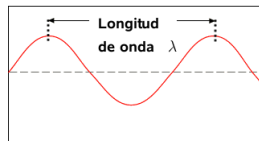
Con ondas de frecuencia $< \nu$ vemos borroso en longitudes $\lambda < 1/\nu$



$$\nu < 10, \quad \lambda > 0,1$$

Principio de incertidumbre

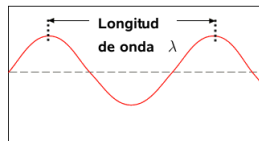
Con ondas de frecuencia $< \nu$ vemos borroso en longitudes $\lambda < 1/\nu$



$$\nu < 5, \quad \lambda > 0,2$$

Principio de incertidumbre

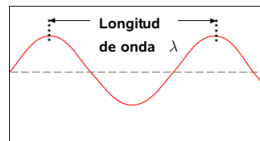
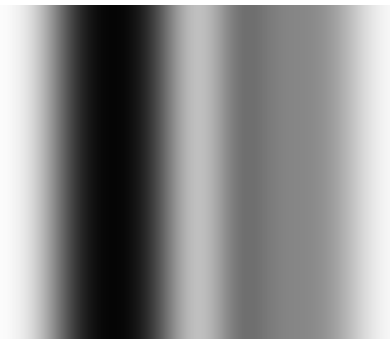
Con ondas de frecuencia $< \nu$ vemos borroso en longitudes $\lambda < 1/\nu$



$$\nu < 2, \quad \lambda > 0,5$$

Principio de incertidumbre

Con ondas de frecuencia $< \nu$ vemos borroso en longitudes $\lambda < 1/\nu$



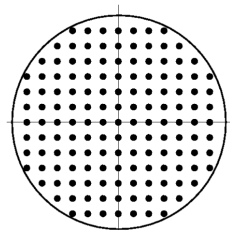
$$\nu < 2, \quad \lambda > 0,5$$

Los detalles a escala λ sólo afectan a los armónicos de frecuencia mayor que $1/\lambda$

El análisis básico

Ej. $f = f.$ característica del círculo de radio R .

$$\mathcal{N} = \sum f(\vec{n}) = \sum \hat{f}(\vec{m}) = \sum \int f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{m} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

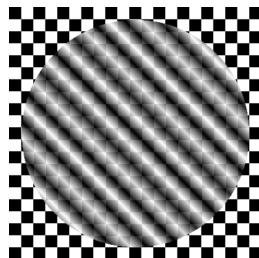


El análisis básico

Ej. $f = f.$ característica del círculo de radio R .

$$\mathcal{N} = \sum f(\vec{n}) = \sum \hat{f}(\vec{m}) = \sum \int f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{m} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

\hat{f} es radial

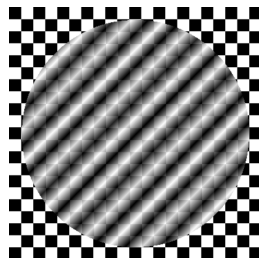


El análisis básico

Ej. $f = f.$ característica del círculo de radio R .

$$\mathcal{N} = \sum f(\vec{n}) = \sum \hat{f}(\vec{m}) = \sum \int f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{m} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

\hat{f} es radial

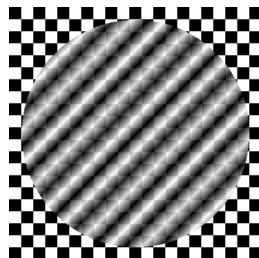


El análisis básico

Ej. $f = f.$ característica del círculo de radio R .

$$\mathcal{N} = \sum f(\vec{n}) = \sum \hat{f}(\vec{m}) = \sum \int f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{m} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

\hat{f} es radial, $\hat{f}(\vec{m}) = O(R^{1/2} \|\vec{m}\|^{-3/2})$, $\hat{f}(\vec{0}) = \pi R^2$
pero $R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} = \infty$ si \vec{m} recorre \mathbb{Z}^2 .

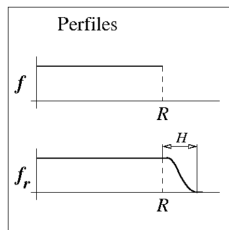


El análisis básico

Ej. $f = f.$ característica del círculo de radio R .

$$\mathcal{N} = \sum f(\vec{n}) = \sum \hat{f}(\vec{m}) = \sum \int f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{m} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

\hat{f} es radial, $\hat{f}(\vec{m}) = O(R^{1/2} \|\vec{m}\|^{-3/2})$, $\hat{f}(\vec{0}) = \pi R^2$
pero $R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} = \infty$ si \vec{m} recorre \mathbb{Z}^2 .



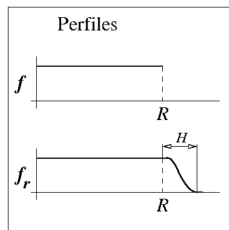
Principio de incertidumbre \Rightarrow el análisis armónico no ve la regularización hasta las frecuencias H^{-1} .

El análisis básico

Ej. $f = f.$ característica del círculo de radio R .

$$\mathcal{N} = \sum f(\vec{n}) = \sum \hat{f}(\vec{m}) = \sum \int f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{m} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

\hat{f} es radial, $\hat{f}(\vec{m}) = O(R^{1/2} \|\vec{m}\|^{-3/2})$, $\hat{f}(\vec{0}) = \pi R^2$
pero $R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} = \infty$ si \vec{m} recorre \mathbb{Z}^2 .



Principio de incertidumbre \Rightarrow el análisis armónico no ve la regularización hasta las frecuencias H^{-1} .

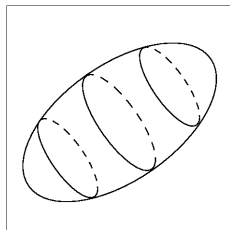
$$\mathcal{N} = \pi(R + O(H))^2 + O(R^{1/2} \sum_{\|\vec{m}\| < H^{-1}} \|\vec{m}\|^{-3/2}) \stackrel{H=R^{-1/3}}{=} \pi R^2 + O(R^{2/3}).$$

El análisis básico

Ej. $f = f.$ característica del círculo de radio R .

$$\mathcal{N} = \sum f(\vec{n}) = \sum \hat{f}(\vec{m}) = \sum \int f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{m} \cdot \vec{x}} d\vec{x}$$

\hat{f} es radial, $\hat{f}(\vec{m}) = O(R^{1/2} \|\vec{m}\|^{-3/2})$, $\hat{f}(\vec{0}) = \pi R^2$
pero $R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} = \infty$ si \vec{m} recorre \mathbb{Z}^2 .



Principio de incertidumbre \Rightarrow el análisis armónico no ve la regularización hasta las frecuencias H^{-1} .

$$\mathcal{N} = \pi(R + O(H))^2 + O(R^{1/2} \sum_{\|\vec{m}\| < H^{-1}} \|\vec{m}\|^{-3/2}) \stackrel{H=R^{-1/3}}{=} \pi R^2 + O(R^{2/3}).$$

Cuerpo convexo en $\mathbb{R}^d \Rightarrow \mathcal{N} = \text{Volumen} + O(R^{(d-1)d/(d+1)})$

¿Cómo superar el principio de incertidumbre?

- Estudiar las interferencias debidas a las fases de $\widehat{f}(\vec{m})$.

$$\text{Ej. } R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} \longrightarrow R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} e^{2\pi i R \|\vec{m}\|}$$

Método de sumas trigonométricas

¿Cómo superar el principio de incertidumbre?

- Estudiar las interferencias debidas a las fases de $\widehat{f}(\vec{m})$.

$$\text{Ej. } R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} \longrightarrow R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} e^{2\pi i R \|\vec{m}\|}$$

Método de sumas trigonométricas

(ausencia de resonancias \leftrightarrow consideraciones diofánticas)

$$\text{Ej. } |\alpha - p/q| < q^{-2}, N \geq q \Rightarrow \sum_{n=1}^N e^{2\pi i \alpha n^2} \leq CN/\sqrt{q}$$

¿Cómo superar el principio de incertidumbre?

- Estudiar las interferencias debidas a las fases de $\widehat{f}(\vec{m})$.

$$\text{Ej. } R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} \longrightarrow R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} e^{2\pi i R \|\vec{m}\|}$$

Método de sumas trigonométricas

- Utilizar otras interpretaciones aritméticas

¿Cómo superar el principio de incertidumbre?

- Estudiar las interferencias debidas a las fases de $\widehat{f}(\vec{m})$.

$$\text{Ej. } R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} \longrightarrow R^{1/2} \sum \|\vec{m}\|^{-3/2} e^{2\pi i R \|\vec{m}\|}$$

Método de sumas trigonométricas

- Utilizar otras interpretaciones aritméticas

Ejemplos en dimensión 3 (trabajos con E. Cristóbal y A. Ubis)

- | | |
|---------------------|--------------------------|
| 1. Número de clases | 2. Puntos en esferas |
| 3. Puntos visibles | 4. Elipsoides racionales |

1. Promedio del número de clases

Gauss

Art. 302, 304, *Disquisitiones arithmeticae* (1801)

Hemos encontrado por una investigación teórica que el promedio del número de clases hasta determinante $-D$ puede ser expresado aproximadamente por $\gamma\sqrt{D} - \delta$ donde $\gamma = 0,7467183115 = \frac{2\pi}{7e}$ donde e es la suma de la serie $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \text{etc.}$ $\delta = 0,2026423673 = \frac{2}{\pi^2}$.
[...] el décimo millar es 72549 por la tabla, 72572 por la fórmula.

1. Promedio del número de clases

Gauss

Art. 302, 304, *Disquisitiones arithmeticae* (1801)

Hemos encontrado por una investigación teórica que el promedio del número de clases hasta determinante $-D$ puede ser expresado aproximadamente por $\gamma\sqrt{D} - \delta$ donde $\gamma = 0,7467183115 = \frac{2\pi}{7e}$ donde e es la suma de la serie $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \text{etc.}$ $\delta = 0,2026423673 = \frac{2}{\pi^2}$. [...] el décimo millar es 72549 por la tabla, 72572 por la fórmula.

Para discriminantes positivos, multiplicando por $\log \epsilon_D$

el promedio de este producto se expresa aproximadamente por una fórmula como $m\sqrt{D} - n$. Sin embargo hasta ahora no hemos sido capaces de determinar el valor de las constantes m, n teóricamente.

1. Promedio del número de clases

Gauss

Art. 302, 304, *Disquisitiones arithmeticae* (1801)

Hemos encontrado por una investigación teórica que el promedio del número de clases hasta determinante $-D$ puede ser expresado aproximadamente por $\gamma\sqrt{D} - \delta$ donde $\gamma = 0,7467183115 = \frac{2\pi}{7e}$ donde e es la suma de la serie $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \text{etc.}$ $\delta = 0,2026423673 = \frac{2}{\pi^2}$. [...] el décimo millar es 72549 por la tabla, 72572 por la fórmula.

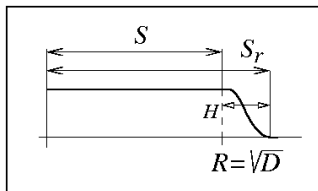
Para discriminantes positivos, multiplicando por $\log \epsilon_D$

el promedio de este producto se expresa aproximadamente por una fórmula como $m\sqrt{D} - n$. Sin embargo hasta ahora no hemos sido capaces de determinar el valor de las constantes m, n teóricamente.

Primeras pruebas publicadas:

$-D \rightarrow$ Lipschitz 1865 $+D \rightarrow$ Vinogradov 1919 (Siegel 1944)

1. Promedio del número de clases



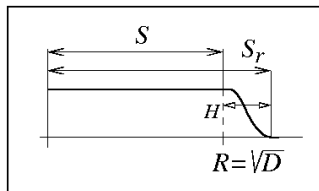
$$S = \sum_{d=1}^D h(-d) \rightarrow S_r$$

ec. funcional $\sum h(-d)d^{-s}$ (Shintani)

$$S_r \rightarrow \sum_{d \leq H^{-1}} h(-d)e^{2\pi i \sqrt{D}d}$$

$$\rightarrow \sum \sum \sum e^{2\pi i \sqrt{D} \sqrt{4ac-b^2}}$$

1. Promedio del número de clases



$$S = \sum_{d=1}^D h(-d) \rightarrow S_r$$

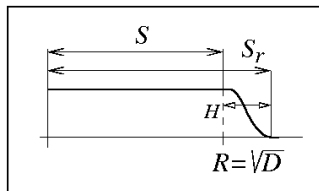
ec. funcional $\sum h(-d)d^{-s}$ (Shintani)

$$S_r \rightarrow \sum_{d \leq H^{-1}} h(-d)e^{2\pi i \sqrt{D}d}$$

$$\rightarrow \sum \sum \sum e^{2\pi i \sqrt{D} \sqrt{4ac-b^2}}$$

H mayor \Rightarrow Suma trigonométrica más corta \smile
 \Rightarrow mayor diferencia entre S y S_r \frown

1. Promedio del número de clases



$$S = \sum_{d=1}^D h(-d) \rightarrow S_r$$

ec. funcional $\sum h(-d)d^{-s}$ (Shintani)

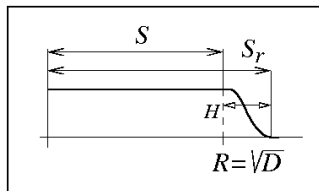
$$S_r \rightarrow \sum_{d \leq H^{-1}} h(-d)e^{2\pi i \sqrt{D}d}$$

$$\rightarrow \sum \sum \sum e^{2\pi i \sqrt{D} \sqrt{4ac-b^2}}$$

H mayor \Rightarrow Suma trigonométrica más corta \smile
 \Rightarrow mayor diferencia entre S y S_r \frown

$S - S_r = \sum L(1, \chi_n) \rightarrow$ sumas cortas de caracteres
 (Burgess, H. de Riemann sobre \mathbb{F}_q)

1. Promedio del número de clases



$$S = \sum_{d=1}^D h(-d) \rightarrow S_r$$

ec. funcional $\sum h(-d)d^{-s}$ (Shintani)

$$S_r \rightarrow \sum_{d \leq H^{-1}} h(-d)e^{2\pi i \sqrt{D}d}$$

$$\rightarrow \sum \sum \sum e^{2\pi i \sqrt{D} \sqrt{4ac-b^2}}$$

H mayor \Rightarrow Suma trigonométrica más corta \smile
 \Rightarrow mayor diferencia entre S y S_r \frown

$S - S_r = \sum L(1, \chi_n) \rightarrow$ sumas cortas de caracteres
 (Burgess, H. de Riemann sobre \mathbb{F}_q)

Nuevos armónicos \rightarrow nueva forma de atacar al principio de incertidumbre

2. Puntos en esferas y funciones L

$$\begin{aligned} \text{Error} &= T + C \quad (\text{Poisson, fórmula del número de clases}) \\ &= \sum_{\|\vec{m}\| < H^{-1}} \text{ondas} + \sum_{R < \sqrt{n} < R+H} b_n L(1, \chi_n) \end{aligned}$$

2. Puntos en esferas y funciones L

$$\begin{aligned} \text{Error} &= T + C \quad (\text{Poisson, fórmula del número de clases}) \\ &= \sum_{\|\vec{m}\| < H^{-1}} \text{ondas} + \sum_{R < \sqrt{n} < R+H} b_n L(1, \chi_n) \end{aligned}$$

$T \leftrightarrow$ Acotación de sumas trigonométricas

$C \leftrightarrow$ Acotación de sumas de caracteres

2. Puntos en esferas y funciones L

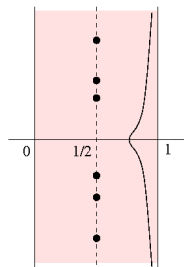
$$\begin{aligned} \text{Error} &= T + C \quad (\text{Poisson, fórmula del número de clases}) \\ &= \sum_{\|\vec{m}\| < H^{-1}} \text{ondas} + \sum_{R < \sqrt{n} < R+H} b_n L(1, \chi_n) \end{aligned}$$

$T \leftrightarrow$ Acotación de sumas trigonométricas

$C \leftrightarrow$ Acotación de sumas de caracteres



Distribución de ceros de funciones L



$$L(\rho, \chi) = 0 \implies \text{Re } \rho = 1/2 \quad ?$$

2. Puntos en esferas y funciones L

Error = $T + C$ (Poisson, fórmula del número de clases)

$$= \sum_{\|\vec{m}\| < H^{-1}} \text{ondas} + \sum_{R < \sqrt{n} < R+H} b_n L(1, \chi_n)$$

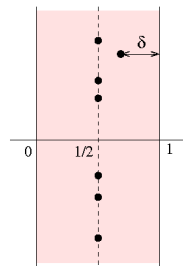
$T \leftrightarrow$ Acotación de sumas trigonométricas

$C \leftrightarrow$ Acotación de sumas de caracteres



Distribución de ceros de funciones L

$\delta =$ distancia a $\Re s = 1$ del cero más alejado



2. Puntos en esferas y funciones L

Error = $T + C$ (Poisson, fórmula del número de clases)

$$= \sum_{\|\vec{m}\| < H^{-1}} \text{ondas} + \sum_{R < \sqrt{n} < R+H} b_n L(1, \chi_n)$$

$T \leftrightarrow$ Acotación de sumas trigonométricas

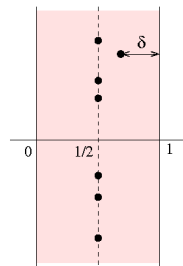
$C \leftrightarrow$ Acotación de sumas de caracteres



Distribución de ceros de funciones L

$\delta =$ distancia a $\Re s = 1$ del cero más alejado

$$\delta > 2/25 \Rightarrow \text{mejora}$$



3. Puntos visibles

Puntos visibles = todos $-$ múltiplos de 2 $-$ múltiplos de 3
 $+$ múltiplos de 6 $- \dots$

3. Puntos visibles

Puntos visibles = todos – múltiplos de 2 – múltiplos de 3
 + múltiplos de 6 – ... $\sim \frac{4\pi}{3\zeta(3)} R^3$

$$\text{Error} \rightarrow \sum_{d, n} \frac{R}{d} \mu(d) \frac{r_3(n)}{n} e^{2\pi i \frac{R}{d} \sqrt{n}}$$

3. Puntos visibles

Puntos visibles = todos – múltiplos de 2 – múltiplos de 3
 + múltiplos de 6 – ... $\sim \frac{4\pi}{3\zeta(3)} R^3$

$$\text{Error} \rightarrow \sum_{d, n} \frac{R}{d} \mu(d) \frac{r_3(n)}{n} e^{2\pi i \frac{R}{d} \sqrt{n}}, \quad \text{func. sencilla} \rightarrow \sum_m \frac{e^{-2\pi i R \sqrt{m}}}{\sqrt{m}}$$

3. Puntos visibles

Puntos visibles = todos – múltiplos de 2 – múltiplos de 3
 + múltiplos de 6 – ... $\sim \frac{4\pi}{3\zeta(3)} R^3$

$$\text{Error} \rightarrow \sum_{d, n} \frac{R}{d} \mu(d) \frac{r_3(n)}{n} e^{2\pi i \frac{R}{d} \sqrt{n}}, \quad \text{func. sencilla} \rightarrow \sum_m \frac{e^{-2\pi i R \sqrt{m}}}{\sqrt{m}}$$

$$\text{Error} \cdot \text{func. sencilla} \xrightarrow{m=n/d^2} \sum_n \sum_{d^2|n} R \mu(d) \frac{r_3(n)}{n^{3/2}} + \dots$$

3. Puntos visibles

Puntos visibles = todos – múltiplos de 2 – múltiplos de 3
 + múltiplos de 6 – ... $\sim \frac{4\pi}{3\zeta(3)} R^3$

$$\text{Error} \rightarrow \sum_{d, n} \frac{R}{d} \mu(d) \frac{r_3(n)}{n} e^{2\pi i \frac{R}{d} \sqrt{n}}, \quad \text{func. sencilla} \rightarrow \sum_m \frac{e^{-2\pi i R \sqrt{m}}}{\sqrt{m}}$$

$$\text{Error} \cdot \text{func. sencilla} \xrightarrow{m=n/d^2} \sum_n \sum_{d^2|n} R \mu(d) \frac{r_3(n)}{n^{3/2}} + \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu^2(n) \\ \sum \mu^2(n) \frac{r_3(n)}{n^{3/2}} \text{ diverge} \end{array} \right\}$$

3. Puntos visibles

Puntos visibles = todos – múltiplos de 2 – múltiplos de 3
 + múltiplos de 6 – ... $\sim \frac{4\pi}{3\zeta(3)} R^3$

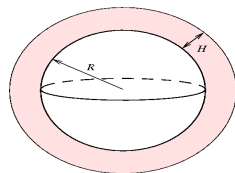
$$\text{Error} \rightarrow \sum_{d, n} \frac{R}{d} \mu(d) \frac{r_3(n)}{n} e^{2\pi i \frac{R}{d} \sqrt{n}}, \quad \text{func. sencilla} \rightarrow \sum_m \frac{e^{-2\pi i R \sqrt{m}}}{\sqrt{m}}$$

$$\text{Error} \cdot \text{func. sencilla} \xrightarrow{m=n/d^2} \sum_n \sum_{d^2|n} R \mu(d) \frac{r_3(n)}{n^{3/2}} + \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu^2(n) \\ \sum \mu^2(n) \frac{r_3(n)}{n^{3/2}} \text{ diverge} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Error} \neq o(R(\log R)^{1/2})$$

4. Elipsoides racionales

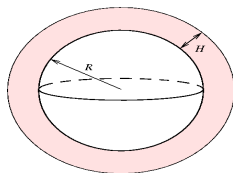
$$r_Q(n) = r_Q(n, \text{gen}) + a_n$$



4. Elipsoides racionales

$$r_Q(n) = r_Q(n, \text{gen}) + a_n$$

- $r_Q(n, \text{gen}) \rightarrow$ producto de factores locales
 \rightsquigarrow suma de caracteres
 $a_n \rightarrow$ coef. de $f \in S_{3/2}(\Gamma)$. Duke:
 $a_n \leq Cn^{13/28+\epsilon}$ si $\mu(n) \neq 0$
 \rightarrow error aceptable si $\mu(n) \neq 0$



4. Elipsoides racionales

$$r_Q(n) = r_Q(n, \text{gen}) + a_n$$

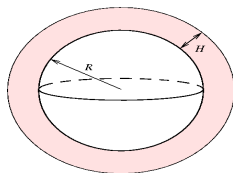
$r_Q(n, \text{gen}) \rightarrow$ producto de factores locales

\rightsquigarrow suma de caracteres

$a_n \rightarrow$ coef. de $f \in S_{3/2}(\Gamma)$. Duke:

$a_n \leq Cn^{13/28+\epsilon}$ si $\mu(n) \neq 0$

\rightarrow error aceptable si $\mu(n) \neq 0$



$f = f_1 + f_2$ con $Sh(f_1)$ (corresp. de Shimura) parabólica, $f_1 \perp f_2$

4. Elipsoides racionales

$$r_Q(n) = r_Q(n, \text{gen}) + a_n$$

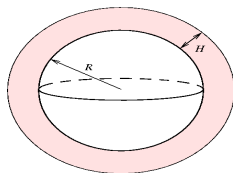
$r_Q(n, \text{gen}) \rightarrow$ producto de factores locales

\rightsquigarrow suma de caracteres

$a_n \rightarrow$ coef. de $f \in S_{3/2}(\Gamma)$. Duke:

$$a_n \leq Cn^{13/28+\epsilon} \text{ si } \mu(n) \neq 0$$

\rightarrow error aceptable si $\mu(n) \neq 0$

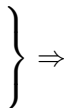


$f = f_1 + f_2$ con $Sh(f_1)$ (corresp. de Shimura) parabólica, $f_1 \perp f_2$

$\rightsquigarrow f_2$ muchos coeficientes cero

$$a_n \leq Cn^{13/28+\epsilon}$$

cota de Deligne para $Sh(f_1)$



\Rightarrow Mejor control
de la capa