1. Definiciones básicas

Según Shafarevich la idea de representación está ligada a dar coordenadas a los grupos y distinguir las propiedades que se deben a la elección de un sistema de referencia, al observador, de las propiedades intrínsecas.

Ejemplo (tonto). Reordenando $1, 2, \dots, 2019$ podemos pasar la transposición $(1, 2)$ a la transposición $(1919, 2019)$ pero es imposible esta ambigüedad entre elementos de distintas clases de conjugación de S_{2019}.

Def. $G =$ grupo. Una *representación* es un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ con V espacio vectorial, en estas notas sobre $\mathbb{C}$ y $\dim V < \infty$. Esta dimensión es el *grado* d_ρ de ρ.

Def. Un cambio de base en V induce que $\rho(g)$ pase a ser $C^{-1}\rho(g)C$ con $C \in \mathrm{GL}(V)$ una matriz constante. Decimos que ρ y $C^{-1}\rho C$ son representaciones *equivalentes*. Solo estamos interesados en representaciones no equivalentes.

Def. Si ρ es equivalente a una representación cuyas matrices son todas de la forma

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & O \\ O & \rho_2(g) \end{pmatrix} \qquad \text{con } \rho_1 \text{ y } \rho_2 \text{ representaciones,}$$

entonces ρ seguiría siendo representación "reduciendo" V a un subespacio propio. Se dice en ese caso que ρ es *reducible* y se escribe $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$.

Las representaciones *irreducibles* están definidas sobre los espacios vectoriales más pequeños, toda representación es suma directa de irreducibles.

Ejemplo. Tomando

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\rho_1\big((1,2)\big) = M_1, \quad \rho_1\big((2,3)\big) = M_2 \qquad \text{y} \qquad \rho_2\big((1,2)\big) = \rho_2\big((2,3)\big) = M_1$$

se extienden a $S_3 = \langle (1,2), (2,3) \rangle$ y definen representaciones ρ_1 y ρ_2. Se cumple que ρ_1 es irreducible (es imposible diagonalizar simultáneamente las matrices) mientras que $\rho_2 = \mathrm{sgn} \oplus \mathbf{1}$ donde sgn es la representación de dimensión 1 que asigna a cada permutación su signo y $\mathbf{1}$ es la trivial (también de dimensión 1).

2. Algunos ejemplos físicos

Ejemplo. Estado de un sistema cuántico $\rightarrow$ función de ondas Ψ donde $|\Psi|^2$ da densidad de probabilidad, $e^{i\alpha}\Psi$ y Ψ indican lo mismo.

Para n partículas idénticas $\Psi = \Psi(x_1, \dots, x_n)$ deben comportarse bajo permutaciones como

$$\Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = e^{i\alpha_\sigma}\Psi(x_1, \dots, x_n), \qquad \rho(\sigma) = e^{i\alpha_\sigma}.$$

Las únicas representaciones de dimensión 1 de S_n son la trivial y sgn $\to$ bosones (funciones simétricas) y fermiones (funciones antisimétricas).

Ejemplo. La ecuación de Schrödinger es una ecuación lineal del tipo $\hat{H}\Psi = i\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ y en su forma independiente del tiempo $\hat{H}\Psi = E\Psi$, es decir, los autovalores dan las energías. Supongamos que hay algún grupo de simetrías G (que no involucre el tiempo) que deja invariante esta ecuación. Como las soluciones forman un espacio vectorial, hacer actuar una simetría $g \in G$ induce un operador lineal $D(g)$ sobre las soluciones que satisface $\hat{H}D(g)\Psi = i\frac{\partial D(g)\Psi}{\partial t}$ y por tanto $D(g)^{-1}\hat{H}D(g) = \hat{H}$. De aquí, $D(g)$ pasa estados con una cierta energía a otros estados con esa misma energía. Es decir, que $D(g)$ preserva los autoespacios.

Una variante un poco más matemática es considerar autofunciones del Laplaciano en la esfera $-\Delta f = \lambda f$. Este operador es invariante por un grupo que incluye a $G = \mathrm{SO}(3)$, en particular $-\Delta f(\vec{x}g) = \lambda f(\vec{x}g)$, con $\vec{x}$ un vector fila. Si V es el autoespacio correspondiente a un autovalor, $\rho(g)f(\vec{x}) = f(\vec{x}g)$ define una representación $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ y si $\rho_{ij}(g)$ son los elementos de la matriz de $\rho(g)$ en una base $\{f_1, \dots, f_n\}$ de V se tiene

$$f_i(\vec{x}g) = \sum \rho_{ij}(g) f_j(\vec{x})$$

que implica el teorema de adición para armónicos esféricos, difícil de probar de otra forma.

Comentario. En el ámbito de las partículas elementales, uno supone que hay ciertas "simetrías internas" dadas por un grupo, las cuales son idealizaciones matemáticas sin más base que hacer que cuadre lo que se observa. Cada representación irreducible relaciona partículas en el mismo multiplete. Por ejemplo, en teoría, un triplete está asociado a un espacio vectorial de dimensión 3 en el que no hay manera canónica de especificar una base: cada base correspondería a una elección arbitraria de tres cosas a las que llamar partículas de manera que el resto sean combinaciones de ellas. En la práctica, las simetrías no las respetan otras interacciones y es posible distinguir partículas individuales.

En el caso del modelo original de los quarks, el espacio era de dimensión 3 con grupo SU(3). Los vectores de la base del espacio, lo que en matemáticas se llamaría $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$ sería lo que correspondería a los hipotéticos tres quarks (ahora se sabe que hay seis) u (arriba), d (abajo) y s (extraño). Matemáticamente la elección es arbitraria, como lo es escoger cualquier base (ortonormal) en un espacio unitario pero para que las cosas funcionaran físicamente había que suponer una diferencia de carga entre u y d (son $2/3$ y $-1/3$), y además que s tenía masa muy diferente. La simetría SU(3) solo se cumpliría si uno se olvida de esos "detalles". En la realidad podemos distinguir un protón uud de un neutrón udd porque tienen distinta carga, si no la medimos ambas partículas son prácticamente iguales (solo hay una diferencia de masa de un 0,14 %).

El *producto tensorial* $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V \otimes W)$ se define a partir de $\rho_1 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, $\rho_2 : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ de la manera obvia. Para $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^m$ podemos identificar $V \otimes W \cong \mathbb{C}^{mn}$ y las matrices de $\rho_1 \otimes \rho_2$ son el producto de Kronecker de las de ρ_1 y ρ_2. En un contexto que incluye los grupos de Lie compactos, todas las representaciones irreducibles se obtienen tensorizando cierta representación y su dual múltiples veces y descomponiendo en irreducibles. Para las autofunciones da relaciones entre productos.

Ejemplo. Para $\rho_1 : S_3 \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$ como en el ejemplo de S_3 se tiene

$$\rho_1 \otimes \rho_1\big((1,2)\big) = \begin{pmatrix} -M_1 & O \\ O & M_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho_1 \otimes \rho_1\big((2,3)\big) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} M_2 & M_2\sqrt{3} \\ M_2\sqrt{3} & -M_2 \end{pmatrix}$$

Si C es la matriz de columnas $\vec{e}_1 + \vec{e}_4$, $\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 - \vec{e}_4$, se tiene

$$C^{-1}\rho_1 \otimes \rho_1\big((1,2)\big)C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & M_1 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1}\rho_1 \otimes \rho_1\big((2,3)\big)C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & M_2 \end{pmatrix}$$

y por tanto $\rho_1 \otimes \rho_1 = \mathbf{1} \oplus \mathrm{sgn} \oplus \rho_1$.

Ejemplo (muy vago). La forma en que Gell-Mann y Ne'eman introdujeron los quarks fue a través de una representación ρ de SU(3) con la que

$$\rho \otimes \overline{\rho} = 1 \oplus 8 \qquad \text{y} \qquad \rho \otimes \rho \otimes \rho = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

donde la notación física es usar un número para indicar la dimensión. Según su teoría, ρ correspondía a los quarks (y $d_\rho = 3$ indicaba que había tres, ahora se sabe que hay seis), $\overline{\rho}$ a los antiquarks, $\rho \otimes \overline{\rho}$ a los mesones de espín 0 (formados por un quark y un antiquark) y $\rho \otimes \rho \otimes \rho$ correspondía a los bariones de espín 3/2 (formados por tres quarks). De este espín se conocía una familia de 8 partículas y otra de 9, por lo cual Gell-Mann predijo que faltaba en la última una partícula de cierta masa. Tal partícula, la Ω^-, se encontró tres años después.

3. Grupos finitos

Resultado básico. Toda representación ρ de un grupo finito G es equivalente a una *representación unitaria*. Es decir, podemos suponer $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^\dagger$ donde $\dagger$ indica la traspuesta conjugada.

Dem. Con un isomorfismo podemos cambiar V por $\mathbb{C}^n$ y definir en V un producto escalar

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \big(\rho(h)\vec{v}\big)^\dagger \rho(h)\vec{w}.$$

Claramente $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle\rho(g)\vec{v},\rho(g)\vec{w}\rangle$ para todo $g\in G$, así que $\rho(g)$ es unitaria con este producto escalar, que cambiado de base se transforma en el usual. $\Box$

Nos centramos entonces en $\widehat{G}$, las representaciones irreducibles unitarias (no equivalentes).

Algunos resultados más avanzados:

- Se cumple $|G| = \sum_{\rho\in\widehat{G}} d_\rho^2$.
- Cada $\rho\in\widehat{G}$ está determinada por su carácter $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $\chi_\rho(g) = \operatorname{Tr}\big(\rho(g)\big)$.
- $|\widehat{G}|$ coincide con el número de clases de conjugación.
- Si $\pi,\rho\in\widehat{G}$ se cumplen las *relaciones de ortogonalidad*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_\pi}(g)\chi_\rho(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi=\rho,\\ 0 & \text{si } \pi\neq\rho \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \sum_{\rho\in\widehat{G}}\overline{\chi_\rho}(g_1)\chi_\rho(g_2)\neq 0 \Leftrightarrow g_1=g_2.$$

El último punto permite hacer "análisis armónico" en términos de los elementos de las matrices de $\rho\in\widehat{G}$. Concretamente, toda $f: G\longrightarrow\mathbb{C}$ se puede escribir como

$$f(g) = \sum_{\rho\in\widehat{G}} d_\rho \operatorname{Tr}\big(\widehat{f}(\rho)\rho(g)\big) \qquad \text{con} \quad \widehat{f}(\rho) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\rho(g)^\dagger.$$

Para deducir esto solo hay que notar que $\sum_{\rho\in\widehat{G}} d_\rho\chi_\rho(gh^{-1}) = \sum_{\rho\in\widehat{G}}\chi_\rho(e)\chi_\rho(gh^{-1})$.

Ejemplo. Las únicas representaciones irreducibles (no equivalentes) de S_3 son la trivial, el signo y ρ_1 definida antes, porque $|S_3| = 6 = 1^2+1^2+2^2$. También se puede deducir de que hay tres clases de conjugación, $\{\mathrm{Id}\}$, $\{\text{trasposiciones}\}$ y $\{\text{3-ciclos}\}$.

Ejemplo. Como $G=\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ es abeliano, $d_\rho = 1$ para $\rho\in\widehat{G}$, de donde $\rho_m(n) = e^{2\pi i mn/N}$. Se deduce el desarrollo de Fourier discreto:

$$f(n) = \sum_{m=0}^{N-1}\widehat{f}(m)e^{2\pi i mn/N} \qquad \text{con} \quad \widehat{f}(n) = \frac{1}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(m)e^{-2\pi i mn/N}.$$

Ejemplo. Si f es una *función de clase*, es decir, constante en cada clase de conjugación,

$$f(g) = \sum_{\rho\in\widehat{G}} c_\rho\chi_\rho(g) \qquad \text{con} \quad c_\rho = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\overline{\chi}_\rho(g).$$

4. Grupos de Lie compactos

Un *grupo de Lie* es un grupo que a la vez tiene estructura de variedad. Cuando son compactos y conexos se pueden ver como subgrupos de $\mathrm{U}(N)$, las matrices unitarias de dimensión N. Dos ejemplos destacados son $\mathrm{SU}(N)$ y $\mathrm{SO}(N)$.

En esta situación $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^N)$ y entonces se tiene una representación tautológica $\tau : g \mapsto g$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass los polinomios en la parte real e imaginaria de los elementos de la matriz g dan lugar a todas las funciones continuas $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$. Estos polinomios se pueden ver como combinaciones lineales de representaciones del tipo $\tau \otimes \cdots \otimes \tau \otimes \overline{\tau} \otimes \cdots \otimes \overline{\tau}$ con $\overline{\tau}$ la representación dual $\overline{\tau}(g) = \tau(g^{-1})^t$, que es $\overline{\tau(g)}$ en el caso unitario. Procediendo como antes, reemplazando la suma por una integral, se puede probar que todas las representaciones son unitarias salvo equivalencias.

Esto abre la puerta a dos resultados importantes:

Teorema (Peter-Weyl). $G =$ grupo de Lie compacto y conexo. Las funciones $\{\rho_{ij} : \rho \in \widehat{G}\}$ forman un sistema ortonormal completo de $L^2(G)$.

De hecho G tiene una estructura Riemanniana que permite definir un operador de Laplace-Beltrami y sus autofunciones son justamente $\{\rho_{ij} : \rho \in \widehat{G}\}$.

Teorema. Toda $\rho \in \widehat{G}$ aparece como sumando en algún producto $\tau \otimes \cdots \otimes \tau \otimes \overline{\tau} \otimes \cdots \otimes \overline{\tau}$.

Ejemplo. El espín y el momento angular en general en mecánica cuántica están relacionados con las representaciones irreducibles de $\mathrm{SU}(2)$. En ese caso τ y $\overline{\tau}$ son equivalentes, lo que proviene de que $\mathrm{diag}(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$ y $\mathrm{diag}(e^{-i\alpha}, e^{i\alpha})$ son matrices semejantes. Se puede probar que dado $n \in \mathbb{Z}^+$ hay exactamente una representación $\rho_n \in \widehat{G}$ con $d_\rho = n$. Se tiene $\rho_1 =$ trivial, $\rho_2 =$ tautológica. Todas ellas se obtienen inductivamente como sumandos de $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_1$ gracias a la fórmula de adición del momento angular

$$\rho_n \otimes \rho_m = \rho_{|n-m|} \oplus \rho_{|n-m|+1} \oplus \cdots \oplus \rho_{n+m-1} \oplus \rho_{n+m}.$$

El espín, según la terminología física corresponde a $(n-1)/2$.

5. Representaciones y pesos

Dado un grupo de Lie compacto y conexo $G \hookrightarrow \mathrm{U}(N)$ con centro finito, existe una manera de parametrizar los caracteres y las dimensiones de $\rho \in \widehat{G}$ por medio de los llamados *pesos*. Para ello es fundamental considerar el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G que es el espacio tangente T_eG (como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la operación añadida del corchete de Lie).

Ejemplo. Una curva en $G = \mathrm{SO}(N)$ que pasa por el origen cumple $g(u)g^t(u) = \mathrm{Id}$ con $g(0) = \mathrm{Id}$. Derivando se tiene $g'(0) + g^{t\,\prime}(0) = O$, por tanto

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(N) = \{\text{matrices antisimétricas reales}\}.$$

Las matrices antisimétricas son cerradas por $[X,Y]=XY-YX$.

Para $A\in\mathfrak{g}$ se tiene $\exp(A)\in G$ como exponencial de matrices y esto es un hecho general.

Resulta que dentro de cada G como los considerados, siempre hay grupos abelianos grandes, a los mayores en el sentido de la inclusión se les llama *toros maximales* T. Corresponden a la imagen de T por exp de la *subálgebra de Cartan* $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{g}$ formada por un conjunto maximal de matrices que conmutan entre sí.

Ejemplo. En $G=\mathrm{SO}(3)$, $T=\{\text{rotaciones por el eje } Z\}$ es un toro maximal (y lo mismo fijando cualquier otro eje).

$$T=\left\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,:\,\alpha\in(-\pi,\pi]\right\}\qquad\Rightarrow\qquad\mathfrak{t}=\left\{\begin{pmatrix}0 & -a & 0\\ a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\,:\,a\in\mathbb{R}\right\}.$$

Ejemplo. En $\mathbb{R}^N$ un giro en el subespacio generado por $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ conmuta con otro en el subespacio generado por $\vec{e}_3$ y $\vec{e}_4$. Procediendo de esta manera se obtiene que $\mathrm{SO}(N)$ tiene un toro maximal de dimensión $N/2$ si N es par yde dimensión $(N-1)/2$ si N es impar.

Se prueba que los toros maximales T son siempre conjugados entre sí y tan grandes como para que siempre contengan al menos un elemento de cada clase de conjugación del grupo, de esta forma cada $\rho\in\widehat{G}$ está determinada por $\rho\big|_T$ y como T es abeliano, $\rho\big|_T(g)$ diagonaliza simultáneamente en caracteres $\chi:T\longrightarrow\mathbb{C}$ y se tiene

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{t} & \xrightarrow{d\chi} & \mathbb{C}\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\exp} & & \Big\downarrow{\scriptstyle e^{2\pi i\cdot}}\\ T & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{C}^*\end{array}\quad \chi\big(\exp(H)\big)=e^{2\pi i\ell(H)}\quad\text{con}\quad H\in\mathfrak{t},\quad \ell:\mathfrak{t}\longrightarrow\mathbb{C}\text{ forma lineal.}$$

Se dice que ℓ es un *peso* y todos los pesos que den un resultado coherente cono la conmutatividad del diagrama, esto es, $\ell(H)\in\mathbb{Z}$ para $\exp(H)=\mathrm{Id}$ determinan una representación de T. Hay un grupo W, el *grupo de Weyl* que mide la obstrucción para extender una representación de T a G, esencialmente que no haya conflictos entre clases de conjugación. Concretamente, si $g^{-1}Tg=T$ para $g\in G-T$ entonces se debe cumplir $\chi(t)=\chi(g^{-1}tg)$. Se tiene una biyección

$$\widehat{G}\longleftrightarrow\big\{\ell\text{ peso}\,:\,\ell(H)\in\mathbb{Z}\text{ si }\exp(H)=\mathrm{Id},\ H\in\mathfrak{t}\big\}/W.$$

Los ℓ válidos se pueden identificar con un retículo por la condición $\exp(H)=\mathrm{Id}$ y W como ciertas simetrías de ese retículos. En definitiva, las representaciones irreducibles se asocian a puntos en retículos módulo reflexiones. La dimensión del retículo es la de la subálgebra de Cartan como espacio vectorial o de un toro maximal como variedad.

Para $SU(2)$ el retículo es simplemente $\mathbb{Z}$ y W es trivial. La dimensión uno está en relación con que no podamos añadir nada a $T = \{\text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})\}$ que no esté en T y que conmute con sus elementos.

En el caso de SU(3) el retículo y las simetrías son:

$$\Big\{ m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2 \, : \, \vec{v}_1 = \big(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{6}\big), \ \vec{v}_2 = \big(0, \frac{1}{3}\big) \Big\}, \qquad \Big\{ \text{Simetrías con eje } \big(\text{sen}\, \frac{2\pi k}{6}, \cos \frac{2\pi k}{6}\big) \Big\}.$$

Un toro maximal sería $T = \{\text{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{-i(\theta_1+\theta_2)})\}$ lo que explica la dimensión 2.

La *fórmula de los caracteres de Weyl* es una expresión explícita para los caracteres de G en términos de los pesos y de W. También se deducen fórmulas para la dimensión y para los autovalores del operador de Laplace-Beltrami.

Versiones electrónicas:

Este documento: `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/talks/aud.html`

Relacionado: `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/lie_eig.pdf`