Números y aplicaciones

Fernando Chamizo

Ciencia con Entusiasmo

23 de mayo de 2012

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

http://www.uam.es/fernando.chamizo

Matemáticas, Ciencia y sociedad

Las matemáticas son una parte importante de la Ciencia

Matemáticas, Ciencia y sociedad

Las matemáticas son una parte importante de la Ciencia

- ¡Y la biología también!

Matemáticas, Ciencia y sociedad

Las matemáticas son una parte importante de la Ciencia

- ¡Y la biología también!
- ¡Y la física también!

Matemáticas, Ciencia y sociedad

Las matemáticas son una parte importante de la Ciencia

- ¡Y la biología también!
- ¡Y la física también!
- ¡Y la química también!

Matemáticas, Ciencia y sociedad

Las matemáticas son una parte importante de la Ciencia

- ¡Y la biología también!
- ¡Y la física también!
- ¡Y la química también!

Pero. . .

- Hay comparativamente poca divulgación en matemáticas
- Captan poca atención del público y los medios

¿Qué son las Matemáticas?

De hecho las matemáticas son bastante desconocidas en comparación con otras ciencias, incluso por personas de nivel cultural alto.

Definir las matemáticas es demasiado ambicioso pero siempre podemos mostrar ejemplos sencillos y decir algunas palabras bonitas. Algunas de las que se vendrían a la cabeza de muchos matemáticos son:

belleza, simetría, generalidad, creatividad, rigor

¿Qué son las Matemáticas?

De hecho las matemáticas son bastante desconocidas en comparación con otras ciencias, incluso por personas de nivel cultural alto.

Definir las matemáticas es demasiado ambicioso pero siempre podemos mostrar ejemplos sencillos y decir algunas palabras bonitas. Algunas de las que se vendrían a la cabeza de muchos matemáticos son:

belleza, simetría, generalidad, creatividad, ~~rigor~~ certeza.

Un lamento muy común

La mayor parte de los estudiantes de Ciencias y científicos profesionales están más expuestos a los aspectos utilitarios de las matemáticas mientras que la parte estética, que los matemáticos consideran esencial, pasa inadvertida.

R. Guralnick en el prólogo de *A Concise Introduction to Pure Mathematics* de M. Liebeck

One of the great difficulties in teaching undergraduate mathematics at universities in the United States is the great gap between teaching students a set of algorithms (which is very often the bulk of what is learned in calculus) and convincing students of the power, beauty and fun of the the basic concepts in mathematics.

¿Qué es un teorema?

Un teorema es una verdad matemática que sabemos demostrar

Un teorema viene normalmente precedido por alguna experimentación (aunque sea abstracta) y una conjetura.
Por ejemplo, jugando con los números nos podemos percatar de que la suma de los n primeros números impares es el cuadrado de n

$$1+3=2^2 \qquad 1+3+5+7+9+11=6^2$$
$$1+3+5=3^2 \qquad 1+3+5+7+9+11+13=7^2$$
$$1+3+5+7=4^2 \qquad 1+3+5+7+9+11+13+15=8^2$$
$$1+3+5+7+9=5^2 \qquad 1+3+5+7+9+11+13+15+17=9^2$$

Mini-teorema

Para cualquier entero positivo n se cumple

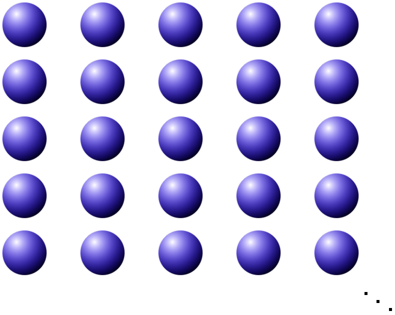
$$1 + 3 + 5 \cdots + \text{enésimo impar} = n^2$$

Mini-teorema

Para cualquier entero positivo n se cumple

$$1 + 3 + 5 \cdots + \text{enésimo impar} = n^2$$

Mini-demostración:

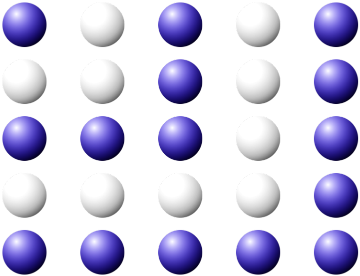


Mini-teorema

Para cualquier entero positivo n se cumple

$$1 + 3 + 5 \cdots + \text{enésimo impar} = n^2$$

Mini-demostración:



$$\longrightarrow \qquad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

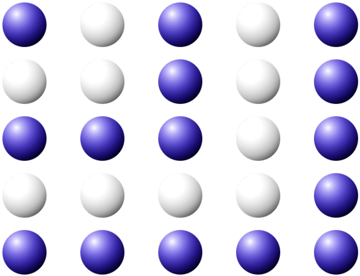
$\ddots$

Mini-teorema

Para cualquier entero positivo n se cumple

$$1 + 3 + 5 \cdots + \text{enésimo impar} = n^2$$

Mini-demostración:



$$\longrightarrow \qquad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

$$\therefore \rightarrow \; 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Un ejemplo más profundo

La belleza de un teorema se asocia muchas veces en su capacidad para mostrar relaciones inesperadas.

Aproximación de razones trigonométricas por polinomios (Taylor)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \dots \quad \text{(fácil)}\\
\cos x &= x - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dots \quad \text{(fácil)}\\
\tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad \text{(números raros)}
\end{aligned}$$

Un ejemplo más profundo

La belleza de un teorema se asocia muchas veces en su capacidad para mostrar relaciones inesperadas.

Aproximación de razones trigonométricas por polinomios (Taylor)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \dots && \text{(fácil)}\\
\cos x &= x - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dots && \text{(fácil)}\\
\tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots && \text{(números raros)}
\end{aligned}$$

$$c_2 x + c_4 x^3 + c_6 x^5 + c_8 x^7 + \dots$$

Un ejemplo más profundo

$$\begin{aligned} \tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad \text{(números raros)} \\ & \quad c_2 x + c_4 x^3 + c_6 x^5 + c_8 x^7 + \dots \end{aligned}$$

Teorema $(n = \text{par})$

$\frac{2}{c_n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n$ es la probabilidad de que n números impares escogidos al azar no tengan un divisor común.

Un ejemplo más profundo

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad \text{(números raros)}$$
$$c_2x + c_4x^3 + c_6x^5 + c_8x^7 + \dots$$

Teorema ($n = $ par)

$\frac{2}{c_n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n$ es la probabilidad de que n números impares escogidos al azar no tengan un divisor común.

- Aproximación por polinomios $\longrightarrow$ Análisis
- Divisores $\longrightarrow$ Aritmética
- π $\longrightarrow$ Geometría
- Azar $\longrightarrow$ Probabilidad

Fabrique su propio teorema

Ejercicio:

Enunciar y probar un teorema que explique por qué las potencias de $2+\sqrt{3}$ están muy cerca de ser un entero:

Fabrique su propio teorema

Ejercicio:

Enunciar y probar un teorema que explique por qué las potencias de $2+\sqrt{3}$ están muy cerca de ser un entero:

$$(2+\sqrt{3})^4 \quad = \quad 193.9948452238571284375$$

Fabrique su propio teorema

Ejercicio:

Enunciar y probar un teorema que explique por qué las potencias de $2+\sqrt{3}$ están muy cerca de ser un entero:

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^4 &= 193.99484522385712843 75\\(2+\sqrt{3})^8 &= 37633.99997342828291688 21\end{aligned}$$

Fabrique su propio teorema

Ejercicio:

Enunciar y probar un teorema que explique por qué las potencias de $2+\sqrt{3}$ están muy cerca de ser un entero:

$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{3})^4 &= 193.99484522385712843750\\
(2+\sqrt{3})^8 &= 37633.99997342828291688\\
(2+\sqrt{3})^{12} &= 7300801.999999863028746704
\end{aligned}
$$

Fabrique su propio teorema

Ejercicio:

Enunciar y probar un teorema que explique por qué las potencias de $2+\sqrt{3}$ están muy cerca de ser un entero:

$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{3})^4 &= 193.99484522385712844375 \\
(2+\sqrt{3})^8 &= 37633.9999734282829168821 \\
(2+\sqrt{3})^{12} &= 7300801.99999986302874670 48 \\
(2+\sqrt{3})^{16} &= 1416317953.9999999992939438512 \\
(2+\sqrt{3})^{20} &= 274758382273.9999999999963604386 \\
(2+\sqrt{3})^{24} &= 53301709843201.9999999999999812388 \\
(2+\sqrt{3})^{28} &= 10340256951198913.9999999999999999032 \\
(2+\sqrt{3})^{32} &= 2005956546822746113.9999999999999999995
\end{aligned}
$$

Fabrique su propio teorema

Ejercicio:

Enunciar y probar un teorema que explique por qué las potencias de $2+\sqrt{3}$ están muy cerca de ser un entero:

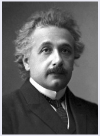
$$\begin{aligned}
(2+\sqrt{3})^4 &= 193.9948452238571284375\\
(2+\sqrt{3})^8 &= 37633.9999734282829168821\\
(2+\sqrt{3})^{12} &= 7300801.9999998630287467048\\
(2+\sqrt{3})^{16} &= 1416317953.9999999992939438512\\
(2+\sqrt{3})^{20} &= 274758382273.9999999999963604386\\
(2+\sqrt{3})^{24} &= 53301709843201.9999999999999812388\\
(2+\sqrt{3})^{28} &= 10340256951198913.9999999999999999032\\
(2+\sqrt{3})^{32} &= 2005956546822746113.9999999999999999995
\end{aligned}$$

¿Son las matemáticas sólo un divertimento para matemáticos?

¿De verdad hay aplicaciones?

Matemáticas en la naturaleza (física)

Einstein (1879–1955) Premio Nobel de Física en 1921



"¿Cómo puede ser que las matemáticas, siendo después de todo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad?"

E.P. Wigner (1902–1995) Premio Nobel de Física en 1963

"La enorme utilidad de las matemáticas en las ciencias naturales es algo que roza el misterio y que no tiene explicación racional".

"El milagro de lo apropiado que es el lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes de la física es un regalo maravilloso que ni entendemos ni merecemos".

Las ecuaciones de Maxwell

$\vec{E}$ =campo eléctrico, $\vec{B}$ =campo magnético

$$\text{div } \vec{E} = \epsilon^{-1}\rho \qquad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

donde ϵ_0, μ_0, son ciertas constantes y ρ y $\vec{\jmath}$ son las densidades de carga y corrientes (son nulas en el "vacío").

Si $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial, entonces

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Prueba de que son ciertas:

Prueba de que son ciertas: Encender la televisión.

Prueba de que son ciertas: Encender la televisión.
Prueba de que son importantes: Encender la televisión.

Prueba de que son ciertas: Encender la televisión.
Prueba de que son importantes: Encender la televisión.

Los experimentos que llevaron a las ecuaciones de Maxwell no tienen mucho que ver con su aspecto. Estas ecuaciones nos dan una forma cómoda (!!!) de razonar matemáticamente con los fenómenos electromagnéticos. De ellas se deduce por ejemplo que hay ondas electromagnéticas que viajan a unos 300000km/s. Maxwell lo hizo antes de que se generasen las primeras ondas de radio y conjeturó que la luz era una onda electromagnética.

$$\text{Ecuaciones de Maxwell} \xrightarrow{\text{Mini-teorema (cálculo)}} \text{Ecuación de ondas}$$

$$\text{Forma integral} \xrightarrow{\text{Teorema de Stokes}} \text{Forma diferencial}$$

Un ejemplo más conocido:

Datos experimentales $\longrightarrow$ Las órbitas de los planetas parecen ser elípticas

Modelo $\longrightarrow$ Fuerza gravitatoria$= -GMm/r^2$

Fuerza$= -GMm/r^2 \xrightarrow{\text{Teorema}}$ Órbitas elípticas

Un ejemplo más conocido:

Datos experimentales $\longrightarrow$ Las órbitas de los planetas parecen ser elípticas

Modelo $\longrightarrow$ Fuerza gravitatoria$= -GMm/r^2$

Fuerza$= -GMm/r^2 \xrightarrow{\text{Teorema}}$ Órbitas elípticas

El universo [...] no puede entenderse si antes no se aprende a entender la lengua en la cual está escrito y conocer sus caracteres. Está escrito en la lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin los cuales es imposible entender humanamente ni una palabra. Sin ellos es agitarse vanamente en un oscuro laberinto."

GALILEO GALILEI

Matemáticas en nuestro bolsillo

En la sociedad de la información necesitan incorporar algoritmos que lleven a cabo detección de errores y, si fuera posible, su corrección.

Matemáticas en nuestro bolsillo

En la sociedad de la información necesitan incorporar algoritmos que lleven a cabo detección de errores y, si fuera posible, su corrección.

Los mejores ejemplos cotidianos son los CD y los DVD en los que la corrección de errores se lleva a cabo continuamente y en tiempo real con algoritmos muy complicados.

CD $\longrightarrow$ RS(32,28), RS(28,24) DVD $\longrightarrow$ RS(208,192), RS(182,172)

También hay otros ejemplos "de bolsillo". menos poderosos.

La letra del DNI/NIF

Correspondencia

Números-caracteres

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T	R	W	A	G	M	P	Y	D	F	X	B

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E

La letra del DNI/NIF se obtiene consultando en la tabla anterior el resto del número al dividir entre 23.

Ejemplo: $41592654 \div 23 \rightarrow \text{resto} = 6 \Rightarrow \text{P}$

La letra del DNI/NIF

Correspondencia

Números-caracteres

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T	R	W	A	G	M	P	Y	D	F	X	B

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E

La letra del DNI/NIF se obtiene consultando en la tabla anterior el resto del número al dividir entre 23.

Ejemplo: $41592654 \div 23 \to \text{resto} = 6 \;\Rightarrow\; \text{P}$

Con esta información redundante, se pueden detectar errores pero no corregirlos. Pero se puede recuperar el valor de un dígito ilegible:

415926[redacted]4 P $\Rightarrow$ 41592654 P

El Código Cuenta Cliente

¿Es posible posible hacer una transferencia por error?

Sí, pero es difícil. En un cajero automático debemos teclear 20 dígitos del Código Cuenta Cliente (CCC). Los 8 primeros indican la entidad y la sucursal y los 10 últimos el número de cuenta:

$$\lfloor e_1 \lfloor e_2 \lfloor e_3 \lfloor e_4 \rfloor \; \lfloor s_1 \lfloor s_2 \lfloor s_3 \lfloor s_4 \rfloor \; \lfloor d_1 \lfloor d_2 \rfloor \; \lfloor c_1 \lfloor c_2 \lfloor c_3 \lfloor c_4 \lfloor c_5 \lfloor c_6 \lfloor c_7 \lfloor c_8 \lfloor c_9 \lfloor c_{10} \rfloor$$

El Código Cuenta Cliente

¿Es posible posible hacer una transferencia por error?

Sí, pero es difícil. En un cajero automático debemos teclear 20 dígitos del Código Cuenta Cliente (CCC). Los 8 primeros indican la entidad y la sucursal y los 10 últimos el número de cuenta:

e_1	e_2	e_3	e_4	s_1	s_2	s_3	s_4	d_1	d_2	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}

Los dígitos centrales d_1, d_2, son los *dígitos de control* que sirven para verificar los datos y deben satisfacer que 11 divida a

$$d_1 + 2^2 e_1 + 2^3 e_2 + \cdots + 2^9 s_4 \quad \text{y} \quad d_2 + 2^0 c_1 + 2^1 c_2 + \cdots + 2^9 c_9.$$

Tecleando al azar hay una probabilidad entre 100 de que demos con unos números que sean válidos.

El ISBN de 13 cifras (EAN 13) (último dígito de control)

ISBN 978-1234567897

9 781234 567897

$$978123456789|7$$

$\boxed{\text{impares}}$	$9+8+2+4+6+8=37$
$\boxed{3\cdot\text{pares}}$	$3\times(7+1+3+5+7+9)=96$
$\boxed{\text{suma}+d}$	$37+96+7$ es divisible por 10

El ISBN de 13 cifras (EAN 13) (último dígito de control)

ISBN 978-1234567897

9 781234 567897

$$978123456789|7$$

impares	$9+8+2+4+6+8=37$
3·pares	$3\times(7+1+3+5+7+9)=96$
suma+d	$37+96+7$ es divisible por 10

Corregir errores

Si cada bit lo enviamos 3 veces y hay a lo más un error en la transmisión, lo sabremos detectar y corregir

$$1011 \xrightarrow{\text{codificación}} 111\ 000\ 111\ 111 \xrightarrow{\text{canal defectuoso}} 111\ 000\ 101\ 111$$

Parece que esto es óptimo, pero hay una forma de codificar 4 bits en 7 que permite detectar y corregir un error.

El ISBN de 13 cifras (EAN 13) (último dígito de control)

ISBN 978-1234567897

9 781234 567897

$$978123456789|7$$

impares	$9+8+2+4+6+8=37$
3·pares	$3\times(7+1+3+5+7+9)=96$
suma+d	$37+96+7$ es divisible por 10

Corregir errores

Si cada bit lo enviamos 3 veces y hay a lo más un error en la transmisión, lo sabremos detectar y corregir

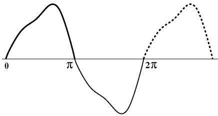
$$1011 \xrightarrow{\text{codificación}} 111\ 000\ 111\ 111 \xrightarrow{\text{canal defectuoso}} 111\ 000\ 111\ 111$$

Parece que esto es óptimo, pero hay una forma de codificar 4 bits en 7 que permite detectar y corregir un error.

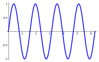
Matemáticas en el ordenador

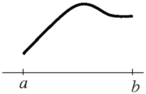
Análisis de Fourier

Las ondas periódicas son superposiciones de tonos puros.



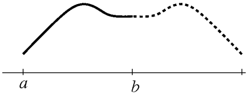
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$



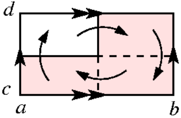


$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

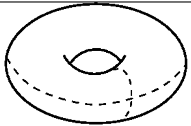
$\longrightarrow$



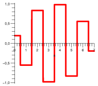
Onda periódica



$\longrightarrow$

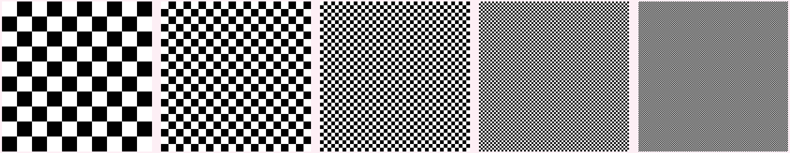


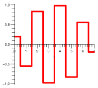
(2D)



En el mundo digital se utilizan tonos puros discretizados para analizar señales de audio (1D) o de vídeo (2D)

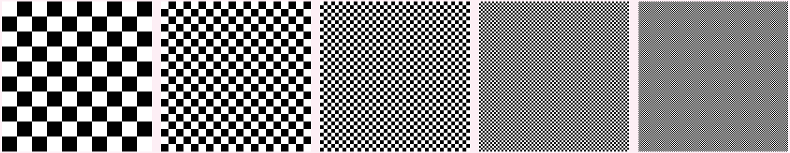
Las frecuencias muy altas son indistinguibles





En el mundo digital se utilizan tonos puros discretizados para analizar señales de audio (1D) o de vídeo (2D)

Las frecuencias muy altas son indistinguibles



En audio, según muestran los experimentos psicoacústicos, además los sonidos de volumen alto ocultan los siguientes más bajos y los tonos bajos ocultan los siguientes tonos altos. De aquí que el formato MP3 sea matemáticamente complejo.

¿Qué contiene un fichero .jpg?

Una foto (imagen) se subdivide en trozos pequeños (8×8 pixels) que se analizan en frecuencias. La componente en las frecuencias más grandes se consideran "con menos decimales", exactamente se guarda, sin decimales, la componente de la frecuencia (f_x, f_y) dividida por el elemento correspondiente de esta tabla: la llamada matriz de cuantificación.

$f_x \backslash f_y$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	16	11	10	16	24	40	51	61
1	12	12	14	19	26	58	60	55
2	14	13	16	24	40	57	69	56
3	14	17	22	29	51	87	80	62
4	18	22	37	56	68	109	103	77
5	24	35	55	64	81	104	113	92
6	49	64	78	87	103	121	120	101
7	72	92	95	98	112	100	103	99

¿Qué contiene un fichero .jpg?

Una foto (imagen) se subdivide en trozos pequeños (8×8 pixels) que se analizan en frecuencias. La componente en las frecuencias más grandes se consideran "con menos decimales", exactamente se guarda, sin decimales, la componente de la frecuencia (f_x, f_y) dividida por el elemento correspondiente de esta tabla: la llamada matriz de cuantificación.

$f_x \backslash f_y$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	16	11	10	16	24	40	51	61
1	12	12	14	19	26	58	60	55
2	14	13	16	24	40	57	69	56
3	14	17	22	29	51	87	80	62
4	18	22	37	56	68	109	103	77
5	24	35	55	64	81	104	113	92
6	49	64	78	87	103	121	120	101
7	72	92	95	98	112	100	103	99

Típicamente cada trozo de foto no tiene grandes variaciones y por tanto las frecuencias grandes desaparecen casi por completo. Entonces se tiene un fichero con un montón de ceros que es fácil de comprimir. El resultado es el `.jpg`.

Los bordes crean frecuencias altas con grandes coeficientes, lo que combinado a la subdivisión en trozo da lugar a algunos fenómenos curiosos. Las imágenes siguientes son todas de 72×72 pixels:

$\longrightarrow$ Cuadrados 8×8 $\longrightarrow$ Tamaño$=$ 403 bytes

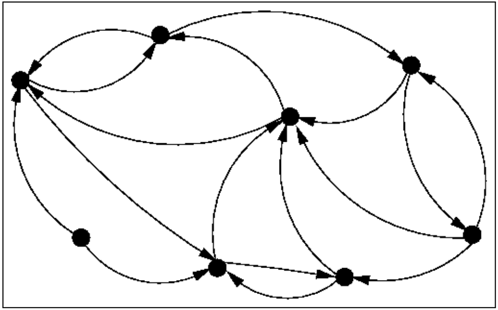
$\longrightarrow$ Cuadrados 9×9 $\longrightarrow$ Tamaño$=$ 2816 bytes

$\longrightarrow$ Círculo nítido $\longrightarrow$ Tamaño$=$ 1309 bytes

$\longrightarrow$ Círculo difuso $\longrightarrow$ Tamaño$=$ 1005 bytes

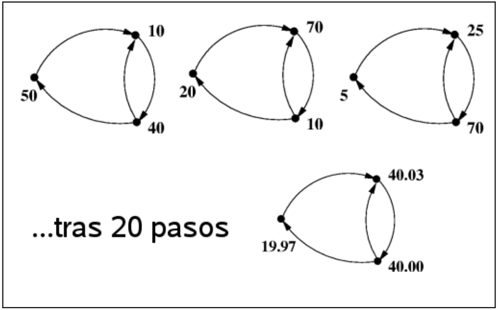
Paseos aleatorios

Si en una maraña de puntos conectados (un *grafo*) dejamos 100 personas que eligen caminos al azar, al cabo de algún tiempo ¿dónde estarán?



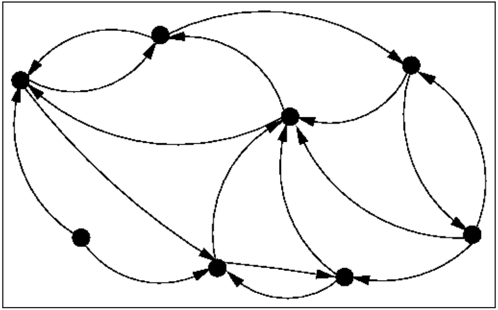
Paseos aleatorios

Si en una maraña de puntos conectados (un *grafo*) dejamos 100 personas que eligen caminos al azar, al cabo de algún tiempo ¿dónde estarán?



Paseos aleatorios

Si en una maraña de puntos conectados (un *grafo*) dejamos 100 personas que eligen caminos al azar, al cabo de algún tiempo ¿dónde estarán?



Éste es esencialmente el método con el que funciona el algoritmo que ordena los resultados en el buscador de Google (Page Rank Algorithm).

Bibliografía para aprender más:

- J. Cilleruelo, A. Córdoba. *Los números*. CSIC 2010.
- T. Gowers. *Matemáticas una breve introducción*. Alianza Editorial 2008.
- G.H. Hardy. *Apología de un matemático*. Nivola 1999.
- S. Lang. *El placer estético de las matemáticas*. Alianza Universidad 1992.
- M. Liebeck. A concise introduction to pure mathematics. Chapman & Hall/CRC Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.
- I. Stewart. *De aquí al infinito*. Crítica 1998.
- I. Stewart. *Locos por las matemáticas*. Crítica 2006.
- I. Stewart. *Cartas a una joven matemática*. Crítica 2006.

Hay copia de esta presentación en `http://www.uam.es/fernando.chamizo`

La solución al ejercicio

$$\begin{cases} (2+\sqrt{3})^n = A + B\sqrt{3} & \text{con } A \text{ y } B \text{ enteros} \\ (2-\sqrt{3})^n = A - B\sqrt{3} \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2A.$$

Se tiene $2-\sqrt{3} = 0.2679\dots$ (aproximadamente a una cuarta parte). Entonces $(2-\sqrt{3})^n$ se acerca rápidamente a cero cuando n crece y

$$(2+\sqrt{3})^n = 2A - (0.2679\dots)^n = 2A - 0.00\dots$$