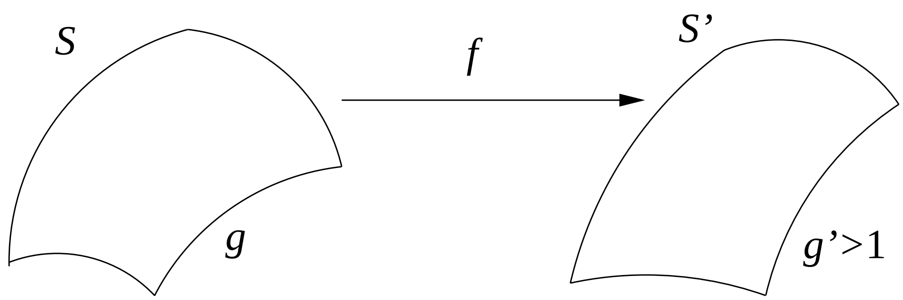
Morfismos y matrices de periodos

Fernando Chamizo   31 de enero de 2006

1. El problema

$S,\ S' =$ superficies de Riemann compactas



$$\mathcal{N}(S,S') = \#\{f : S \longrightarrow S' \text{ morfismo}\}$$

- **de Franchis** (1913) $\mathcal{N}(S,S') < \infty$, $\sum_{S'} \mathcal{N}(S,S') < \infty$
- **Kani** (1986) $\sum_{S'} \mathcal{N}(S,S') \not< \text{polinomio}(g)$
- **Martens** (1988) $\log \mathcal{N}(S,S') \le 4g^2$
- **Tanabe** (1999) $\log \mathcal{N}(S,S') \le 2g\log g + \dots$

2. El teorema

Versión intuitiva: Si hay muchísimos morfismos, la matriz de periodos de S debe ser grande.

$\Omega_c = (I,\ A + iB)$ forma compleja (habitual)

$\Omega_r = \begin{pmatrix} I & A \\ O & B \end{pmatrix}$ forma real

$$M = \frac{1}{3} + \|\Omega_r^{-1} + \Omega_r^t\| + \|\Omega_r^{-1}\Omega_r^t\|$$

(donde $\|A\| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$)

Teorema:

$$\mathcal{N}(S, S') < \pi^{-1/2}(2g)^{3/2}(12eM\sqrt{2})^g$$

Obs.: $a_{ij}, b_{ij} <$cte $\rightsquigarrow M \approx \sqrt{g} \rightsquigarrow$

$$\log \mathcal{N}(S, S') \leq g \log g + \ldots$$

3. La demostración

$$f : S \longrightarrow S' \Rightarrow \quad \widetilde{f} : J(S) \longrightarrow J(S')$$

(retículos)

$$f^* : \mathcal{H}(S') \longrightarrow \mathcal{H}(S)$$

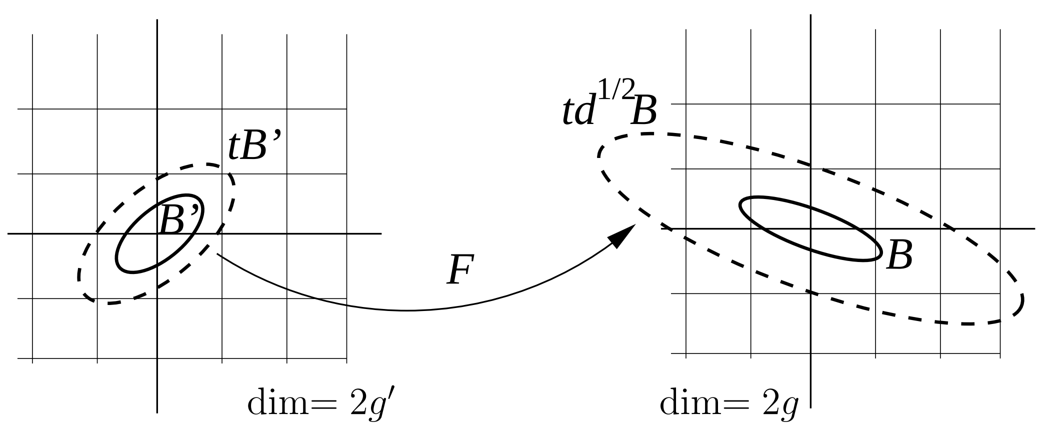
$\{\omega_1, \ldots, \omega_{2g}\}$ base de diferenciales armónicas dual de la canónica de $H_1(S, \mathbb{Z})$.

$$[\omega_i, \omega_j] = \int \omega_j \wedge *\omega_i \qquad [[\omega]] = [\omega, \omega]^{1/2}$$

$$F : \mathbb{Z}^{2g'} \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g}$$

$$\deg(f) = d \;\Rightarrow\; [[F(\vec{x})]] = \sqrt{d}\;[[\vec{x}]]'$$

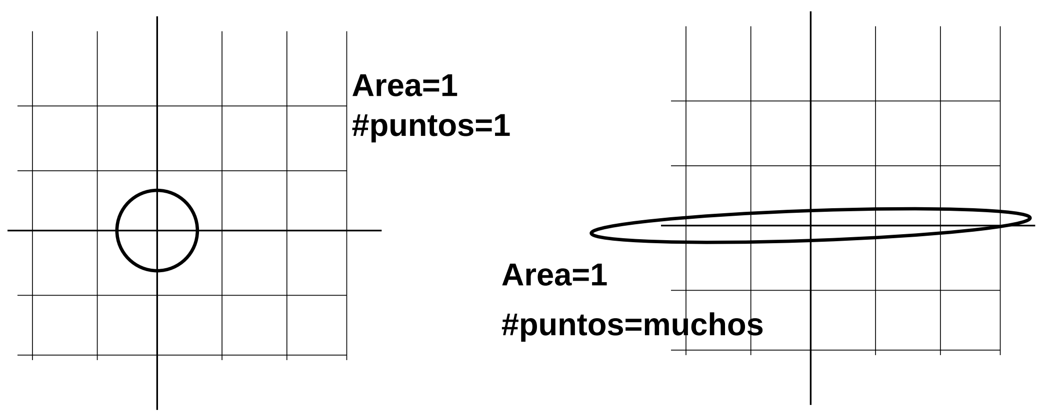
Vol(B)=Vol(bola unidad) $= \pi^g/g!$



- **Riemann-Hurwitz:** controlamos d
- **Teorema de Minkowski (en geometría de números):** controlamos t
- **Puntos del retículo:** controlamos $\#\{t\sqrt{d}B \cap \mathbb{Z}^{2g}\}$
- **Superficies de Riemann:** $\#\{f : f^*\omega = \eta\} \leq (2g-2)(2g'-1)$. Controlamos el número de morfismos correspondientes a cada par de puntos

¿Y dónde aparece la matriz de periodos?

Para controlar la excentricidad de B



Hay una relación entre $[[\vec{x}]]$ y la matriz de periodos

formas armónicas $\longleftrightarrow$ formas holomorfas

[1]Visite nuestra web `http://www.uam.es/ntatuam`