Los puntos de Lagrange

Fernando Chamizo (UAM-ICMAT)

Centro Penitenciario de Jaén
Alcalá la Real

UNED Jaén

24, 25 de junio de 2025

Universidad Autónoma de Madrid

Un poco de filosofía

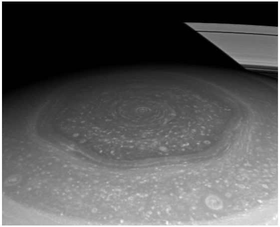
I. Newton (1643–1727) (artífice de la gravitación)

(Fuente: MacTutor)

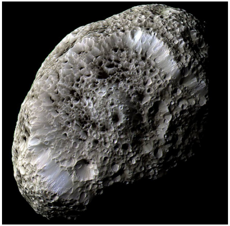
No sé cómo me verá el resto del mundo; pero yo me considero como un niño jugando en la playa que se alegra de vez en cuando al encontrar un guijarro más liso o un concha más bonita de lo normal, mientras delante de mí, sin que me diera cuenta, se extiende el vasto océano de la verdad.

¿La ciencia es una recopilación de observaciones?

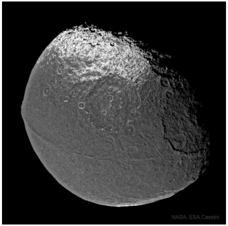
Saturno



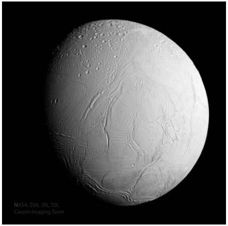
Su polo norte



Hiperión



Jápeto

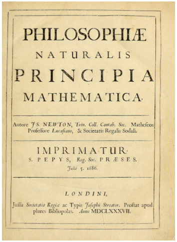


Encélado

Fuentes, APOD 20241102, 20130220, 20110227, 20230226, 20250610

La ciencia, y muy especialmente la física, busca **primeros principios** que expliquen los ejemplos (experimentos) y permitan hacer predicciones.

Uno de los grandes motores de la revolución científica fue la mecánica celeste, la explicación de los movimientos de los astros a través de la ley de gravitación universal. La obra de Newton, *Principios matemáticos de la filosofía natural* mostraba el cosmos funcionando como un mecanismo de relojería.



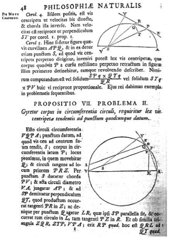
PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J. S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

1ª edición (1687)



48 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendiculum *ST* per corol. 1. prop. 1.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea *APQ*, & in ea detur etiam punctum *S*, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis *P* a cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $STq \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Esto circuli circumferentia *VQPA*; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, *S*; corpus in circumferentia latum *P*; locus proximus, in quem movebitur *Q*; & circuli tangens ad locum priorem *PRZ*. Per punctum *S* ducatur chorda *PV*; & acta circuli diametro *VA*, jungatur *AP*; & ad *SP* demittatur perpendiculum *QT*, quod productum occurrat tangenti *PR* in *Z*; ac denique per punctum *Q* agatur *LR*, quæ ipsi *SP* parallela sit, & occurrat tum circulo in *L*, tum tangenti *PZ* in *R*. Et ob similia triangula *ZQR*, *ZTP*, *VPA*; erit *RP quad.* hoc est *QRL* ad *QT quad.*

Una página

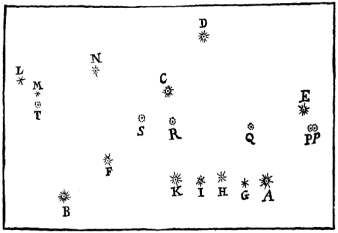


Ilustración del movimiento de un cometa

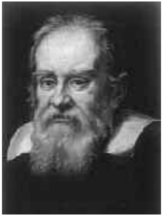
(Fuente: Wikipedia)

Las matemáticas han estado desde la antigüedad muy ligadas a la astronomía.

El *quadrivium* agrupaba las cuatro "artes liberales" relacionadas con las matemáticas: aritmética, geometría, música y astronomía.

Galileo Galilei (1564–1642) **(Defensor del heliocentrismo)**

"[El universo] no puede leerse hasta que no hayamos aprendido el lenguaje y nos sean familiares los caracteres en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender ni una palabra".



(Fuente: MacTutor)

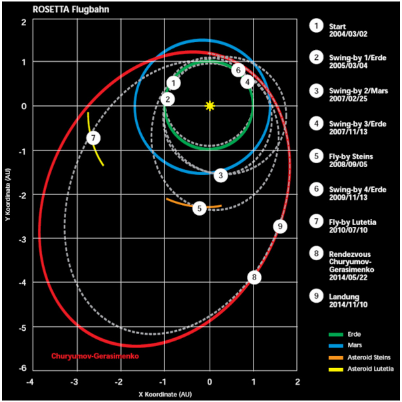
Las matemáticas tienen un poder increíble para formular modelos físicos que funcionen como primeros principios y para extraer conclusiones a partir de ellos.

E.P. Wigner (1902–1995) **(Premio Nobel de Física en 1963)**

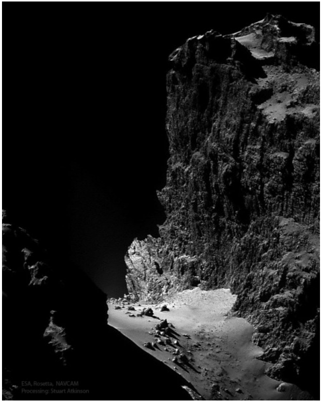
(Fuente: MacTutor)

"La enorme utilidad de las matemáticas en las ciencias naturales es algo que roza el misterio y que no tiene explicación racional".

"El milagro de lo apropiado que es el lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes de la física es un regalo maravilloso que ni entendemos ni merecemos".



Trayectoria



Cometa (Fuente: ESA)

La sonda espacial Rosetta de la ESA aprovechó el tirón gravitacional de varios astros durante 10 años para encontrarse con el cometa Churyumov-Gerasimenko. ¡Esto requiere un montón de ecuaciones y cálculos!

R. Hamming (1915–1998)

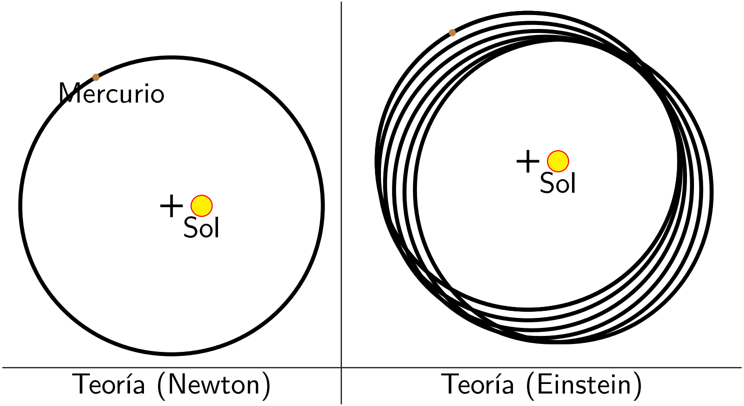
(Fuente: MacTutor)

No es que la ciencia explique "por qué" las cosas son como son –la gravitación no explica por qué las cosas caen– sino que la ciencia da tantos detalles del "cómo" que tenemos la sensación de que entendemos el "porqué".

Aspiramos a que haya pocos principios, pero por el hecho de ser principios no sabemos deducirlos, no entendemos por qué existen.

No sabemos deducir la gravitación de primeros principios

Las teorías científicas siempre están sujetas a revisión



Descontando el efecto del resto de los planetas, la “circunferencia” de la órbita de Mercurio gira alrededor del Sol como un *hula hoop*.

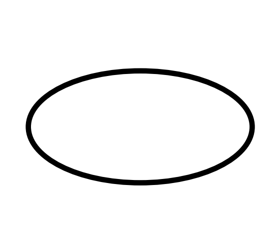
Es un efecto muy débil: un giro completo cada 3 millones de años.

Kepler nos engaña

Primera ley de Kepler (1609)

Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos.

Kepler (Fuente: MacTutor)



Elipse

Newton (Fuente: MacTutor)

Newton probó para las órbitas periódicas:

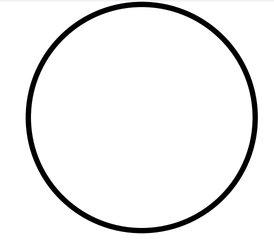
$$\text{Ley de Gravitación universal} \; \underset{\Leftarrow}{\Rightarrow} \; \text{órbitas elípticas}$$

Esto es un poco engañoso, las órbitas de los 8 planetas son circunferencias casi perfectas.

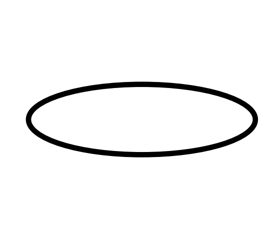
Medida matemática de la redondez de una elipse:

$$e = \text{excentricidad}$$

$e \approx 0 \ \rightarrow$ muy redonda, $\qquad e \approx 1 \ \rightarrow$ muy oblonga.



$e = 0{,}1$



$e = 0{,}95$

Matemáticas

$$\text{Largo} = \text{Ancho}\sqrt{1 - e^2}$$

Cuenta de la vieja (e pequeño)

$50e^2 \approx$ % de reducción

Planetas interiores

	☿ Mercurio	♀ Venus	♁ Tierra	♂ Marte
e	0.2056	0.0068	0.0167	0.0934

Planetas exteriores

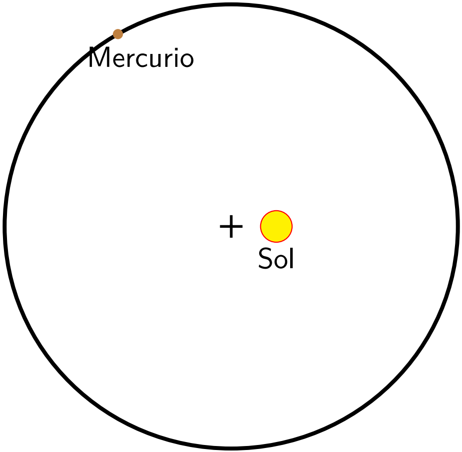
	♃ Júpiter	♄ Saturno	⛢ Urano	♆ Neptuno
e	0.0484	0.0542	0.0472	0.0086

Caso extremo: Mercurio $\to$ 2 %
Caso medio: Júpiter, Urano $\to$ 0,1 %
Nuestra casa: Tierra $\to$ 0,01 %

Las órbitas de los cometas sí son muy elípticas.
Cometa Halley: 75 %

Órbita de Mercurio a escala

¿Alguien no la ve redonda?



Los tamaños del Sol y Mercurio no están a escala.

Dos fuerzas que mueven los mundos

Protagonistas de la mecánica

- **Fuerza** $\rightarrow$ lo que causa aceleraciones

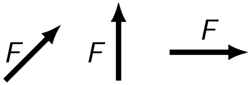
$$F = m \cdot a$$

- **Aceleración** $\rightarrow$ variación de la velocidad con el tiempo

$$a = \dot{v} \qquad \left(a = \frac{dv}{dt}\right)$$

- **Velocidad:** Todos sabemos qué es eso

Son **vectoriales**:
tienen una magnitud
y una dirección

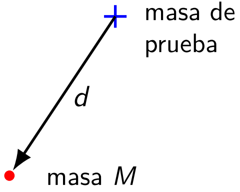


Ley de gravitación universal

Masa puntual $M \rightarrow$ aceleración a

$$\boxed{a = \frac{GM}{d^2}}$$

dirigida hacia la masa



$d =$ distancia
$G =$ constante de gravitación $6{,}67430 \cdot 10^{-11}\ m^3/(kg \cdot s^2)$

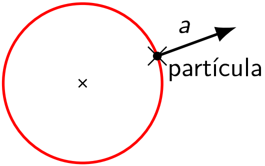
Newton $\rightarrow$ la ley también es cierta cuando en vez de una masa puntual tenemos una masa esférica y consideramos la distancia al centro.

Fuerza centrífuga

Experimentada por partículas al obligarlas a girar

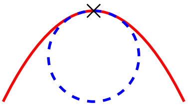
$$\boxed{a = \omega^2 R}$$

radial hacia afuera



$R =$ radio

$\omega = 2\pi$ vueltas/tiempo (velocidad angular)



Para movimientos no circulares, la fuerza centrífuga se calcula aproximando por una circunferencia.

¿Por qué no medimos ω en vueltas/tiempo?

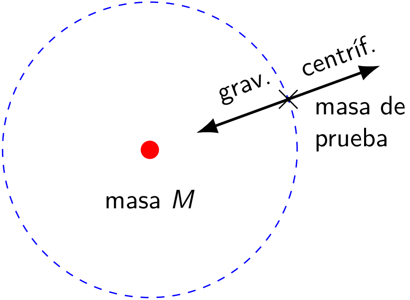
En matemáticas es común medir el número de vueltas multiplicadas por 2π, de este modo

$$\text{longitud} = \text{nº vueltas} \times \text{radio.}$$

	Gente de a pie	Matemático
Porción α	$1/8$ de pizza	$\pi/4$ de pizza
Una pizza en 1 h	$\omega = 1/h$	$\omega = 2\pi/h$
Longitud borde	$2\pi\alpha R$	αR
Área	$\pi\alpha R^2$	$\alpha R^2/2$

Uno igual a dos

Problema circular de un cuerpo

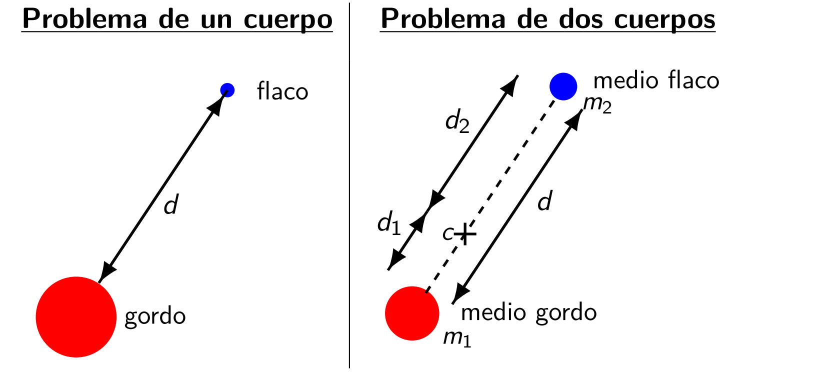


$$\frac{GM}{d^2} = \omega^2 d$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\omega^2 = \frac{GM}{d^3}}$$

Parte de la tercera ley de Kepler.

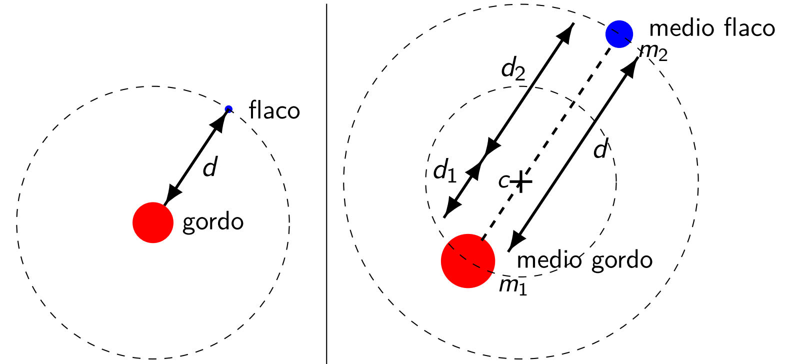
Estación espacial: $d = 6798\ km \to \omega = 2\pi \cdot 15{,}5$ vueltas/día.
Telescopio Hubble: $d = 6918\ km \to \omega = 2\pi \cdot 15{,}1$ vueltas/día.
Satélite geoestacionario: $d = 36000\ km \to \omega = 2\pi \cdot 1$ vuelta/día.

¿Qué ocurre al considerar dos masas, cada una ejerciendo una gravedad no despreciable?



$c =$ centro de masas.
d_1, $d_2 =$ inversamente proporcionales a m_1, m_2.

Ambos problemas son "iguales" cambiando el centro a c

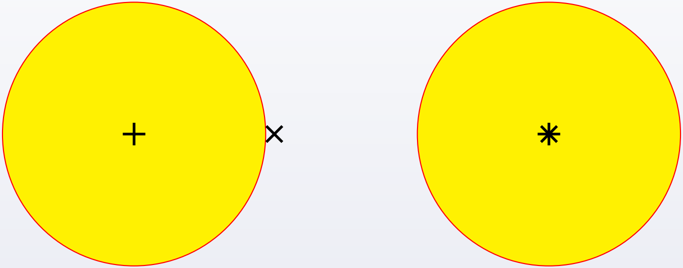


$$\omega^2 = \frac{GM}{d^3}$$

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}$$

Distancia mayor $\rightarrow$ frecuencia menor (d crece $\Rightarrow \omega$ decrece)
Masa mayor $\rightarrow$ frecuencia mayor (m crece $\Rightarrow \omega$ crece)

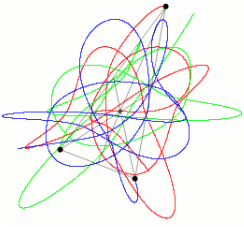
Radio del Sol: 695 700 km.
Centro de masas Sol-Júpiter: 742 370 km.
Centro de masas Sol-Tierra: 449 km.



Estrictamente, el Sol no está fijo, se mueve con respecto al centro de masas del Sistema Solar.

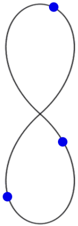
Cuando tres no es multitud

Estudiar tres cuerpos bajo la acción gravitatoria es complicadísimo.



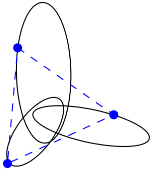
Simulación

(Fuente: Wikipedia)



Solución especial

Chenciner, Montgomery 2000



Solución especial

Lagrange 1772

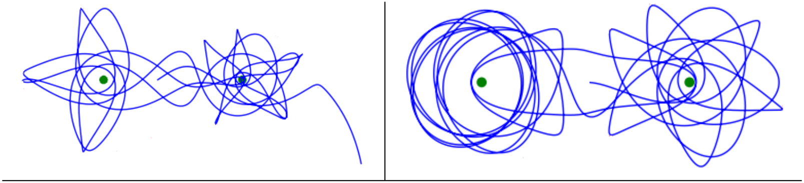
Euler (1765) $\rightarrow$ soluciones masas alineadas.

Lagrange (1772) $\rightarrow$ soluciones masas en triángulo equilátero.

Problema circular restringido de tres cuerpos

Suponemos que en el problema circular de dos cuerpos añadimos una tercera masa m_3 muy pequeña.

Incluso así las órbitas generales son complicadas.



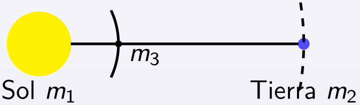
Algunas órbitas para un observador en la línea que une m_1 y m_2

En general:

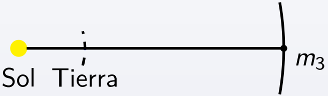
- m_1 y m_2 $\rightarrow$ giro con velocidad angular ω alrededor de c
- m_3 $\rightarrow$ órbitas raras si no está muy cerca de m_1 o m_2

¿Es posible que m_3 siga una trayectoria circular con la misma ω que m_1 y m_2?

Aplicación: Situar telescopios, observatorios, estaciones espaciales, etc. que conserven la posición relativa sin gastar combustible.

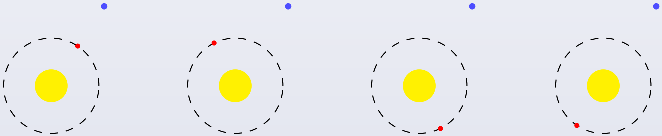


m_3 cerca, $\omega_3 > \omega$



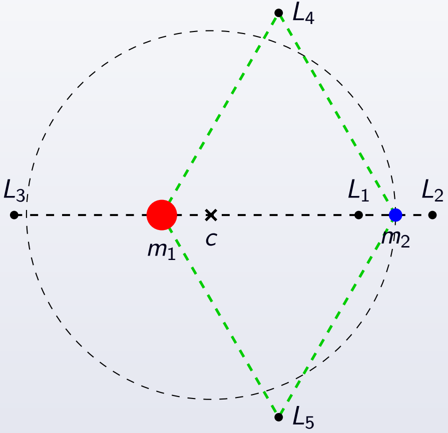
m_3 lejos, $\omega_3 < \omega$

Desfase con la Tierra → problemas de comunicación y accesibilidad



Hay cinco posiciones relativas que permiten que m_3 siga una órbita circular con la misma ω que m_1 y m_2. Las tres masas se moverían como unidas con barras rígidas, conservando las distancias.

Estos son los **puntos de Lagrange**



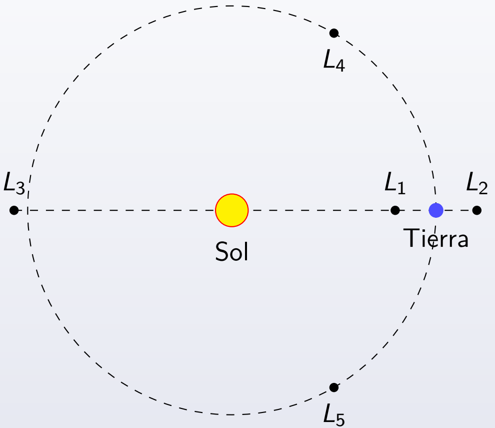
$L_1,\ L_2,\ L_3$ $\Downarrow$ "Fáciles" físicamente (intuitivos)
$L_4,\ L_5$ $\Downarrow$ "Fáciles" matemáticamente (con ecuaciones)

$\triangle\, m_1\, m_2\, L_4, \quad \triangle\, m_1\, m_2\, L_5$

triángulos equiláteros

Sistema Sol-Tierra

La distancia de la Tierra al Sol es 150 millones de kilómetros.



Respecto de la órbita terrestre

Mkm = **mill. de km**

- L_1: 1,5 Mkm por dentro
- L_2: 1,5 Mkm por fuera
- L_3: 0,026 Mkm por fuera
- L_4, L_5 en la órbita (150 Mkm)

Anécdota: Un objeto en L_3 estaría siempre tapado por el Sol. En ciencia ficción es una excusa para una antiTierra.

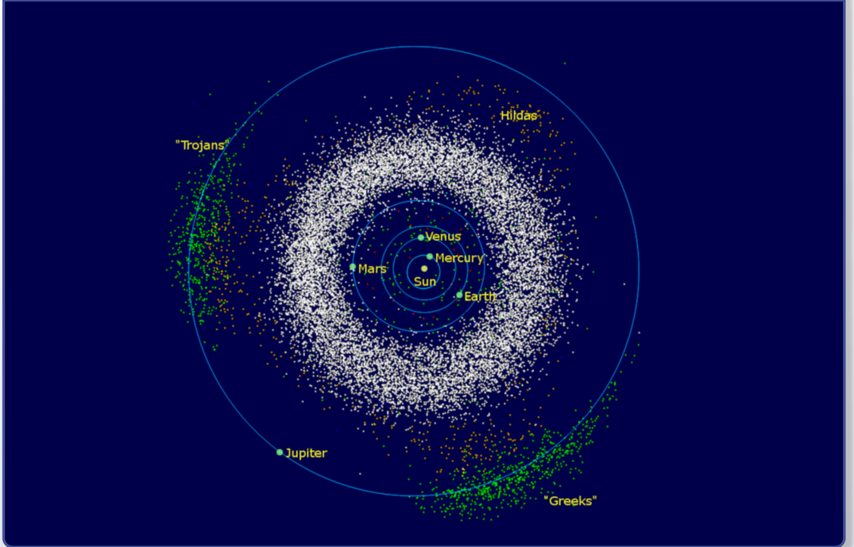
Objetos actualmente en puntos de Lagrange Sol-Tierra

- (L1) **DSCOVR** (antes llamado **Triana**). Satélite climático.
- (L1) **Aditya-L1**. Observación solar.
- (L2) **JWST**. Telescopio espacial.
- (L2) **Euclid**. Observación de galaxias.
- (L4) (alrededores) **2010** $\mathbf{TK_7}$. Asteroide ($\approx 0{,}3\,km$).
- (L4) (alrededores) **2020** $\mathbf{XL_5}$. Asteroide ($\approx 1{,}2\,km$).

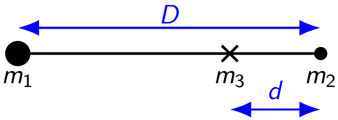
Objetos anteriores importantes en L_2

- **WMAP**. Medición de la radiación de fondo.
- **Gaia**. Estudio de las estrellas.

Asteroides en el Sistema Solar interior (Wikipedia)



Explicación de L_1 (balance de aceleraciones sobre m_3)



Gravedad de m_1 = Gravedad de m_2 + centrífuga

$$\frac{Gm_1}{(D-d)^2} = \frac{Gm_2}{d^2} + \omega^2 d$$

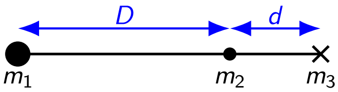
$d \approx 0 \quad \rightarrow$ gana el lado derecho

$d \approx D \quad \rightarrow$ gana el lado izquierdo

$\Downarrow$

A cierta distancia (L_1), se compensan

Explicación de L_2 (balance de aceleraciones sobre m_3)



$$\text{Gravedad de } m_1 + \text{Gravedad de } m_2 = \text{centrífuga}$$

$$\frac{Gm_1}{(D+d)^2} + \frac{Gm_2}{d^2} = \omega^2 d$$

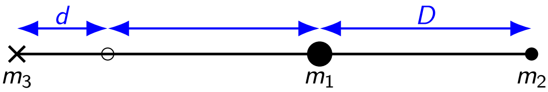
$d \approx 0 \quad \rightarrow \quad$ gana el lado izquierdo

d grande $\quad \rightarrow \quad$ gana el lado derecho

$$\Downarrow$$

A cierta distancia (L_2), se compensan

Explicación de L_3 (balance de aceleraciones sobre m_3)



Gravedad de m_1 + Gravedad de m_2 = centrífuga

$$\frac{Gm_1}{(D+d)^2} + \frac{Gm_2}{(2D+d)^2} = \omega^2 d$$

$d \approx 0$	$\rightarrow$	gana el lado izquierdo
d grande	$\rightarrow$	gana el lado derecho

$\Downarrow$

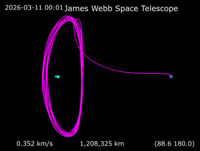
A cierta distancia (L_3), se compensan

Para decir toda la verdad...

Matemáticamente, L_1, L_2 y L_3 son puntos **inestables**: Mínimas perturbaciones de un objeto allí, acabarán alejándolo.

En la práctica, son poco inestables, hay órbitas (de Lissajous, de halo) que permiten estar cerca de ellos con poco gasto de combustible.

Telescopio James Webb



Órbita (Wikipedia)

L_4 y L_5 son puntos **estables**: Pequeñas perturbaciones de un objeto allí, no lo alejan significativamente.

¿Cómo sabemos que existen L_4 y L_5?

¿Cómo sabemos que no existen otros puntos de Lagrange?

¿Cómo simular las trayectorias (con ordenador)?

¿Cómo deducir sus propiedades?

Ecuaciones Matemáticas

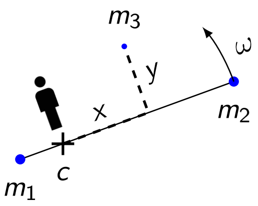
La clave para obtener ecuaciones razonables es ponerse en el lugar de un observador que está en c y gira con m_1 y m_2.

a_{grav} = aceleración gravitatoria debida a m_1 y m_2

a_3 = aceleración de m_3

$a_{3(\text{obs})}$ = para el observador

Ecuación fundamental: $\boxed{a_3 = a_{\text{grav}}}$



La posición de m_3 para el observador es $\mathbf{r} = (x, y)$. Indicando con un punto la tasa de variación con respecto del tiempo:

$$a_{3(\text{obs})} = \dot{v} = (\dot{x}, \dot{y})^{\cdot} = (\ddot{x}, \ddot{y}) = \ddot{\mathbf{r}}$$

Problema: $a_3 \neq a_{3(\text{obs})}$ porque el observador gira y también sufre aceleraciones.

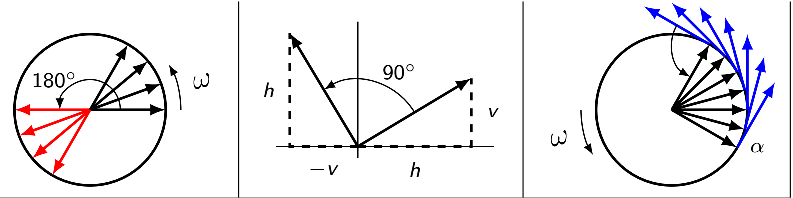
¿Cómo afectan los giros a las aceleraciones?

¿Qué relación hay entre a_3 y $a_{3(\text{obs})}$?

Para estudiar este problema, definimos

$$G_\alpha = \text{Giro con velocidad angular } \omega \text{ partiendo del ángulo } \alpha$$

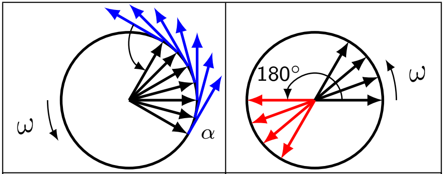
y consideramos tres hechos geométricos:



$G_{180^\circ} = -G_0$	$G_{90^\circ}(h,v) = (-v,h)$	$\dot{G}_\alpha = \omega G_{\alpha+90^\circ}$

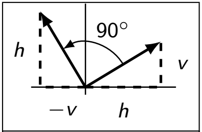
$G_\alpha =$ Giro con velocidad angular ω partiendo del ángulo α

$$
\begin{aligned}
(G_0\mathbf{r})^\cdot &= \dot{G}_0\mathbf{r} + G_0\dot{\mathbf{r}} + G_0\dot{\mathbf{r}} \\
&= \omega G_{90^\circ}\mathbf{r} + G_0\dot{\mathbf{r}}
\end{aligned}
$$



$\dot{G}_\alpha = \omega G_{\alpha+90^\circ}$ | $G_{180^\circ} = -G_0$

$$
\begin{aligned}
(G_0\mathbf{r})^{\cdot\cdot} &= \omega(G_{90^\circ}\mathbf{r})^\cdot + (G_0\dot{\mathbf{r}})^\cdot \\
&= \omega^2 G_{180^\circ}\mathbf{r} + \omega G_{90^\circ}\dot{\mathbf{r}} + \omega G_{90^\circ}\dot{\mathbf{r}} + G_0\ddot{\mathbf{r}} \\
&= -\underbrace{\omega^2 G_0\mathbf{r}}_{\text{a. centrífuga}} + \underbrace{2\omega G_{90^\circ}\dot{\mathbf{r}}}_{\text{a. de Coriolis}} + \underbrace{G_0\ddot{\mathbf{r}}}_{a_{3(\text{obs})}\text{ girada}}
\end{aligned}
$$

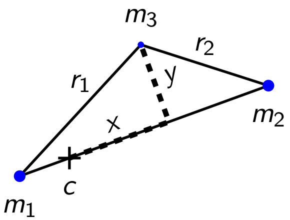


$G_{90^\circ}(h,v) = (-v,h)$

$$a_3 = (G_0\mathbf{r})^{\cdot\cdot} = -\omega^2(x,y) + 2\omega(-\dot{y},\dot{x}) + (\ddot{x},\ddot{y})$$

Ecuación fundamental

$$-\omega^2(x,y) + 2\omega(-\dot{y},\dot{x}) + (\ddot{x},\ddot{y}) = a_{\text{grav}}$$



La fórmula para a_{grav} es un poco complicada porque hay que sumar la debida a m_1 y a m_2.

Cambiando las unidades para que $\omega = 1 =$ distancia de m_1 a m_2, se puede probar

$$a_{\text{grav}} = \Big(\frac{(\mu-1)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{r_2^3}, \frac{(\mu-1)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}\Big)$$

con $\mu = (1 + m_2/m_1)^{-1}$.

Ecuaciones desarrolladas tras el cambio de unidades

$$\begin{cases} -x + -2\dot{y} + \ddot{x} & = \dfrac{(\mu-1)(x+\mu)}{r_1^3} - \dfrac{\mu(x+\mu-1)}{r_2^3} \\ -y + 2\dot{x} + \ddot{y} & = \dfrac{(\mu-1)y}{r_1^3} - \dfrac{\mu y}{r_2^3} \end{cases}$$

¿Realmente sirven de algo ecuaciones tan complicadas?

Sí

Desde el punto de vista práctico, los ordenadores pueden resolver con mucha precisión ecuaciones (diferenciales) que contienen $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ esencialmente aproximando estas cantidades por incrementos.

$$\begin{cases} -x + -2\dot{y} + \ddot{x} & = \dfrac{(\mu-1)(x+\mu)}{r_1^3} - \dfrac{\mu(x+\mu-1)}{r_2^3} \\ -y + 2\dot{x} + \ddot{y} & = \dfrac{(\mu-1)y}{r_1^3} - \dfrac{\mu y}{r_2^3} \end{cases}$$

Además, sabiendo matemáticas, permiten un tratamiento teórico del problema. Por ejemplo, prueban la existencia de L_4 y L_5.

Puntos de Lagrange $\rightarrow x,\ y$ constantes $\rightarrow \dot{x} = \ddot{x} = \dot{y} = \ddot{y} = 0$

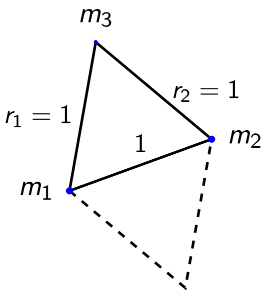
Ecuaciones de los puntos de Lagrange

$$\frac{(\mu-1)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{r_2^3} + x = \frac{(\mu-1)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} + y = 0$$

Si $y \neq 0$, no estamos en la situación de L_1, L_2 y L_3.

Ecuaciones de los puntos de Lagrange con $y \neq 0$

$$\frac{(\mu-1)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{r_2^3} + x = \frac{\mu-1}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} + 1 = 0$$



Es fácil ver que con $r_1 = r_2 = 1$ se cumplen estas ecuaciones

$\Downarrow$

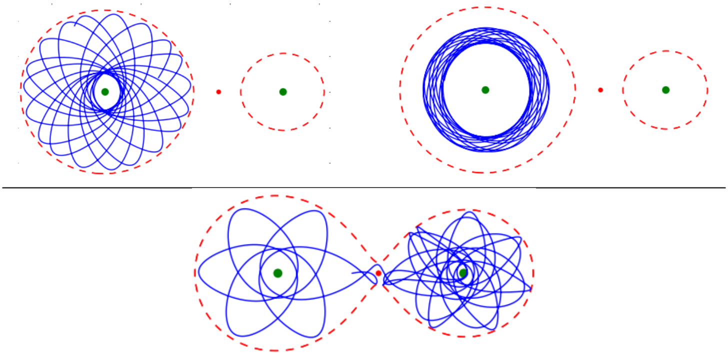
m_1, m_2 y m_3 a la misma distancia

$\Downarrow$

Se obtienen L_4 y L_5

El estudio matemático de las ecuaciones permite extraer otras conclusiones, por ejemplo, deducir la estabilidad de L_4 y L_5 y la inestabilidad de L_1, L_2 y L_3.

También permite abordar el problema de cuándo m_3 es "capturada" por alguna de las masas.



Hay una copia de las diapositivas en

https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/

¡Gracias por la atención!