

Kloostermanía

Fernando Chamizo

<http://www.uam.es/fernando.chamizo>

Universidad Autónoma de Madrid

Madrid, 20 de enero de 2010

Índice

- 1 Sumas de Kloosterman
- 2 Elementos básicos
- 3 Teoría espectral
- 4 La fórmula de traza de Selberg
- 5 La fórmula de Kuznetsov
- 6 Kloostermanía hoy
- 7 Algunas lecturas

Resumen

La teoría espectral de formas automorfas fue desarrollada por A. Selberg pasada la mitad del siglo XX siendo uno de sus resultados más conocidos la fórmula de traza. A principios de los años 80, N.V. Kuznetsov probó otra fórmula espectral con potenciales aplicaciones aritméticas que contenía unas sumas introducidas por Kloosterman más de cincuenta años atrás. La expectación causada por esta fórmula y los desarrollos iniciales en torno a ella se llamaron entonces *Kloostermanía*.

En esta charla intentamos dar una introducción muy básica de la teoría espectral de formas automorfas. No se supone ningún conocimiento previo del tema.

¿Qué son las sumas de Kloosterman?

Sumas de Kloosterman

$$S(m, n; c) = \sum_{a \cdot d \equiv 1 \pmod{c}} e\left(\frac{ma + nd}{c}\right) \quad \text{con } e(x) := e^{2\pi i x}$$

Equivalentemente

$$S(m, n; c) = \sum_{a=1}^c{}^* e\left(\frac{ma + n\bar{a}}{c}\right)$$

donde \bar{a} es el inverso de a módulo c y consecuentemente la suma está restringida a $\text{mcd}(a, c) = 1$.

Las sumas de Kloosterman sirven para medir la distribución de los inversos módulo c .

$$\mathcal{N}_{IJ} = \#\{a \in I : \bar{a} \in J\} = \sum_{a=1}^c \chi_I(a) \chi_J(\bar{a})$$

Las sumas de Kloosterman sirven para medir la distribución de los inversos módulo c .

$$\mathcal{N}_{IJ} = \#\{a \in I : \bar{a} \in J\} = \sum_{a=1}^c \chi_I(a) \chi_J(\bar{a})$$

$$\chi_J(x) = \begin{array}{c} \text{[Graph of } \chi_J(x) \text{: A periodic square wave with period } c \text{ and pulse width } J. \text{ The function is 1 on } [0, J] \text{ and } [c, c+J] \text{, and 0 elsewhere.]} \end{array} = \sum \alpha_n e^{i n x / c}$$

$$\mathcal{N}_{IJ} = \sum_{a=1}^c{}^* \chi_I(a) \chi_J(\bar{a}) = \sum_n \sum_m \alpha_n \beta_m \sum_{a=1}^c{}^* e\left(\frac{ma + n\bar{a}}{c}\right)$$

La historia no es siempre lógica (Parte I)

Lo más natural es que las sumas de Kloosterman hubieran aparecido en algún problema directamente relacionado con la distribución de los inversos pero no fue así. Kloosterman las introdujo en 1926 al crear una versión del método del círculo que permitiera aproximar el número de representaciones por formas cuadráticas de cuatro variables.

Ej: ¿Cuántas soluciones tiene $N = x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 7t^2$?

El método del círculo

$$\#\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}^n : N = a_1 + \dots + a_n\} = \int_0^1 S^n(x) e(-Nx) dx$$

$n = 2$, $\mathcal{A} = \{\text{primos} \leq N\} \leftrightarrow \text{Goldbach}$

$$S(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} e(ax)$$

$S(x)$ con $x \approx \frac{a}{q}$, \leftrightarrow distribución de \mathcal{A} en p. aritméticas

q pequeño \rightarrow cuenta directa

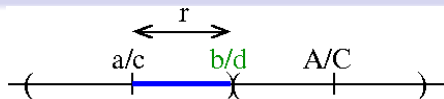
q grande \rightarrow sumas trigonométricas

Para problemas **binarios** como Goldbach en que la integral debería ser como $|\mathcal{A}|$ el método no funciona porque una indeterminación de $C|\mathcal{A}|^{1/2+\epsilon}$ en $S(x)$ es lo mejor que podríamos soñar en general.

Kloosterman logró resolver con sus sumas un problema binario relacionado con formas cuadráticas.

El método del círculo según Kloosterman

División
de Farey



$$\begin{aligned} b &= a + A \\ d &= c + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cA - Ca &= 1 \\ \downarrow \\ r = 1/cd, \quad a &= -\bar{d} \end{aligned} \quad \int_0^r f\left(\frac{a}{c} + x\right) dx = \int_0^{1/cd} f\left(-\frac{\bar{d}}{c} + x\right)$$

Cambio de d

→ cambio de arco

Sumas de Kloosterman

→ cancelación entre arcos

$$\left[\begin{array}{l} f \text{ real y par} \\ N \in \mathbb{Z}^+ \end{array} \right] \quad \int_0^1 f(x) dx = 2 \sum_{c \leq N} \sum_{d \leq c+N}^* \int_0^{1/cd} f\left(-\frac{\bar{d}}{c} + x\right)$$

Genealogía de la Kloostermanía



H.D. Kloosterman

1926

Método del círculo

1927

Coef. f. modulares



A. Weil

1948

Estimación óptima

H. Riemann en \mathbb{F}_q



H. Maass

1949

F. modulares
no holomorfas



A. Selberg

1965

F. de traza

T^a . espectral

...
N.V. Kuznetsov 1980, 1981 F. de Kuznetsov

Dos citas

D.R. Heath-Brown

Kuznetsov's paper sparked a tremendous flurry of work, [...] and a host of applications were produced. This activity was nicknamed 'Kloostermania', which reflected the excitement generated in the field at large.

P. Michel

The word Kloostermania of the title was invented by M. Huxley in the 80's to highlight a series of striking developments that took place at that time in analytic number theory and which build further of (*sic*) on the modular nature of Kloosterman sums.

Filosofía básica (*a posteriori*)

La teoría analítica de números ha utilizado el análisis armónico en \mathbb{R}/\mathbb{Z} para estudiar la distribución módulo 1.

Para estudiar la distribución de los inversos o el algoritmo de Euclides quizá deberíamos hacer análisis armónico en el espacio base $SL_2(\mathbb{R})$ y con $SL_2(\mathbb{Z})$ como subgrupo discreto

$$SL_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}.$$

En cierto sentido $SL_2(\mathbb{R})$ es muy similar al semiplano de Poincaré \mathbb{H} más familiar geoméricamente y que ya aparece en las formas modulares clásicas.

El semiplano de Poincaré

\mathbb{H} semiplano de Poincaré



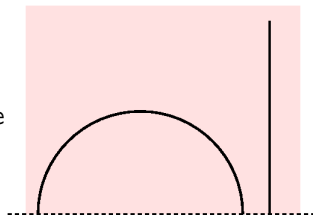
Métrica

$$ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$$

Medida invariante

$$d\mu = y^{-2} dx dy$$

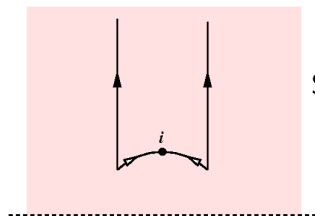
geodésicas



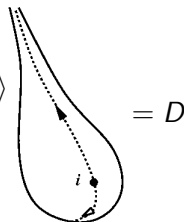
Dado $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y $z \in \mathbb{H}$ se define $\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$. Con esta acción $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ son las isometrías directas de \mathbb{H} .

A partir de γi es posible recuperar $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ excepto por la matriz de un giro (euclídeo), de este modo \mathbb{H} es como $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ olvidándose de las rotaciones.

$D = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} =$ pegar los puntos z y w si $z = \gamma w$ con $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$



$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle z \mapsto z+1, z \mapsto -\frac{1}{z} \rangle \end{aligned}$$



Las funciones en D son funciones **automorfas** en \mathbb{H} , es decir, verifican $f(\gamma z) = f(z)$ para $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Un método básico para crear funciones automorfas es considerar $F(z) = \sum f(\gamma z)$ con f una función en \mathbb{H} .

Desde el punto de vista complejo, D es una superficie de Riemann (variedad 1-dim sobre \mathbb{C}). A diferencia del caso euclídeo, \mathbb{R}/\mathbb{Z} , no es compacta.

¿Es posible encontrar problemas aritméticos que den lugar a sumas sobre $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$?

Aquí mencionaremos dos de ellos:

- El momento de orden 4 de la función ζ de Riemann en la línea crítica.
- La equidistribución de raíces de un polinomio cuadrático módulo p variable.

Momentos de la función ζ de Riemann

Los momentos $\int_0^T |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^{2k} dt$ son cantidades naturales en relación con la *hipótesis de Lindelöf* (ζ crece lo menos posible en la línea crítica \Leftarrow Hipótesis de Riemann).

$$\int |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^2 dt = \sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \int (m/n)^{it} dt, \quad m \approx n \rightarrow \text{principal}$$

$$\zeta^2(s) = \sum \frac{1}{n^s} \sum \frac{1}{m^s} = \sum \frac{d(n)}{n^s}$$

$$\int |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^4 dt = \sum \frac{d(m)d(n)}{\sqrt{mn}} \int (m/n)^{it} dt, \quad m \approx n \rightarrow \text{princ.}$$

$$\sum d(n+k)d(n) = \sum_{ad=n+k} \sum_{bc=n} 1$$

$$k = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

$$k > 1 \Rightarrow \text{Se relaciona con } \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ (operadores de Hecke)}$$

Ej.

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{matrix} ad - bc = 2 \end{matrix} \right\} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cup \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Equidistribución de raíces de polinomios cuadráticos

Sabemos que la ecuación $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ tiene solución si $p = 4k + 1$ pero ¿cómo están distribuidas las raíces $\pm r_p$ cuando el primo p varía?

Distribución de $\frac{r_p}{p}$ en $[0, 1]$ $\xleftrightarrow{\text{Fourier}}$ Cancelación en $\sum_p e\left(\frac{nr_p}{p}\right)$

Un tratamiento analítico de estas sumas se muestra difícil porque no parece posible parametrizar cantidades tan aritméticas como p (los primos) y r_p . Técnicas “de criba” permiten cambiar primos por enteros pero el problema con la dependencia en r_p persiste.

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \gamma\gamma^t = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + 1$$

$x^2 \equiv -1 \pmod{m}$ tiene sol. $\Leftrightarrow m = c^2 + d^2$ con c, d coprimos
 Sol. $x = ac + bd$ con $ad - bc = 1$

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longleftrightarrow \text{soluciones de } x^2 \equiv -1 \pmod{m}$$

Para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ se tiene $\gamma i = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{i}{c^2+d^2}$.

Entonces

$$\sum_p e\left(\frac{nr_p}{p}\right) \leftarrow \sum_{\gamma} e(n\mathrm{Re}\gamma i).$$

Las sumas de Kloosterman son inherentes al tratamiento con análisis de Fourier de sumas sobre $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

$$F(x, y) = \sum_{\gamma} f(\gamma z, w) \quad \text{con } z = x + x_0 i, w = y + y_0 i$$

$f(z + t, w + t) = f(z, w)$ para $t \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ periódica en $x, y \Rightarrow$ el coef. de Fourier $(m, -n)$ es $\sum_c S(m, n; c) \tilde{F}(c)$ con \tilde{F} cierta transformada.

Usando $\gamma z = 1/c - c^{-2}(z + d/c)^{-1}$, para $e(x, y) := e(-mx + ny)$

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\gamma z, w) e(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f\left(\frac{a}{c} - \frac{1}{c^2(z + d/c)}, w\right) e(x, y) dx dy$$

y con el cambio $x \mapsto x - d/c, y \mapsto y + a/c$

$$e\left(\frac{md + na}{c}\right) \int_0^1 \int_0^1 f\left(\frac{a}{c} - \frac{1}{c^2 z}, \frac{a}{c} + w\right) e(x, y) dx dy.$$

Teoría espectral

Descomposición espectral

$$f \in L^2(D)$$

$$f(z) = \sum_j \langle f, u_j \rangle u_j(z) + \dots \text{(contr. espectro continuo)}$$

$$u_j(z) = \text{formas de Maass}$$

$$= \text{autofunciones en } L^2(D) \text{ del laplaciano hiperbólico}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_D \bar{f} g d\mu$$

$$\Delta u_j = -\lambda_j u_j, \quad \Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$(\text{Im}(z))^s = y^s$ cumple $\Delta y^s = -s(1-s)y^s$ y considerando $\sum (\text{Im}(\gamma z))^s$ se puede forzar a que sea una autofunción que vive en D pero no está en $L^2(D)$ y después de una continuación analítica da lugar a la contribución del espectro continuo.

Las formas de Maass son 1-periódicas $u_j(z+1) = u_j(z)$, por tanto tienen un desarrollo de Fourier

$$u_j(z) = \sum_n a_n(y) e(nx) \quad \text{donde } z = x + iy.$$

Como no son holomorfas no hay un desarrollo $\sum c_n e(nz)$ pero la propiedad $\Delta u_j = -\lambda_j u_j$ determina $a_n(y)$ salvo una constante

$$u_j(z) = \sum_n \rho_j(n) \cdot \text{f. de Bessel}(y) e(nx).$$

Estos “coeficientes de Fourier” $\rho_j(n)$ se ajustan, al igual que el caso holomorfo, a la teoría de Hecke, en particular son multiplicativos una vez normalizados.

La historia no es siempre lógica (Parte II)

Sería natural que las formas de Maass hubieran nacido en el seno del análisis armónico o las ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo Maass las introdujo para resolver un problema relacionado con ideales en cuerpos cuadráticos $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Caso $d < 0$: normas de ideales \leftrightarrow formas cuadráticas \leftrightarrow formas modulares \leftrightarrow ecuaciones funcionales

$$\text{Ej. } K = \mathbb{Q}(i) \Rightarrow \zeta_K(s) = \sum N(I)^{-s} = \sum (a^2 + b^2)^{-s}$$

$$f(z) = \sum e((a^2 + b^2)z) \xrightarrow{\text{Poisson}} f(-1/4z) \xrightarrow{\text{Mellin}} \text{ec. func. } \zeta_K$$

(En realidad el caso de interés es $L(s) = \sum \chi(I)N(I)^{-s}$)

Caso $d > 0$: ¿? $N(a + b\sqrt{7}) = |a^2 - 7b^2|$ no es forma cuadrática y no se puede aplicar Poisson como antes.

Maass en 1949 consiguió salvar el esquema para el caso $d > 0$ utilizando sustitutos no holomorfos para $f(z)$, las formas de Maass, que permitían probar las ecuaciones funcionales esperadas. Las funciones de Bessel de su desarrollo de Fourier se comportaban bien bajo transformadas de Mellin.

(En realidad las funciones de Maass eran invariantes por cierto $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$)

Poco después la *Tesis de Tate* permitió aplicar directamente “sumación de Poisson sobre los adeles” a $\zeta_K(s)$ y otras funciones L .

La fórmula de traza de Selberg

Fórmula de Traza para $SL_2(\mathbb{Z})$

$$\sum_j h(t_j) = \frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\infty} t h(t) \tanh(\pi t) dt + \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} \frac{\ell^*}{\sinh(\ell/2)} \widehat{h}\left(\frac{\ell}{2\pi}\right) + \dots$$

donde

$$h = \text{función par} \quad \widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e(-\xi t) dt$$

$$1/4 + t_j^2 = \text{autovalores de } -\Delta$$

ℓ = Longitudes de las geodésicas

ℓ^* = Longitudes primitivas ($\ell = k\ell^*$)

\dots = contribución de algunos puntos especiales

La fórmula de traza es una fórmula esencialmente geométrica pero también admite interpretaciones aritméticas. Se puede probar que las longitudes ℓ^* son de la forma $2 \log \epsilon_d$ con ϵ_d la solución “más pequeña” de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 4$. Además cada longitud aparece $h(d)$ veces, el número de clases. Sarnak dedujo de la fórmula de traza

$$\sum_{\epsilon_d \leq x} h(d) = \text{li}(x^2) + O(x^{3/2} \log^2 x).$$

Por otro lado, la asintótica de $\sum_{d \leq x} h(d)$ se desconoce.

Selberg probó que $Z(s) = \prod_{\ell^*} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-(s+k)\ell^*})$ tiene una continuación analítica y una ecuación funcional. Además ¡cumple la hipótesis de Riemann porque Δ es autoadjunto! (sueño de Pólya-Hilbert). Con ello se puede hacer una teoría de “geodésicas primas” en superficies de Riemann.

Probando la fórmula de **Poisson** y la de **Selberg**

$$\begin{array}{l} \text{Poisson} \\ (f \text{ par}) \end{array} \quad \sum_n f(n) = \sum_n \hat{f}(n), \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-\xi x) dx$$

$$\begin{array}{l} \text{Selberg} \\ (f \text{ par}) \end{array} \quad \sum_j f(t_j) = (\text{principal}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} \frac{\ell^*}{\sinh(\ell/2)} \hat{f}\left(\frac{\ell}{2\pi}\right) + \dots$$

$$P(x, y) = \sum f(d(x + n, y)) = \sum f(|n + x - y|), \quad 1\text{-periódica en } x \text{ e } y$$

$$S(z, w) = \sum_{\gamma} f(d(\gamma z, w)), \quad \text{SL}_2(\mathbb{Z})\text{-periódica en } z \text{ y } w$$

$$S(\delta z, w) = S(z, w) \leftarrow \tilde{\gamma} = \gamma \delta, \quad S(z, \delta w) = S(z, w) \leftarrow d(z, \delta w) = d(\delta^{-1} z, w)$$

Desarrollo autofunc. $P(x, y) = \sum a_n e(nx) e(-ny)$, $a_n = \widehat{f}(n)$

$$\rightarrow S(z, w) = \sum a_j u_j(z) \overline{u_j(w)} + \dots \quad (\text{fórmula de pretraza})$$

$$a_j = \widetilde{f}(t_j) = \text{cierta transformada integral}$$

$$\text{Traza} = \int_0^1 P(x, x)$$

$$\int \sum f(|n + x - x|) dx = \int \sum \widehat{f}(n) e(nx) e(-nx) dx \rightarrow \text{Poisson}$$

En teoría debería ser similar con $\int_D S(z, z) d\mu$

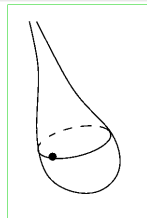
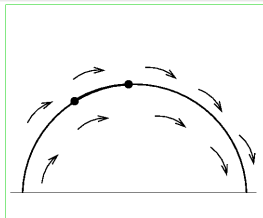
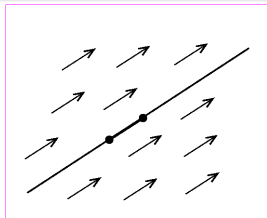
$$\sum_{\gamma} \int_D f(d(\gamma z, z)) d\mu = \int_D \sum \widetilde{f}(t_j) |u_j(z)|^2 d\mu + \dots$$

pero $\sum = \dots = \infty \rightarrow$ separar y cancelar lo que da ∞

Selberg reinterpretó la suma resultante en términos geométricos.

En \mathbb{R}^2 las traslaciones corresponden a geodésicas. Las traslaciones enteras corresponden a geodésicas cerradas en $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Los $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ “hiperbólicos” corresponden a geodésicas en \mathbb{H} y si $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ corresponden a geodésicas cerradas en D .



La fórmula de Kuznetsov

Fórmula de Kuznetsov para $SL_2(\mathbb{Z})$

$$\sum_c \frac{S(m, n; c)}{c} f\left(\frac{4\pi\sqrt{|mn|}}{c}\right) = \sum_j \tilde{f}(t_j) \bar{\rho}_j(m) \rho_j(n) + \dots$$

donde

f = función buena con $f(0) = f(\infty) = 0$

\tilde{f} = transformada de Bessel complicada

$1/4 + t_j^2$ = autovalores de $-\Delta$

$\rho_j(n)$ = n -ésimo coeficiente de Fourier de u_j

\dots = contribución del ∞ y de formas modulares clásicas

“Prueba” ultrarrápida de Poisson

$\delta_p = \delta$ de Dirac periódica

$$\delta_p(x) \stackrel{\text{Fourier}}{=} \sum e(nx) \xrightarrow{\int f(x) \cdot} \sum f(n) = \sum \hat{f}(n)$$

Formalización con funciones de Green

$$g(x) = \sum \frac{e(nx)}{4\pi^2 n^2 + r^2} \quad \text{converge para } r \neq 0$$

Formalmente $L[g] = \delta_p$ con $L[g] = -g'' + r^2 g$. Por otro lado $y(x) = e^{-r|x|}/2r$ es la solución de $-y'' + r^2 y = \delta$

$$\delta_p(x) = \sum \delta(x+n) \Rightarrow g(x) = \sum \frac{e(nx)}{4\pi^2 n^2 + r^2} = \frac{1}{2r} \sum e^{-r|x+n|}.$$

Calculando $f * g(x) = \int f(t)g(x-t)dt$ con las dos expresiones para g y aplicando L después, se recupera la fórmula de Poisson.

Prueba de la fórmula de Kuznetsov (idea)

$$G(z, w) = \sum_j \frac{u_j(z) \overline{u_j(w)}}{\lambda_j + r^2} + \dots \quad (-\Delta + r^2)G(\cdot, w) = \delta_D(\cdot - w)$$

y también podemos resolver $-\Delta + r^2 = \delta$ en \mathbb{H} y transformar δ en δ_D sumando sobre $SL_2(\mathbb{Z})$

$$G(z, w) = \sum_j \frac{u_j(z) \overline{u_j(w)}}{\lambda_j + r^2} + \dots = \sum_{\gamma} f(\gamma z, w)$$

(en realidad hay un problema de convergencia).

Calculando el coeficiente de Fourier $(m, -n)$

$$\rho_j(m) \overline{\rho_j(n)} \cdot \text{f. de Bessel} + \dots = \sum_c S(m, n; c) \cdot \text{f. de Bessel}.$$

Con transformadas se pasa de f. de Bessel a cualquier función (difícil).

La consecuencia de la fórmula de Kuznetsov es que hay una cancelación entre sumas de Kloosterman para diferentes módulos.

Weil probó con métodos de geometría algebraica esencialmente que $|S(m, n; c)| \leq d(c)\sqrt{c}$ con $d(c)$ el número de divisores. Esto es “óptimo” porque se conoce $\sum_{c \leq x} |S(m, n; c)|/\sqrt{c} > Cx$.

La fórmula de Kuznetsov permite deducir

$$\sum_{c \leq x} \frac{S(m, n; c)}{\sqrt{c}} < Cx^{2/3} \log x$$

y por tanto cuantifica una variación en los signos de $S(m, n; c)$ que es crucial en algunas aplicaciones.

También se pueden deducir resultados de teoría espectral a partir de resultados de sumas de Kloosterman.

La Kloostermanía en retrospectiva

Algunos logros en los primera década de Kloostermanía

- Acotaciones para la función ζ de Riemann (Iwaniec 1980, más adelante Jutila consiguió el resultado sin teoría espectral).
- Mejora del teorema de Bombieri-Vinogradov (Bombieri, Fouvry, Friedlander, Iwaniec 1984, 1986, 1989).
- Relación local-global en representaciones por formas cuadráticas ternarias (Duke, Schulze-Pillot 1988, 1990).

Los métodos de la Kloostermanía han participado también en importantes resultados posteriores en teoría analítica de números y además han establecido algunas relaciones inesperadas con la Física (*Arithmetic Quantum Chaos*, Sarnak 1992).

Actualmente Kloostermanía ha perdido su nombre y se ha incorporado a la atención que ha recibido el mundo automorfo en la teoría de números contemporánea (sobre todo después de la prueba del último teorema de Fermat).

¿No estaremos haciendo más complicada de lo necesario la teoría analítica de números introduciendo la teoría espectral?

Y. Motohashi (1995)

La función

$$F(s) = \int_1^\infty |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^4 t^{-s} dt$$

tiene una extensión meromorfa en \mathbb{C} y sus polos en $\operatorname{Re}(s) \geq 1/2$ están exactamente en los s tales que $(1-s)s$ es autovalor del laplaciano en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$.

Algunas lecturas

- D. R. Heath-Brown, *Arithmetic applications of Kloosterman sums*, Nieuw Arch. Wiskd. (5) **1** (2000), no. 4, 380–384.
- M. N. Huxley, *Introduction to Kloostermania*, Elementary and analytic theory of numbers (Warsaw, 1982), Banach Center Publ., vol. 17, PWN, Warsaw, 1985, pp. 217–306.
- H. Iwaniec, *Promenade along modular forms and analytic number theory*, Topics in analytic number theory (Austin, Tex., 1982), Univ. Texas Press, Austin, TX, 1985, pp. 221–303.
- H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

Algunas lecturas

- P. Michel, *Some recent applications of Kloostermania*, Physics and number theory, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol. 10, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 225–251.
- Y. Motohashi, *The Riemann zeta-function and the non-Euclidean Laplacian*, Sugaku Expositions **8** (1995), no. 1, 59–87.
- Y. Motohashi, *Spectral theory of the Riemann zeta-function*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 127, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- P. Sarnak, *Kloosterman, quadratic forms and modular forms*, Nieuw Arch. Wiskd. (5) **1** (2000), no. 4, 385–389.
- A. Terras, *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications. I*, Springer-Verlag, New York, 1985.