Un teorema de Javier Cilleruelo

Fernando Chamizo

Universidad autónoma de Madrid

24 de octubre de 2016

¿Se pueden sumar los porcentajes?

No se debería poder en general pero. . .

Portada de "El País" (14/02/2014): "Hay un 7 % de alumnos menos que hace dos años tras la subida de las tasas".

¿Se pueden sumar los porcentajes?

No se debería poder en general pero. . .

Portada de "El País" (14/02/2014): "Hay un 7 % de alumnos menos que hace dos años tras la subida de las tasas".

Explicación en el interior: Los de grado se ha reducido un 1.2 % y los de máster un 5.8 %.

¿Se pueden sumar los porcentajes?

No se debería poder en general pero...

Portada de "El País" (14/02/2014): "Hay un 7 % de alumnos menos que hace dos años tras la subida de las tasas".

Explicación en el interior: Los de grado se ha reducido un 1.2 % y los de máster un 5.8 %.

Nota: El verdadero descenso fue de 1.6 %. ¿Por qué no sumar 50 % a 7 % si de mis dos primos uno lo dejó?

Si $A_1 \sqcup A_2 =$ espacio muestral

$$P(B) = P(B|A_1) + P(B|A_2) \quad \text{(incorrecto)}$$

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) \quad \text{(correcto)}$$

Más ejemplos en el blog `malaprensa` de Josu Mezo

El sindicato CSIF afirma que los funcionarios han perdido casi el $50\,\%$ de poder adquisitivo de 1981 a 2007. Según su presidente, un $30\,\%$ en 2009–2013 (¿$9\,\% + 5\,\% = 30\,\%$?).

El sindicato CSIF afirma que los funcionarios han perdido casi el 50 % de poder adquisitivo de 1981 a 2007. Según su presidente, un 30 % en 2009–2013 (¿$9\,\% + 5\,\% = 30\,\%$?).

Según La Voz de Galicia los funcionarios de la Xunta desde 2010 “han perdido en torno a un 20.2 % de su poder adquisitivo” por 4 rebajas salariales del 5 %, 7 %, 2.9 %, 2.4 % y 2.9 % (suma 20.2).

El sindicato CSIF afirma que los funcionarios han perdido casi el 50 % de poder adquisitivo de 1981 a 2007. Según su presidente, un 30 % en 2009–2013 (¿$9\,\% + 5\,\% = 30\,\%$?).

Según La Voz de Galicia los funcionarios de la Xunta desde 2010 “han perdido en torno a un 20.2 % de su poder adquisitivo” por 4 rebajas salariales del 5 %, 7 %, 2.9 %, 2.4 % y 2.9 % (suma 20.2).

Nota: Si en 2017 me reducen el sueldo a la mitad y en 2018 hacen lo mismo ¿me quedo sin sueldo?

$P(A_j)$=proporción de la j-ésima bajada

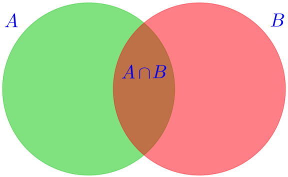
$$P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) = 1 - P(A_1) - \cdots - P(A_n) \quad \text{(incorrecto)}$$
$$P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) = \sum_k (-1)^k \sum_{i_1 < \cdots < i_k} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \quad \text{(correcto)}$$

De acuerdo, no podemos sumar porcentajes pero la suma nos indica algo acerca del solapamiento

$L =$ llueve el lunes $\qquad M =$ llueve el martes

Si $P(L) = 60\,\%$ y $P(M) = 50\,\%$, la probabilidad de que llueva ambos días es al menos del $10\,\%$

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$



¿Y si sabemos la probabilidad de que llueva el miércoles?
¿Qué podemos decir de los solapamientos a partir de la suma de probabilidades (porcentajes)?

¿Y si sabemos la probabilidad de que llueva el miércoles?
¿Qué podemos decir de los solapamientos a partir de la suma de probabilidades (porcentajes)?

Publ. Mat. (2007), 107–118
Proceedings of the *Primeras Jornadas de Teoría de Números.*

AN OVERLAPPING THEOREM WITH APPLICATIONS

JAVIER CILLERUELO AND GÉRALD TENENBAUM

Abstract

We establish a general and optimal lower bound for the complete sum of the probabilities of k-intersections of n events. We then describe various applications to additive and multiplicative number theory, graph theory, coding theory, study of lattice points on circles, and divisors of polynomials.

1. Introduction

Let μ be a positive measure on a set Ω, $\{E_j\}_{j=1}^k$ a family of measurable subsets, and set

$$\tau_m := \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant k} \mu(E_{j_1}\cap\cdots\cap E_{j_m}) \quad (m\geqslant 1).$$

We address here the problem of obtaining lower bounds for τ_m in terms of τ_1. For $m\geqslant 2$, the quantity τ_m may be thought of as the global amount of m-overlapping in the family $\{E_j\}_{j=1}^k$.

Many problems in Combinatorial Number Theory may be tackled by using estimates for τ_m. According to the specific situation under consideration, appropriate choices of the set Ω, the family of subsets $\{E_j\}_{j=1}^k$ and the measure μ may be performed.

The integer parameter $m\geqslant 1$ being fixed, our results will be conveniently described in terms of the continuous, piecewise linear, interpolation of the binomial coefficients $\binom{n}{m}$ $(n\in\mathbb{N})$. Thus, we define

$$Q_m(x):=\binom{\lfloor x\rfloor}{m}+\binom{\lfloor x\rfloor}{m-1}\langle x\rangle=\binom{\lfloor x\rfloor}{m}(1-\langle x\rangle)+\binom{\lfloor x+1\rfloor}{m}\langle x\rangle \quad (x\in\mathbb{R}^+)$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 60C05.
Key words. Probability of intersections, divisors, lattice points, Sidon sets, graph theory, divisors of polynomials, coding theory.
The authors take pleasure in thanking Bernardo López for helpful suggestions on the presentation of Sections 1 and 2.

J. Cilleruelo, G. Tenenbaum. **An overlapping theorem with applications.**

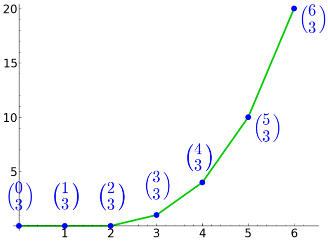
We establish a general and optimal lower bound for the complete sum of the probabilities of k-intersections of n events. We then describe various applications to …

Teorema. En cualquier espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, se tiene,

$$\sum_{j_1<\cdots<j_m} P(E_{j_1}\cap\cdots\cap E_{j_m}) \geq Q_m\Big(\sum_j P(E_j)\Big)$$

donde $Q_m(x)$ es la función que interpola linealmente $n \longmapsto \binom{n}{m}$.

Gráfica de $Q_3(x)$



La demostración es breve y sencilla (8 líneas en el original). Con indicaciones suficientes, se podría proponer como ejercicio en el grado de matemáticas.

La demostración es breve y sencilla (8 líneas en el original). Con indicaciones suficientes, se podría proponer como ejercicio en el grado de matemáticas.

Lo importante del artículo es el ingenio al emplearlo en diversas aplicaciones:

1. Teoría elemental de primos
2. Teoría de grafos
3. Conjuntos de Sidon
4. Teoría de códigos
5. Estructura de los divisores
6. Puntos en círculos

La demostración es breve y sencilla (8 líneas en el original). Con indicaciones suficientes, se podría proponer como ejercicio en el grado de matemáticas.

Lo importante del artículo es el ingenio al emplearlo en diversas aplicaciones:

1. Teoría elemental de primos
2. Teoría de grafos
3. **Conjuntos de Sidon**
4. Teoría de códigos
5. Estructura de los divisores
6. Puntos en círculos

Javier era un experto renombrado en problemas aditivos, en especial en temas relacionados con conjuntos de Sidon.

¿Qué es un conjunto de Sidon?

Es un conjunto de enteros positivos en el que todas las sumas de dos elementos son distintas.

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\} \qquad A = \{1, 2, 5, 10, 16, 23, 33, 35\}$$

Una pregunta fundamental es saber cómo de grandes pueden ser si disponemos de números hasta N y, en el caso infinito, cómo de lento puede crecer la sucesión.

Javier en una entrevista

"**Siempre me han atraído los problemas con enunciado sencillo y que sin embargo son difíciles de responder**. Eso no quiere decir que las herramientas que haya que utilizar para resolverlos no sean difíciles y sofisticadas. A veces requieren crear nuevas herramientas y teorías. Hay quienes, sin embargo, una vez creada la nueva teoría, se entretienen a sacar punta a la misma olvidándose de cuál era el problema original. No digo que eso no sea lícito, simplemente que **yo soy incapaz de entusiasmarme con problemas llenos de lenguaje, no encuentro la motivación suficiente**."

Cota de Lindström. Los conjuntos de Sidon $A \subset \{1, \dots, N\}$ verifican $|A| \leq N^{1/2} + N^{1/4} + 1$.

Cota de Lindström. Los conjuntos de Sidon $A \subset \{1, \ldots, N\}$ verifican $|A| \le N^{1/2} + N^{1/4} + 1$.

Dem. $E_j := A + j$, $1 \le j \le n$, $\quad s := \left|\bigcup E_j\right|, \quad P(\{a\}) := s^{-1}$.

Cota de Lindström. Los conjuntos de Sidon $A \subset \{1, \dots, N\}$ verifican $|A| \le N^{1/2} + N^{1/4} + 1$.

Dem. $E_j := A + j$, $1 \le j \le n$, $\quad s := \left|\bigcup E_j\right|$, $\quad P(\{a\}) := s^{-1}$.

$$\sum P(E_j) = n|A|s^{-1}, \qquad \text{Sidon} \;\Rightarrow\; \left|E_{j_1} \cap E_{j_2}\right| \le 1.$$

Cota de Lindström. Los conjuntos de Sidon $A \subset \{1, \dots, N\}$ verifican $|A| \leq N^{1/2} + N^{1/4} + 1$.

Dem. $E_j := A + j$, $1 \leq j \leq n$, $\quad s := \big|\bigcup E_j\big|$, $\quad P(\{a\}) := s^{-1}$.

$$\sum P(E_j) = n|A|s^{-1}, \qquad \text{Sidon} \Rightarrow \big|E_{j_1} \cap E_{j_2}\big| \leq 1.$$

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} P\big(E_{j_1} \cap E_{j_2}\big) \begin{cases} \geq \binom{\sum P(E_j)}{2} & \text{(Teorema de solapamiento)} \\ \leq \binom{n}{2} s^{-1} & \text{(Sidon)} \end{cases}$$

Cota de Lindström. Los conjuntos de Sidon $A \subset \{1, \dots, N\}$ verifican $|A| \le N^{1/2} + N^{1/4} + 1$.

Dem. $E_j := A + j$, $1 \le j \le n$, $\quad s := \big|\bigcup E_j\big|$, $\quad P(\{a\}) := s^{-1}$.

$$\sum P(E_j) = n|A|s^{-1}, \qquad \text{Sidon} \;\Rightarrow\; \big|E_{j_1} \cap E_{j_2}\big| \le 1.$$

$$\sum_{1\le j_1<j_2\le n} P\big(E_{j_1} \cap E_{j_2}\big) \begin{cases} \ge \binom{\sum P(E_j)}{2} & \text{(Teorema de solapamiento)} \\ \le \binom{n}{2} s^{-1} & \text{(Sidon)} \end{cases}$$

$$\binom{n}{2} s^{-1} \ge \binom{\sum P(E_j)}{2} \quad \Rightarrow \quad s \ge \frac{|A|^2 n}{|A| + n - 1}.$$

Cota de Lindström. Los conjuntos de Sidon $A \subset \{1, \dots, N\}$ verifican $|A| \le N^{1/2} + N^{1/4} + 1$.

Dem. $E_j := A + j$, $1 \le j \le n$, $\quad s := \left|\bigcup E_j\right|$, $\quad P(\{a\}) := s^{-1}$.

$$\sum P(E_j) = n|A|s^{-1}, \qquad \text{Sidon} \;\Rightarrow\; \left|E_{j_1} \cap E_{j_2}\right| \le 1.$$

$$\sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} P\big(E_{j_1} \cap E_{j_2}\big) \begin{cases} \ge \binom{\sum P(E_j)}{2} & \text{(Teorema de solapamiento)} \\ \le \binom{n}{2} s^{-1} & \text{(Sidon)} \end{cases}$$

$$\binom{n}{2} s^{-1} \ge \binom{\sum P(E_j)}{2} \quad \Rightarrow \quad s \ge \frac{|A|^2 n}{|A| + n - 1}.$$

Usando $s \le N + n$ y eligiendo n de manera óptima, se obtiene el resultado. $\square$

Otras contribuciones de Javier a los conjuntos de Sidon

Problema: Hallar sucesiones (infinitas) de Sidon que crezcan lento

$$A(N) = \#\{\text{elementos} \le N \text{ de la sucesión}\} \ge CN^{\alpha}$$

Otras contribuciones de Javier a los conjuntos de Sidon

Problema: Hallar sucesiones (infinitas) de Sidon que crezcan lento

$$A(N) = \#\{\text{elementos} \le N \text{ de la sucesión}\} \ge CN^{\alpha}$$

- P. Erdős (1932) $\alpha = 1/3$ (fácil)

Otras contribuciones de Javier a los conjuntos de Sidon

Problema: Hallar sucesiones (infinitas) de Sidon que crezcan lento

$$A(N) = \#\{\text{elementos} \le N \text{ de la sucesión}\} \ge CN^{\alpha}$$

- P. Erdős (1932) $\quad \alpha = 1/3$ (fácil)
- M. Atjai, J. Komlós, E. Szemerédi (1981) $A(N) \ge C(N \log N)^{1/3}$

Otras contribuciones de Javier a los conjuntos de Sidon

Problema: Hallar sucesiones (infinitas) de Sidon que crezcan lento

$$A(N) = \#\{\text{elementos} \leq N \text{ de la sucesión}\} \geq CN^{\alpha}$$

- P. Erdős (1932) $\alpha = 1/3$ (fácil)
- M. Atjai, J. Komlós, E. Szemerédi (1981) $A(N) \geq C(N \log N)^{1/3}$
- I. Ruzsa (1998) $\alpha = \sqrt{2} - 1 - \epsilon$ (no constructiva)

Otras contribuciones de Javier a los conjuntos de Sidon

Problema: Hallar sucesiones (infinitas) de Sidon que crezcan lento

$$A(N) = \#\{\text{elementos} \le N \text{ de la sucesión}\} \ge CN^{\alpha}$$

- P. Erdős (1932) $\alpha = 1/3$ (fácil)
- M. Atjai, J. Komlós, E. Szemerédi (1981) $A(N) \ge C(N \log N)^{1/3}$
- I. Ruzsa (1998) $\alpha = \sqrt{2} - 1 - \epsilon$ (no constructiva)
- **Javier** (2014) Infinite Sidon sequences. *Adv. Math.* 255

4 páginas	$\longrightarrow$	$\alpha = (3 - \sqrt{5})/2 - \epsilon$	(constructiva)
2 más	$\longrightarrow$	$\alpha = \sqrt{2} - 1 - \epsilon$	(constructiva)
en el resto	$\longrightarrow$	h sumandos (sólo se sabía lo trivial)	

El resultado más famoso de Javier (escrito en colaboración con I. Ruzsa y C. Vinuesa) trata sobre el comportamiento asintótico de $\beta_g(N)$, el tamaño del máximo conjunto de naturales $\leq N$ tales que cada suma de dos elementos se repite a lo más g veces. Probaron

$$\lim_{g\to\infty} \liminf_{N\to\infty} \frac{\beta_g(N)}{\sqrt{gN}} = \lim_{g\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{\beta_g(N)}{\sqrt{gN}},$$

además estos límites coinciden con $\sup \int f$, donde el supremo se toma sobre el conjunto de funciones

$$\Big\{ f \geq 0 \ : \ f \in C[0,1] \text{ con } \int_0^1 f(t)f(x-t)\, dt \leq 1 \Big\}.$$

Una investigación inconclusa

La sucesión de Mian-Chowla sucesivamente elimina de $\mathbb{N}$ los números que evitan que sea de Sidon:
$1, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, \cancel{17}, \cancel{18}, \cancel{19}, \cancel{20}, 21$

Una investigación inconclusa

La sucesión de Mian-Chowla sucesivamente elimina de $\mathbb{N}$ los números que evitan que sea de Sidon:

$1, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, \cancel{17}, \cancel{18}, \cancel{19}, \cancel{20}, 21$

$1, 2, 4, 8, 13, 21$

Javier desarrolló un modelo de probabilidad no riguroso que creía que sugería una asintótica correcta apoyada por cálculos numéricos.

Una investigación inconclusa

La sucesión de Mian-Chowla sucesivamente elimina de $\mathbb{N}$ los números que evitan que sea de Sidon:

$1, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, \cancel{17}, \cancel{18}, \cancel{19}, \cancel{20}, 21$

$1, 2, \quad 4, \quad 8, \quad 13, \quad 21$

Javier desarrolló un modelo de probabilidad no riguroso que creía que sugería una asintótica correcta apoyada por cálculos numéricos.

Algo para llevarse a casa:

¿Cuál es la asintótica de la sucesión?

Javier tenía confianza en resolver esta cuestión. ¿Alguien recoge el testigo para un próximo tributo?