# El Problema del Círculo

**Susana de la Rubia Martínez**

# 1. Introducción

Sea $R \in \mathbb{R}$, y $\mathcal{N}(R)$ el número de puntos de coordenadas enteras en el círculo de radio $R$ centrado en $(a, b)$, es decir,

$$\mathcal{N}(R) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2\}.$$

A lo largo de este trabajo, vamos a suponer que $R$ es suficientemente grande, ya que para $R$ pequeño el valor de $\mathcal{N}(R)$ se puede obtener fácilmente, por tanto, en este caso no hace falta ninguna fórmula.

Consideremos cada punto de $\mathbb{Z}^2$ como el vértice de una cuadrícula del plano. A cada $p = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ le podemos asociar el cuadrado $C_p$ de vértices:

$$\{(x, y), (x + 1, y), (x + 1, y + 1), (x, y + 1)\}.$$

Observemos que $\mathcal{N}(R)$ es igual al área de la región $C$ del plano formada por la unión de los cuadrados $C_p$ tales que $p = (x, y)$ verifica que $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq R^2$. Pero este área no coincide exactamente con el área del círculo de radio $R$, ya que algunos cuadrados tienen parte fuera del círculo, y además, hay porciones del círculo que quedan sin recubrir por estos cuadrados. Por tanto, $\mathcal{N}(R) = \pi R^2 + E(R)$, donde $E(R)$ es el error cometido al aproximar $\mathcal{N}(R)$ por $\pi R^2$. Sean $C_1$ el círculo de radio $R+\sqrt{2}$ centrado en $(a, b)$ y $C_2$ el círculo de radio $R - \sqrt{2}$ centrado en $(a, b)$, se tiene que $C_2 \subset C \subset C_1$. Por tanto:

$$\pi(R - \sqrt{2})^2 \leq \mathcal{N}(R) \leq \pi(R + \sqrt{2})^2,$$

lo cual implica que $\mathcal{N}(R) = \pi R^2 + O(R)$. Este resultado fue obtenido por Gauss en 1834.

El problema del círculo es un problema abierto de la Teoría de Números que consiste en dado un círculo de radio $R \in \mathbb{R}$, hallar el ínfimo de los exponentes $\theta$ para los cuales se cumple que $E(R) = O(R^\theta)$, cuando $R \to \infty$, ya que si $R$ es pequeño puede obtenerse fácilmente $\mathcal{N}(R)$ contando directamente dicho número de puntos. Algunas cotas superiores obtenidas para este ínfimo son las siguientes:

- Gauss (1834), obtuvo $\theta = 1$.

- G. Voronoï y W. Sierpinski (1903): $\theta = \frac{2}{3} = 0'6666....$

- J. G. van der Corput (1922): $\theta = \frac{33}{50} = 0'66$.

- Walfisz (1927): $\theta = \frac{163}{247} = 0'65991....$

- E. C. Titchmarsh (1935): $\theta = \frac{15}{23} = 0'6521....$

- L. K. Hua (1942): $\theta = \frac{13}{20} = 0'65$.

- G. Kolesnik (1976): $\theta = \frac{35}{54} = 0'6481....$

- H. Iwaniec y C. J. Mozzochi (1988): $\theta = \frac{7}{11} = 0'6363....$

- El mejor resultado conocido actualmente se debe a M. N. Huxley [6] (1993), quien probó que:

$$E(R) = O(R^{\frac{46}{73}}(\log R)^{\frac{315}{146}}),$$

es decir, $\theta = \frac{46}{73} = 0'6301.....$

Como $(\log R)^\alpha \ll R^\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que:

$$E(R) = O(R^{\frac{46}{73}}R^\varepsilon) = O(R^{\frac{46}{73}+\varepsilon}),$$

de donde se obtiene que $E(R) = O(R^\theta)$ para todo $\theta > \frac{46}{73}$.

Emmanuel Preissmann [9], encontró la mejor aproximación para $\int_0^y E(R)^2 dr$, donde $E(R)$ es el error para el problema del círculo de radio r:

$$\int_0^y E(R)^2 dr = \beta y^{3/2} + O[y(\log y)^2],$$

donde

$$\beta = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} r(n)^2 n^{-3/2}.$$

## 1.1. Enunciado y consideraciones preliminares

**Primera forma de obtener el exponente 1:**

La diferencia entre el área, $A_R$, de un círculo de radio $R > 1$ y el número de puntos de coordenadas enteras, $N_R$, que contiene se denota por $E(R)$. Así que $E(R) = A_R - N_R = \pi R^2 - N_R$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} N_R &= \pi R^2 + O(\text{Número de cuadrados que quedan a medias en la frontera del círculo}) \\ &= \pi R^2 + O(\text{Longitud de la circunferencia}) = \pi R^2 + O(2\pi R) = \pi R^2 + O(R). \end{aligned}$$

Así que, $E(R) = \pi R^2 - (\pi R^2 + O(R)) = O(R)$.

**Segunda forma de obtener el exponente 1:**

Consideremos un círculo, $C$, de radio $R$ y centrado en el origen de coordenadas. Sea $N_R$, el número de puntos de coordenadas enteras en este círculo. Vamos a contar el número de puntos de coordenadas enteras en este círculo en la región $S_1 = \{(x, y) : x \geq 0, y > 0\}$. Para ello utilicemos que los puntos, $(x, y)$, de la frontera de este círculo son tales que verifican que $x^2 + y^2 = R^2$, por tanto en la región $S_1$ la coordenada $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. De esta forma el número de puntos con coordenadas enteras en $S_1$ tales que la primera coordenada es $x = j$ es $[\sqrt{R^2 - j^2}]$. Luego, en la región $S_1$ el número de puntos con coordenadas enteras es

$$\sum_{n=0}^{R} [\sqrt{R^2 - n^2}] = \sum_{n=0}^{R} \sqrt{R^2 - n^2} - \sum_{n=0}^{R} (\sqrt{R^2 - n^2} - [\sqrt{R^2 - n^2}]).$$

Observemos que, $|\sqrt{R^2 - n^2} - [\sqrt{R^2 - n^2}]| \leq 1$, con lo cual:

$$|\sum_{n=0}^{R} (\sqrt{R^2 - n^2} - [\sqrt{R^2 - n^2}])| \leq \sum_{n=0}^{R} |\sqrt{R^2 - n^2} - [\sqrt{R^2 - n^2}]| \leq \sum_{n=0}^{R} 1 = R + 1,$$

luego,

$$\sum_{n=0}^{R} (\sqrt{R^2 - n^2} - [\sqrt{R^2 - n^2}]) = O(R + 1) = O(R),$$

y por tanto:

$$\sum_{n=0}^{R}[\sqrt{R^2-n^2}]=\sum_{n=0}^{R}\sqrt{R^2-n^2}+O(R).$$

Posteriormente, vamos a obtener una expresión más sencilla para $\sum_{n=0}^{R}\sqrt{R^2-n^2}$. Para ello, vamos a utilizar el siguiente resultado que aproxima una suma por medio de una integral:

Si $f\in C^2([a,b])$ es cóncava o convexa con $f''$ creciente o decreciente en un número finito de intervalos, entonces

$$\sum_{n=a}^{b}f(n)=\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2}+\int_a^b f(t)dt+O(\sup|f'|+\sup|f''|).$$

Consideremos:

$$N_{S_2}=\sum_{n=-R}^{R}\sqrt{R^2-n^2}=\sum_{n=-(R-1)}^{R-1}\sqrt{R^2-n^2},$$

así que utilizando la fórmula anterior para aproximar una suma por una integral, y tomando $f(n)=\sqrt{R^2-n^2}$ con $a=-(R-1)$ y $b=R-1$, queda:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-(R-1)}^{R-1}\sqrt{R^2-n^2}=&\frac{\sqrt{R^2-(R-1)^2}}{2}+\frac{\sqrt{R^2-(-R+1)^2}}{2}\\&+\int_{-R+1}^{R-1}\sqrt{R^2-x^2}dx+O(\sup_{[-R+1,R-1]}|f'|+\sup_{[-R+1,R-1]}|f''|)\\&=\sqrt{2R-1}+\int_{-R+1}^{R-1}\sqrt{R^2-x^2}dx+O(\sup_{[-R+1,R-1]}|f'|+\sup_{[-R+1,R-1]}|f''|).\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\int_{-R+1}^{R-1}\sqrt{R^2-x^2}dx=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx-2\int_{R-1}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx,$$

por la simetría del círculo. Ahora, veamos que

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx = \text{área}(S_2) = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Consideremos el rectángulo, $P$, de coordenadas:

$$(R-1,0), (R,0), (R-1, \sqrt{R^2-(R-1)^2}), (R, \sqrt{R^2-(R-1)^2}),$$

es fácil ver que se verifica:

$$\int_{R-1}^{R} \sqrt{R^2-x^2}dx \leq \text{área}(P) = \sqrt{R^2-(R-1)^2} \leq \sqrt{2R},$$

lo cual implica que

$$-2\int_{R-1}^{R} \sqrt{R^2-x^2}dx = O(\sqrt{2R}) = O(\sqrt{R}),$$

por tanto:

$$\int_{-R+1}^{R-1} \sqrt{R^2-x^2}dx = \frac{\pi R^2}{2} + O(\sqrt{R}).$$

Ahora, calculemos $\sup_{[-R+1,R-1]} |f'(x)|,$ y $\sup_{[-R+1,R-1]} |f''(x)|)$. Para ello, sea $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$ entonces

$$\sup_{[-R+1,R-1]} |f'(x)| = \left|\frac{R-1}{\sqrt{R^2-(R-1)^2}}\right| = \left|\frac{R-1}{\sqrt{2R-1}}\right| = O\left(\frac{R}{\sqrt{2R-1}}\right),$$

y, además:

$$\sup_{[-R+1,R-1]} |f''(x)| = \sup_{[-R+1,R-1]} \left|\frac{-R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}\right| = \frac{-R^2}{(R^2-(R-1)^2)^{3/2}} = O(\sqrt{R}).$$

De esta forma se concluye que:

$$\sum_{n=-R}^{R} \sqrt{R^2 - n^2} = \sqrt{2R-1} + \frac{\pi R^2}{2} + O(\sqrt{R}) = \frac{\pi R^2}{2} + O(\sqrt{R}),$$

ya que $\sqrt{2R-1} = O(\sqrt{R})$.

A partir de esta fórmula se obtiene el siguiente resultado:

$$\sum_{n=-R}^{R} \sqrt{R^2 - n^2} = 2\sum_{n=0}^{R} \sqrt{R^2 - n^2} - R = \frac{\pi R^2}{2} + O(\sqrt{R}),$$

con lo cual:

$$2\sum_{n=0}^{R} \sqrt{R^2 - n^2} = \frac{\pi}{2}R^2 + R + O(\sqrt{R}) = \frac{\pi}{2}R^2 + O(R),$$

de donde se obtiene que:

$$\sum_{n=0}^{R} \sqrt{R^2 - n^2} = \frac{\pi}{4}R^2 + O(R).$$

Así pues, se llega a:

$$\sum_{n=0}^{R} [\sqrt{R^2 - n^2}] = \frac{\pi}{4}R^2 + O(R).$$

Por simetría el número de puntos de coordenadas enteras en este círculo es:

$$N_R = 4\frac{\pi}{4}R^2 + O(R) + 1 = \pi R^2 + O(R).$$

**El error y la función $\psi$**

Sea $\psi$ la siguiente función: $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. A lo largo del trabajo utilizaremos esta función $\psi$ para estudiar el término de error.

El número de puntos de coordenadas enteras en el círculo de radio $R$, $N_R$, viene dado por:

$$N_R = \sum_{n=-R}^{R} (2[\sqrt{R^2-n^2}]+1) = 2\sum_{n=-R}^{R}[\sqrt{R^2-n^2}] + \sum_{n=-R}^{R} 1 = 2\sum_{n=-R}^{R}[\sqrt{R^2-n^2}] + (2R+1)$$

$$= 2\sum_{n=-R}^{R}\sqrt{R^2-n^2} - 2\sum_{n=-R}^{R}\psi(\sqrt{R^2-n^2}) - 2\sum_{n=-R}^{R}\frac{1}{2} + (2R+1) =$$

$$= 2\sum_{n=-R}^{R}\sqrt{R^2-n^2} - 2\sum_{n=-R}^{R}\psi(\sqrt{R^2-n^2})$$

Utilizando la siguiente expresión:

$$\sum_{n=-R}^{R}\sqrt{R^2-n^2} = \int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx + O(1),$$

con $f(R) = f(-R) = \sqrt{R^2-R^2} = 0$, queda:

$$N_R = 2(\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx + O(1)) - 2\sum_{n=-R}^{R}\psi(\sqrt{R^2-n^2}) = \pi R^2 - 2\sum_{n=-R}^{R}\psi(\sqrt{R^2-n^2}) + O(1).$$

**La conjetura de Hardy:**

En 1915, Hardy [4] demostró que:

$$P(R) = \int_0^{R^2} |E(\sqrt{r})|dr = O(R^{\frac{5}{2}+\varepsilon}).$$

Como consecuencia de este resultado, Hardy se preguntó que parecía razonable pensar que fuese cierta la igualdad $E(R) = O(R^{\alpha+\varepsilon})$. De esta manera, sustituyendo en $P(R)$, se tiene:

$$\int_0^{R^2} O(r^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\varepsilon}{2}})dr = O(r^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}) = O(R^{\alpha+\varepsilon+2}) = O(R^{\frac{5}{2}+\varepsilon}) \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

Y así fue como Hardy conjeturó que:

$$E(R) = O(R^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \text{cuando } R \to +\infty, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

**Convolución y regularización para funciones periódicas**

Definición y propiedades

Sean $f$ y $g$ funciones integrables acotadas y periódicas de periodo 1, la convolución se puede definir como:

$$(f * g)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t)g(t)dt,$$

además, los límites $-1/2$ y $1/2$ se pueden cambiar por $a$ y $a+1$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$, por ser $f$ y $g$ funciones periódicas de periodo 1.

Tomando el cambio de variables $x - t = u$, se prueba que $f * g = g * f$.

Convolver regulariza

Si $g$ es una función continua entonces $f * g$ es continua, y si $g \in C^{\infty}$ entonces $f * g \in C^{\infty}$.

Supongamos que $f \in C^{\infty}$, veamos que existen todas las derivadas de $f * g$. Observemos que

$$(f * g)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t)g(t)dt,$$

sólo depende de $x$ ya que los límites de integración hace que $t$ desaparezca, luego:

$$(f * g)'(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial f(x-t)}{\partial x} g(t)dt,$$

que existe ya que estamos suponiendo que $f$ es $C^{\infty}$, así que $g(t)$ está actuando como una constante. Por tanto si $f \in C^{\infty}$ entonces $f * g \in C^{\infty}$.

Comprobemos ahora que si $f$ es continua entonces $f*g$ es continua, para ello veamos que se cumple:

1) $(f * g)(a) = \int_{-1/2}^{1/2} f(a-t)g(t)dt$ está definida ya que $f(a-t)$ lo está por ser continua.

2) $\lim_{x \to a}(f * g)(x) = \lim_{x \to a} \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t)g(t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} \lim_{x \to a}(f(x-t)g(t))dt = \int_{-1/2}^{1/2} g(t) \lim_{x \to a} f(x-t)dt$, que existe por ser $f$ continua.

3) $\lim_{x\to a}(f*g)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} g(t)\lim_{x\to a} f(x-t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} g(t)f(a-t)dt = (f*g)(a)$.

Convolver con aproximaciones de la delta de Dirac apenas modifica las funciones regulares

- Sea $\phi$ una función continua no necesariamente periódica con $sop\phi \subset [-1/2, 1/2]$, $\phi \geq 0$ y $\int \phi = 1$. El área que limita la función $\varepsilon^{-1}\phi(x/\varepsilon)$ con $0 < \varepsilon < 1$ es 1 y su soporte es pequeño cuando $\varepsilon$ lo es.

Tomemos el cambio de variable $x/\varepsilon = u$:

$$\int \varepsilon^{-1}\phi(\frac{x}{\varepsilon})dx = \varepsilon^{-1}\int \phi(u)\varepsilon du = \int \phi(u)du = 1.$$

Sea $g(x) = \varepsilon^{-1}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$, sabemos que $sop\phi \subset [-1/2, 1/2]$, (es decir, el conjunto de puntos donde $\phi$ no se anula se encuentra contenido en el intervalo $[-1/2, 1/2]$, fuera de él $\phi$ es idénticamente cero). Así que $g$ es no nula si y sólo si:

$$\frac{x}{\varepsilon} \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right], \text{ es decir, si y sólo si } \left|\frac{x}{\varepsilon}\right| \leq \frac{1}{2},$$

ya que si

$$\frac{x}{\varepsilon} \notin \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right], \text{ entonces } \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0 \text{ implicaría que } g = 0.$$

Luego

$$\left|\frac{x}{\varepsilon}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow sop(g) \subset \left[\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

- Sea $g_\varepsilon$ la función $\varepsilon^{-1}\phi(x/\varepsilon)$ hecha periódica de periodo uno. Se tiene que para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$(f*g_\varepsilon)(a) = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f(a-t)g_\varepsilon(t)dt = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} (f(a-t) - f(a))g_\varepsilon(t)dt + f(a),$$

y si $f \in C^1$, entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}(f*g_\varepsilon)(a) = f(a).$$

La convolución se comporta bien con respecto a las series de Fourier

- Si $a_n = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx$ son los coeficientes de Fourier de $f$, $b_n = \int_0^1 g(x)e^{-2\pi inx}dx$ son los de $g$ y $c_n$ son los de $f * g$, entonces $a_n.b_n = c_n$.

Por definición:

$$c_n = \int_0^1 \left( \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t)g(t)dt \right) e^{-2\pi inx}dx = \int_{-1/2}^{1/2} g(t) \left( \int_0^1 f(x-t)e^{-2\pi inx}dx \right) dt,$$

tomando el cambio de variable $x - t = u$:

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-1/2}^{1/2} g(t) \left( \int_0^1 f(u)e^{-2\pi in(u+t)}du \right) dt = \int_{-1/2}^{1/2} g(t)e^{-2\pi int}dt \int_0^1 f(u)e^{-2\pi inu}du \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} g(t)e^{-2\pi int}dt \int_{-1/2}^{1/2} f(u)e^{-2\pi inu}du = b_n.a_n, \end{aligned}$$

ya que $f$ y $e^{-2\pi inu}du$ son periódicas de periodo 1.

Se puede usar lo anterior para regularizar $\psi(x) = x - [x] - 1/2$

La serie de Fourier de $\psi * g_\varepsilon$ es:

$$\tilde{\psi}(x) = (\psi * g_\varepsilon)(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-sen(\pi\varepsilon n)sen(2\pi nx)}{\pi^2 n^2 \varepsilon},$$

la cual converge uniformemente por el criterio de Weierstrass.

Sean:

$$\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2},$$

$$g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ en } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ extendida a } \mathbb{R} \text{ de periodo 1}$$

- Sea $\widetilde{\psi}$ la función $\psi$ regularizada, $\widetilde{\psi} = \psi * g_\varepsilon$, donde $g_\varepsilon$ es la función $\varepsilon^{-1}\phi(x/\varepsilon)$ hecha periódica de periodo 1. Se tiene que $\widetilde{\psi}(x) = -\widetilde{\psi}(-x)$.

Además, $\widetilde{\psi}$ verifica que:

$$\widetilde{\psi}(x+\varepsilon/2)-\varepsilon/2 \leq \psi \leq \widetilde{\psi}(x-\varepsilon/2)+\varepsilon/2.$$

## 1.2. Resultados auxiliares

**Igualdad de Parseval:** Si $a_n$ es el coeficiente de Fourier n-ésimo de una función continua $f$ de periodo $2L$, entonces:

$$\int_{-L}^{L} |f|^2 = 2L \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

**Clase de Schwartz:** Decimos que una función $\phi$ pertenece a la clase de Schwartz si

$$\sup_x |x^\beta \partial^\alpha \phi(x)| < \infty, \text{ para todo } \alpha,\, \beta.$$

**Fórmula de sumación de Poisson:** Si $\phi$ pertenece a la clase de Schwartz entonces:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \phi(k) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(k),$$

donde $\hat{\phi}$ indica la transformada de Fourier.

**Lema de Abel:** Para toda función aritmética $a(n)$, sea $A(x) = \sum_{n\leq x} a(n)$ y $f$ una función con derivada continua en $[1,\infty)$. Entonces tenemos

$$\sum_{1\leq n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt.$$

# 2. El exponente 2/3

## 2.1. Funciones de Bessel y término de error

Hardy [5] prueba que el error en el problema del círculo está bien aproximado por la serie de Hardy:

$$E(R) \sim R \sum_{n=1}^{M} \frac{r(n)}{\sqrt{n}} J_1(2\pi\sqrt{n}R),$$

cuando $M$ es grande y que la serie converge. Observemos que para $M$ grande, es decir, $M \to \infty$, $E(R)$ es una serie infinita de funciones de Bessel.

Calcularemos la transformada de Fourier de la función característica $\chi_R$ del círculo en $\mathbb{R}^2$, centrado en el origen y de radio $R$. En dicho cálculo aparecerán las funciones de Bessel.

Utilizando las propiedades de la convolución se acotará $\chi_R$, y posteriormente, llegaremos a una fórmula para el número de coordenadas enteras en el círculo de radio $R$, la cual constará de un sumatorio en los $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2$ multiplicado por una constante, tal que cada sumando es la convolución de dos funciones características evaluada en $\vec{n}$.

A continuación, aplicando la fórmula de sumación de Poisson a este sumatorio en los $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2$ se obtendrá una expresión para el error en el problema del círculo, $E(R)$, en la cual aparecerán las funciones de Bessel de primera especie de orden 1. Como consecuencia de la acotación de las funciones de Bessel, se llegará a que $E(R)$ está acotado por una expresión más sencilla a la cual se aplicará el lema de Abel a cada uno de sus sumandos.

Se obtendrá finalmente que $E(R)$ es "$\ll$" que una suma finita de potencias de $R$ multiplicado por potencias de $\delta$, donde $\delta$ es cualquier valor tal que $0 < \delta < R$. Escogiendo un valor óptimo de $\delta$ se llegará a que $E(R) \ll R^{2/3}$.

Las funciones de Bessel de primera especie de órdenes 0 y 1 son:

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-it\cos\theta} d\theta,$$
$$J_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^{t} uJ_0(u)du$$

Se conoce con gran aproximación su gráfica y muchas propiedades. Vamos a utilizar la siguiente propiedad:

$$J_1(t) \ll \text{mín}(t, t^{-\frac{1}{2}}), \text{ para todo } t > 0.$$

**Lema 2.1.** *Sea $\chi_R$ la función característica del círculo en $\mathbb{R}^2$ centrado en el origen y de radio $R$. Su transformada de Fourier es:*

$$\widehat{\chi}_R(\vec{\xi}) = R\frac{J_1(2\pi R||\vec{\xi}||)}{||\vec{\xi}||}, \ si \ ||\vec{\xi}|| \neq 0$$

*y* $\widehat{\chi}_R(\vec{0}) = \pi R^2$.

**Demostración**

$$\widehat{\chi}_R(\vec{0}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\vec{x}.\vec{0}}\chi_R(\vec{x})dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_R(\vec{x})dxdy = \pi R^2.$$

Si $||\vec{\xi}|| \neq 0$, denotemos por $C(\vec{0}, R)$ al círculo centrado en $\vec{0}$ y de radio $R$:

$$\widehat{\chi}_R(\vec{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\vec{x}.\vec{\xi}}\chi_R(\vec{x})dxdy = \int_{C(\vec{0},R)} e^{-2\pi i\vec{x}.\vec{\xi}}dxdy$$

Sean: $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, $\vec{x} = (x, y)$, entonces:

$$\vec{x}\cdot\vec{\xi} = (rcos\alpha, rsen\alpha)\cdot(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 rcos\alpha + \xi_2 rsen\alpha.$$

Así pues:

$$\widehat{\chi}_R(\vec{\xi}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} re^{-2\pi i(\xi_1 rcos\alpha + \xi_2 rsen\alpha)}drd\alpha.$$

Supongamos que $\vec{\xi} = (||\vec{\xi}||cos\phi, ||\vec{\xi}||sen\phi)$. Luego:

$$\vec{x} \cdot \vec{\xi} = ||\vec{\xi}||r(cos\phi cos\alpha + sen\phi sen\alpha) = ||\vec{\xi}||r\cos(\alpha - \phi)$$

De esta manera:

$$\widehat{\chi}_R(\vec{\xi}) = \int_0^{2\pi} \int_0^R re^{-2\pi i||\vec{\xi}||r\cos(\alpha-\phi)} dr d\alpha = \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} re^{-2\pi i||\vec{\xi}||r\cos(\alpha-\phi)} d\alpha \right) dr.$$

Haciendo el cambio de variable: $\alpha - \phi = u$:

$$\widehat{\chi}_R(\vec{\xi}) = \int_0^R \left( \int_{-\phi}^{2\pi-\phi} re^{-2\pi i||\vec{\xi}||r\cos(u)} du \right) dr.$$

Por ser la función $\cos x$ periódica de periodo $2\pi$:

$$\int_{-\phi}^{2\pi-\phi} re^{-2\pi i||\vec{\xi}||r\cos(u)} du = \int_0^{2\pi} re^{-2\pi i||\vec{\xi}||r\cos(u)} du.$$

Luego:

$$\widehat{\chi}_R(\vec{\xi}) = \int_0^R r \left( \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i||\vec{\xi}||rcos(u)} du \right) dr.$$

Por la definición de $J_0$:

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(2\pi||\vec{\xi}||r)cosu} du = 2\pi J_0(2\pi||\vec{\xi}||r).$$

Así que:

$$\widehat{\chi}_R(\vec{\xi}) = \int_0^R r2\pi J_0(2\pi||\vec{\xi}||r) dr.$$

Haciendo el cambio de variable: $2\pi||\vec{\xi}||r = u$:

$$\widehat{\chi}_R(\vec{\xi}) = \int_0^{2\pi||\vec{\xi}||R} 2\pi \frac{u}{2\pi||\vec{\xi}||} J_0(u) \frac{1}{2\pi||\vec{\xi}||} du = \frac{1}{2\pi||\vec{\xi}||^2} \int_0^{2\pi||\vec{\xi}||R} uJ_0(u) du.$$

Por la definición de $J_1$:

$$\frac{R}{||\vec{\xi}||}\frac{1}{2\pi||\vec{\xi}||R}\int_0^{2\pi||\vec{\xi}||R} uJ_0(u)du = \frac{R}{||\vec{\xi}||}J_1(2\pi||\xi||R).$$

Se tiene que:

$$\widehat{\chi}_R(\vec{\xi}) = \frac{R}{||\vec{\xi}||}J_1(2\pi||\vec{\xi}||R).\blacksquare$$

**Lema 2.2.** *Si "$*$"indica la convolución, para cualquier $0 < \delta < R$ se tiene:*

$$\frac{1}{\pi\delta^2}\chi_{R-\delta} * \chi_\delta \leq \chi_R \leq \frac{1}{\pi\delta^2}\chi_{R+\delta} * \chi_\delta.$$

**Demostración**

La convolución en dos dimensiones es:

$$f * g(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{t})g(\vec{x}-\vec{t})dt_1dt_2,$$

donde $t = (t_1, t_2)$.

$$1)\frac{1}{\pi\delta^2}\chi_{R-\delta} * \chi_\delta \leq \chi_R.$$

- Si $\vec{x} \notin B_R(\vec{0})$ entonces $\chi_R(\vec{x}) = 0$, por ser $0 < \delta < R$, que $\vec{x} \notin B_\delta(\vec{0}) \Rightarrow \chi_\delta(\vec{x}) = 0$.

$$\frac{1}{\pi\delta^2}\chi_{R-\delta} * \chi_\delta = \frac{1}{\pi\delta^2}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{R-\delta}(\vec{t})\chi_\delta(\vec{x}-\vec{t})dt_1dt_2.$$

Observemos que la única manera de que $\chi_{R-\delta}(\vec{t})\chi_\delta(\vec{x}-\vec{t})$ no sea cero es que $\vec{t} \in B_{R-\delta}(\vec{0})$ y $\vec{x}-\vec{t} \in B_\delta(\vec{0})$ por definición de $\chi_{R-\delta}$ y $\chi_\delta$. Pero veamos que también en este caso vale cero.

Como $\vec{x} \notin B_R(\vec{0}) \Rightarrow ||\vec{x}|| > R,$ si $t \in B_{R-\delta}(\vec{0})$ y $\vec{x}-\vec{t} \in B_\delta(\vec{0}) \Rightarrow$

$$||\vec{x}|| = ||\vec{x}-\vec{t}+\vec{t}|| \leq ||\vec{t}|| + ||\vec{x}-\vec{t}|| \leq R-\delta+\delta = R,$$

lo cual es un contradicción. Luego, si $\vec{x} \notin B_R(\vec{0})$:

$$\frac{1}{\pi\delta^2}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{R-\delta}(\vec{t})\chi_\delta(\vec{x}-\vec{t})dt_1dt_2 = 0 \leq \chi_R(\vec{x}) = 0,$$

ya que estamos suponiendo que $\vec{x} \notin B_R(\vec{0})$.

- Si $\vec{x} \in B_R(\vec{0}) \Rightarrow \chi_R(\vec{x}) = 1$, y por tanto:

$$\frac{1}{\pi\delta^2}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{R-\delta}(\vec{t})\chi_\delta(\vec{x}-\vec{t})dt_1dt_2 = \frac{1}{\pi\delta^2}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{R-\delta}(\vec{x}-\vec{t})\chi_\delta(\vec{t})dt_1dt_2,$$

mediante un cambio de variable y una dilatación.

Así queda:

$$\frac{1}{\pi\delta^2}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{R-\delta}(\vec{x}-\vec{t})\chi_\delta(\vec{t})dt_1dt_2 \leq \frac{1}{\pi\delta^2}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\delta(\vec{t})dt_1dt_2,$$

debido a que $\chi_{R-\delta}(\vec{x}-\vec{t}) \leq 1$, puesto que vale 0 ó 1.

Por la misma razón se tiene que:

$$\frac{1}{\pi\delta^2}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\delta(\vec{t})dt_1dt_2 \leq \frac{1}{\pi\delta^2}\int_{C(\vec{0},\delta)} dt_1dt_2 = \frac{1}{\pi\delta^2}\pi\delta^2 = 1 = \chi_R(\vec{x}),$$

en este caso.

2)Veamos ahora que:

$$\frac{1}{\pi\delta^2}\chi_{R+\delta} * \chi_\delta(\vec{x}) \geq \chi_R(\vec{x})$$

- Si $x \in B_R(\vec{0}) \Rightarrow \chi_R(\vec{x}) = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi\delta^2}\chi_{R+\delta} * \chi_\delta(\vec{x}) &= \frac{1}{\pi\delta^2}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{R+\delta}(\vec{t})\chi_\delta(\vec{x}-\vec{t})dt_1dt_2 = \frac{1}{\pi\delta^2}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{R+\delta}(\vec{x}-\vec{t})\chi_\delta(\vec{t})dt_1dt_2 \\ &= \frac{1}{\pi\delta^2}\int_{B_\delta(\vec{0})} \chi_{R+\delta}(\vec{x}-\vec{t})dt_1dt_2,\end{aligned}$$

ya que $\vec{t}$ varía en $B_\delta(\vec{0})$, es decir, $\vec{t} \in B_\delta(\vec{0})$. Además,

$$\vec{x} \in B_R(\vec{0}) \Rightarrow ||\vec{x}-\vec{t}|| \leq ||\vec{x}||+||\vec{t}|| \leq R+\delta \Rightarrow \vec{x}-\vec{t} \in B_{R+\delta}(\vec{0}) \Rightarrow \chi_{R+\delta}(\vec{x}-\vec{t}) = 1 \text{ sobre } B_\delta(\vec{0}).$$

Con lo cual:

$$\frac{1}{\pi\delta^2}\chi_{R+\delta} * \chi_\delta(\vec{x}) = \frac{1}{\pi\delta^2}\int_{B_\delta(\vec{0})} dt_1 dt_2 = \frac{\pi\delta^2}{\pi\delta^2} = 1.$$

- Si $\vec{x} \notin B_R(\vec{0})$ entonces $\chi_R(\vec{x}) = 0$, con lo cual:

$$\frac{1}{\pi\delta^2}\chi_{R+\delta} * \chi_\delta(\vec{x}) \geq 0 = \chi_R(\vec{x}).$$

**Lema 2.3.** *Para cada $0 < \delta < R$ existe un $\tilde{R} \in [R-\delta, R+\delta]$ tal que el número de puntos de coordenadas enteras en el círculo de radio $R$ es:*

$$\mathcal{N}(R) = \frac{1}{\pi\delta^2}\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2}(\chi_{\tilde{R}} * \chi_\delta)(\vec{n}).$$

**Demostración**

El número de puntos de coordenadas enteras en el círculo de radio $R$ es

$$\mathcal{N}(R) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2}\chi_R(\vec{n}).$$

Usando el lema anterior:

$$\frac{1}{\pi\delta^2}\chi_{R-\delta} * \chi_\delta(\vec{n}) \leq \chi_R(\vec{n}) \leq \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{\pi\delta^2}\chi_{R+\delta} * \chi_\delta(\vec{n}),$$

y, tomando la suma a ambos lados de las desigualdades, se tiene:

$$\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2}\frac{1}{\pi\delta^2}\chi_{R-\delta} * \chi_\delta(\vec{n}) \leq \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2}\chi_R(\vec{n}) \leq \frac{1}{\pi\delta^2}\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2}\chi_{R+\delta} * \chi_\delta(\vec{n}).$$

Sea:

$$f(y) = \frac{1}{\pi\delta^2}\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2}\chi_y * \chi_\delta(\vec{n}),$$

la cual es una función continua, entonces la desigualdad vista arriba queda de la siguiente manera:

$$f(R-\delta) \leq \mathcal{N}(R) \leq f(R+\delta)$$

Por el Teorema de los valores intermedios de Bolzano, existe $\tilde{R} \in [R-\delta, R+\delta]$ con $f(\tilde{R}) = \mathcal{N}(R)$ tal que:

$$\mathcal{N}(R) = \frac{1}{\pi\delta^2} \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2} (\chi_{\tilde{R}} * \chi_\delta)(\vec{n}). \blacksquare$$

**Lema 2.4.** *Sea $E(R)$ el error en el problema del círculo y $0 < \delta < R$, entonces se tiene:*

$$E(R) = \pi(\tilde{R}^2 - R^2) + \frac{\tilde{R}}{\pi\delta} \sum_{k=1}^{\infty} r(k) \frac{J_1(2\pi\tilde{R}\sqrt{k}) J_1(2\pi\delta\sqrt{k})}{k},$$

*donde $r(k)$ es el número de representaciones de $k$ como suma de dos cuadrados y $\tilde{R} \in [R-\delta, R+\delta]$.*

**Demostración**

Por el lema anterior

$$\mathcal{N}(R) = \frac{1}{\pi\delta^2} \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2} (\chi_{\tilde{R}} * \chi_\delta)(\vec{n}),$$

Utilizando la fórmula de sumación de Poisson:

$$\mathcal{N}(R) = \frac{1}{\pi\delta^2} \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2} (\widehat{\chi_{\tilde{R}} * \chi_\delta})(\vec{n}) = \frac{1}{\pi\delta^2} \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2} \widehat{\chi}_{\tilde{R}}(\vec{n}) \widehat{\chi}_\delta(\vec{n}),$$

donde se han usado las propiedades de la convolución.

$$(\widehat{\chi_{\tilde{R}} * \chi_\delta})(\vec{n}) = \widehat{\chi}_{\tilde{R}}(\vec{n}) \widehat{\chi}_\delta(\vec{n}).$$

Como por el lema 2.1:

$$\widehat{\chi}_R(\vec{x}) = R\frac{J_1(2\pi R||\vec{x}||)}{||\vec{x}||},$$

se tiene que:

$$\mathcal{N}(R) = \pi\tilde{R}^2 + \frac{\tilde{R}}{\pi\delta}\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2,\vec{n}\neq 0}\frac{J_1(2\pi\tilde{R}||\vec{n}||)}{||\vec{n}||}\frac{J_1(2\pi\delta||\vec{n}||)}{||\vec{n}||}$$

La desventaja es que $\tilde{R}\in[R-\delta, R+\delta]$, es decir, sabemos sólo que $\tilde{R}$ pertenece a este intervalo pero no sabemos cuanto vale. Si $\delta$ es pequeño entonces $\tilde{R}\simeq R$.

$E(R)$ es la diferencia entre el número de puntos de coordenadas enteras en el círculo de radio $R$ y, el área del círculo de radio $R$. Por tanto:

$$E(R) = \mathcal{N}(R) - \pi R^2 = \pi(\tilde{R}^2 - R^2) + \frac{\tilde{R}}{\pi\delta}\sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^2,\vec{n}\neq 0}\frac{J_1(2\pi\tilde{R}||\vec{n}||)}{||\vec{n}||}\frac{J_1(2\pi\delta||\vec{n}||)}{||\vec{n}||}$$

Sea $r(k) = \#\{(n,m) : n^2+m^2 = k\}$, y dado $\vec{n} = (n,m)$ entonces $||\vec{n}|| = \sqrt{n^2+m^2}$, así pues:

$$E(R) = \pi(\tilde{R}^2 - R^2) + \frac{\tilde{R}}{\pi\delta}\sum_{k=1}^{\infty} r(k)\frac{J_1(2\pi\tilde{R}\sqrt{k})}{\sqrt{k}}\frac{J_1(2\pi\delta\sqrt{k})}{\sqrt{k}},$$

lo que concluye la prueba. ■

**Lema 2.5.**

$$E(R) \ll R\delta + R^{1/2}\sum_{k\leq\delta^{-2}}\frac{r(k)}{k^{3/4}} + \frac{R^{1/2}}{\delta^{3/2}}\sum_{k\delta^{-2}}\frac{r(k)}{k^{3/2}}.$$

**Demostración**

$E(R)$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$\pi(\tilde{R}^2-R^2)+\frac{\tilde{R}}{\pi\delta}\sum_{1\leq k\leq\delta^{-2}} r(k)\frac{J_1(2\pi\tilde{R}\sqrt{k})J_1(2\pi\delta\sqrt{k})}{k}+\frac{\tilde{R}}{\pi\delta}\sum_{k\geq\delta^{-2}} r(k)\frac{J_1(2\pi\tilde{R}\sqrt{k})J_1(2\pi\delta\sqrt{k})}{k}.$$

Como $J_1(t) \ll \text{mín}(t, t^{-1/2})$:

Para cualquier $k \in [1, \infty)$ se tiene que:

$$J_1(2\pi\tilde{R}\sqrt{k}) \ll \text{mín}\left\{2\pi\tilde{R}\sqrt{k}, (2\pi\tilde{R}\sqrt{k})^{-1/2}\right\} = (2\pi\tilde{R}\sqrt{k})^{-1/2} \ll \tilde{R}^{-1/2}k^{-1/4},$$

ya que si $k \in [1, \infty)$, entonces $2\pi\tilde{R}\sqrt{k} \geq 1$.

- Si $k \leq \delta^{-2}$ se tiene $\delta\sqrt{k} \leq 1$, así:

$$J_1(2\pi\delta\sqrt{k}) \ll \text{mín}\left\{2\pi\delta\sqrt{k}, (2\pi\delta\sqrt{k})^{-1/2}\right\} \ll \text{mín}\left\{\delta\sqrt{k}, \frac{1}{\sqrt{\delta\sqrt{k}}}\right\} \ll \delta\sqrt{k}.$$

- Si $k > \delta^{-2} \Rightarrow \sqrt{k} > \delta^{-1}$:

$$J_1(2\pi\delta\sqrt{k}) \ll \text{mín}\left\{2\pi\delta\sqrt{k}, \frac{1}{2\pi\delta\sqrt{k}}\right\}.$$

Como:

$$2\pi\delta\sqrt{k} \geq 2\pi\delta\delta^{-1} = 2\pi, \text{ por tanto } \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta\sqrt{k}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

con lo cual:

$$J_1(2\pi\delta\sqrt{k}) \ll \frac{1}{2\pi\delta\sqrt{k}} \ll \delta^{-1/2}k^{-1/4}.$$

Con todo esto:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{R}}{\pi\delta}\sum_{1\leq k\leq\delta^{-2}} r(k)\frac{J_1(2\pi\tilde{R}\sqrt{k})J_1(2\pi\delta\sqrt{k})}{k} &\ll \frac{\tilde{R}}{\delta}\sum_{1\leq k\leq\delta^{-2}} r(k)\tilde{R}^{-1/2}k^{-1/4}\frac{\delta\sqrt{k}}{k} \\ &\ll \tilde{R}^{1/2}\sum_{1\leq k\leq\delta^{-2}} r(k)k^{-3/4}.\end{aligned}$$

Además:

$$\frac{\tilde{R}}{\pi\delta}\sum_{k\geq\delta^{-2}} r(k)\frac{J_1(2\pi\tilde{R}\sqrt{k})J_1(2\pi\delta\sqrt{k})}{k} \ll \frac{\tilde{R}}{\delta}\sum_{k\geq\delta^{-2}} r(k)\frac{\tilde{R}^{-1/2}k^{-1/4}\delta^{-1/2}k^{-1/4}}{k}$$
$$\ll \frac{\tilde{R}^{1/2}}{\delta^{3/2}}\sum_{k\geq\delta^{-2}} r(k)k^{-3/2}.$$

Sabemos que $\tilde{R}\in[R-\delta,R+\delta]$ con $\delta<R$, luego $\tilde{R}$ como mucho vale $R+\delta$, así que:

$$\pi(\tilde{R}^2-R^2)\ll R\delta.$$

Por tanto:

$$E(R)\ll R\delta + R^{1/2}\sum_{k\leq\delta^{-2}} r(k)k^{-3/4} + \frac{R^{1/2}}{\delta^{3/2}}\sum_{k>\delta^{-2}} r(k)k^{-3/2}.\blacksquare$$

**Lema 2.6.**

$$E(R)\ll R^{2/3}.$$

**Demostración**

Por el lema anterior teníamos que:

$$E(R)\ll R\delta + R^{1/2}\sum_{k\leq\delta^{-2}} r(k)k^{-3/4} + \frac{R^{1/2}}{\delta^{3/2}}\sum_{k>\delta^{-2}} r(k)k^{-3/2}.$$

Aplicando el Lema de Abel a la primera suma con $a_n = r(n)$, $\varphi(n) = n^{-3/4}$, y $x=\delta^{-2}$ (nótese que $A(x)=\sum_{n\leq x} r(n) = \pi x + O(\sqrt{x})$), se tiene:

$$\sum_{n\leq x} r(n)n^{-3/4} = (\pi x + O(\sqrt{x}))x^{-3/4} - \int_1^x (\pi t + O(\sqrt{t}))(\frac{-3}{4}t^{-7/4})dt$$
$$\ll \pi x^{1/4} - \int_1^x \pi t(\frac{-3}{4}t^{-7/4})dt \ll \delta^{-1/2},$$

ya que habíamos tomado $x=\delta^{-2}$.

Aplicando ahora el Lema de Abel a la segunda suma (pero ahora con $x$ arbitrariamente grande) con $\varphi(n) = n^{-3/2}$, $x = \delta^{-2}$, y

$$a_n = \begin{cases} 0, \text{ si } n \leq \delta^{-2} \\ r(n), \text{ si } n > \delta^{-2} \end{cases},$$

se tiene:

$$\sum_{k>\delta^{-2}} \frac{r(k)}{k^{3/2}} = \sum_{n>x} \frac{r(n)}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{3/2}} = \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{x} \frac{a_n}{n^{3/2}} = \lim_{x\to\infty} \sum_{n\leq x} a_n n^{-3/2}$$
$$= \lim_{x\to\infty} (A(x)\varphi(x) - \int_1^x A(t)\varphi'(t)dt) = \lim_{x\to\infty} A(x)\varphi(x) - \lim_{x\to\infty} \int_1^x A(t)\varphi'(t)dt.$$

Observemos que:

$$\lim_{x\to\infty} A(x)\varphi(x) \ll \lim_{x\to\infty} xx^{-3/2} = \lim_{x\to\infty} x^{-1/2} = 0.$$

Por tanto:

$$\sum_{k>\delta^{-2}} \frac{r(k)}{k^{3/2}} \ll -\lim_{x\to\infty} \int_1^x A(t)\varphi'(t)dt = -\int_{\delta^{-2}}^{\infty} A(t)\varphi'(t)dt$$
$$= -\int_{\delta^{-2}}^{\infty} (\pi t + O(\sqrt{t}))(\frac{-3}{2})t^{-5/2}dt \ll (\delta^{-2})^{-1/2} \ll \delta.$$

Así queda, que:

$$E(R) \ll R\delta + R^{1/2}\delta^{-1/2} + \frac{R^{1/2}}{\delta^{3/2}}\delta \ll R\delta + R^{1/2}\delta^{-1/2}.$$

Ahora escojamos un valor óptimo para $\delta$, para ello igualemos los dos sumandos de la expresión anterior, obteniendo $\delta = R^{-1/3}$ y por tanto

$$E(R) \ll R^{2/3},$$

como queríamos demostrar.■

## 2.2. Demostración por métodos elementales

Sierpinski (1903) fue el primero que intentó hacer una demostración elemental del exponente 2/3.

Henri Chaix [1] dió otra demostración elemental del exponente 2/3. Chaix consideró $D$ como un dominio encerrado por una curva y $A(D)$ el área de este dominio $D$. Si $P(D)$ es el número de puntos de coordenadas enteras en $D$, Chaix probó que:

$$|A(D) - P(D)| < 16400R^{2/3}.$$

A continuación, se demuestra que el error en el problema del círculo es $O(R^{2/3}\log R)$, resultado más débil que el de la sección anterior, sin embargo su demostración sólo involucra métodos elementales (es decir, no vamos a utilizar transformadas de Fourier ni análisis avanzado). Para ello consideraremos el círculo de radio $R$ centrado en el origen de coordenadas, y un intervalo $I = [-[\frac{R}{\sqrt{2}}] - 1, [\frac{R}{\sqrt{2}}] + 1]$, vamos a dividir este intervalo en subintervalos adosados, y en cada uno de ellos contaremos el número de puntos de coordenadas enteras entre dos rectas $r_0$ y $-r_0$, donde $r_0$ es tal que el área bajo $r_0$ coincide con el área bajo $f$.

La característica fundamental de este proceso es que nos va a permitir contar bien los puntos bajo rectas.

**Lema 2.7.** *Sean las funciones aritméticas $f_1, f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por*

$$f_1(n) = Frac\left(\frac{n}{q}\right), \;\; y \;\; f_2(n) = Frac\left(\frac{an}{q}\right),$$

*donde $a$ y $q$ son enteros positivos coprimos. Entonces $f_1$ y $f_2$ tienen la misma imagen.*

**Demostración**

Al dividir $n$ entre $q$, $n = n_1 q + r, \;$ con $0 \leq r < q, n_1 \in \mathbb{N}$. Luego

$$Frac\left(\frac{n}{q}\right) = Frac\left(\frac{n_1 q + r}{q}\right) = Frac\left(n_1 + \frac{r}{q}\right),$$

observemos que como $n_1 \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$Frac\left(\frac{n}{q}\right) = Frac\left(\frac{r}{q}\right) = \frac{r}{q}.$$

Luego

$$\text{Imagen }(f_1) = \left\{\frac{r}{q} : 0 \leq r < q\right\}.$$

Por otro lado, si intentamos repetir el mismo argumento para:

$$f_2(n) = Frac\left(\frac{an}{q}\right),$$

$n = n_1 q + r$, tal que $0 \leq r < q$:

$$\frac{an}{q} = \frac{a}{q} n_1 q + \frac{ra}{q} = an_1 + \frac{ra}{q},$$

donde $an_1 \in \mathbb{N}$ como antes pero en este caso no podemos afirmar que $ra/q$ sea menor que 1 ya que va multiplicado por $a$ que es un entero positivo. Sin embargo, como $a$ y $q$ son coprimos y $\{n : 0 \leq n < q\}$ es un sistema completo de restos módulo $q$ entonces $\{an : 0 \leq n < q\}$ es otro sistema completo de restos módulo $q$, por tanto se concluye que las imágenes son iguales.■

**Lema 2.8.** *Las funciones*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{q} \psi\left(x + \frac{a}{q} n\right), \text{ y } g(x) = \psi(qx),$$

*donde* $1 \leq a < q$ *con* $a, q \in \mathbb{N}$ *coprimos, son periódicas de periodo* $1/q$.

**Demostración**

La función dada por $g(x) = \psi(qx)$, es periódica de periodo $1/q$:

$$\psi\left(q\left(x + \frac{1}{q}\right)\right) = \psi\left(qx + \frac{q}{q}\right) = \psi(qx + 1) = \psi(qx),$$

ya que $\psi$ es periódica de periodo 1.

Ahora trataremos de ver que $f$ también es periódica de periodo $1/q$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{q} \psi(x + \frac{a}{q}n) = \psi\left(x + \frac{a}{q}\right) + \psi\left(x + \frac{2a}{q}\right) + ... + \psi\left(x + \frac{aq}{q}\right) \\
&= Frac\left(x + \frac{a}{q}\right) - \frac{1}{2} + Frac\left(x + \frac{2a}{q}\right) - \frac{1}{2} + ... + Frac\left(x + \frac{aq}{q}\right) - \frac{1}{2} \\
&= Frac\left(Frac(x) + Frac\left(\frac{a}{q}\right)\right) - \frac{1}{2} + ... + Frac\left(Frac(x) + Frac\left(\frac{aq}{q}\right)\right) - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Usando el lema anterior se tiene que

$$\left\{\text{Frac}\left(\frac{ar}{q}\right) : 0 \leq r < q\right\} = \left\{\text{Frac}\left(\frac{r}{q}\right) : 0 \leq r < q\right\},$$

es decir, imagen($f_1$)=imagen($f_2$). De esta forma:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{q} \psi(x + \frac{a}{q}n) \\
&= \psi\left(x + \frac{1}{q}\right) + \psi\left(x + \frac{2}{q}\right) + ... + \psi\left(x + \frac{q}{q}\right). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Calculemos ahora $f\left(x + \frac{1}{q}\right)$, utilizando el mismo argumento anterior:

$$\begin{aligned}
f(x + \frac{1}{q}) &= \psi\left(\left(x + \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q}\right) + \psi\left(\left(x + \frac{1}{q}\right) + \frac{2}{q}\right) + ... + \psi\left(\left(x + \frac{1}{q}\right) + \frac{q}{q}\right) \\
&= \psi\left(x + \frac{2}{q}\right) + \psi\left(x + \frac{3}{q}\right) + ... + \psi\left(x + \frac{q+1}{q}\right).
\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\psi\left(x + \frac{q+1}{q}\right) = \psi\left(x + 1 + \frac{1}{q}\right) = \psi\left(x + \frac{1}{q}\right),$$

por ser $\psi$ periódica de periodo 1. Luego:

$$f\left(x + \frac{1}{q}\right) = f(x),$$

con lo cual se concluye que $f$ es periódica de periodo $1/q$.■

**Lema 2.9.**
$$\sum_{n=1}^{q}\psi\left(x+\frac{an}{q}\right)=\psi(xq),\ \textit{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

**Demostración**

Primero demostraremos que con la notación del lema anterior:

$$f(x) \text{ y } g(x) \text{ coinciden en } \left[0,\frac{1}{q}\right).$$

Es evidente que para $x\in[0,\frac{1}{q})$ se tiene:

$$g(x)=qx-\frac{1}{2},$$

ya que en $[0,\frac{1}{q})$ se tiene que $0\leq qx<1$, con lo cual $[qx]=0$.

Calculemos ahora $f$. Según habíamos visto antes $f$ viene dada por 1 de la página anterior, así que

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{n=1}^{q}\left\{\left(x+\frac{n}{q}\right)-\left[x+\frac{n}{q}\right]-\frac{1}{2}\right\}\\ &=\sum_{n=1}^{q-1}\left\{\left(x+\frac{n}{q}\right)-\left[x+\frac{n}{q}\right]-\frac{1}{2}\right\}+\left(x+\frac{q}{q}\right)-\left[x+\frac{q}{q}\right]-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como: $0\leq x<\frac{1}{q}$ y, $1\leq n\leq q-1$, entonces:

$$0\leq x+\frac{n}{q}<\frac{1}{q}+\frac{q-1}{q}=\frac{1+q-1}{q}=1\Rightarrow 0\leq x+\frac{n}{q}<1,$$

Así:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{q-1}\left\{\left(x+\frac{n}{q}\right)-\frac{1}{2}\right\}+(x+1)-[x+1]-\frac{1}{2}.$$

Observemos que $x \in [0, \frac{1}{q})$, además como $q \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \frac{1}{q} \leq 1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow [x+1] = 1$. Efectuando la suma anterior, se obtiene:

$$f(x) = qx - \frac{1}{2}.$$

Hemos obtenido que en $[0, \frac{1}{q})$ :

$$g(x) = qx - \frac{1}{2}, \text{ y } f(x) = qx - \frac{1}{2},$$

lo que implica que $f$ y $g$ coinciden en $\left[0, \frac{1}{q}\right)$. Como además, son ambas periódicas de periodo $\frac{1}{q}$, se tiene que $f$ y $g$ coinciden para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos probar.■

**Lema 2.10.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, y $N \in \mathbb{Z}^+$. Existen enteros $a$, $q$ con $1 \leq q \leq N$ tales que $|q\alpha - a| \leq N^{-1}$, y para todo $\alpha$ existe una fracción irreducible $\frac{a}{q}$, $1 \leq q \leq N$, con $|\alpha - \frac{a}{q}| \leq (qN)^{-1}$.*

**Demostración**

En el conjunto $\{Frac(0\alpha), Frac(1\alpha), Frac(2\alpha), ..., Frac(N\alpha)\}$ hay $N+1$ números, y todos ellos están situados en el intervalo $[0,1)$, ya que la parte fraccionaria de un número es mayor o igual que 0 y menor estrictamente que 1.

Los $N+1$ elementos determinan $N$ subintervalos. Si los $N+1$ números estuviesen espaciados más de $N^{-1}$, se tendría que la distancia de $Frac(0.\alpha) = 0$ al elemento más lejano de este conjunto sería mayor estrictamente que $NN^{-1} = 1$, lo cual es una contradicción porque la longitud del intervalo $[0,1)$ es 1.

Luego existen dos números de la forma $Frac(n_1.\alpha), Frac(n_2.\alpha)$ con $0 \leq n_1, n_2 \leq N$, con $n_1 \neq n_2$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^+$ tales que están espaciados a lo más $N^{-1}$, lo cual significa:

$$|n_1\alpha - [n_1\alpha] - (n_2\alpha - [n_2\alpha])| = |(n_1 - n_2)\alpha - ([n_1\alpha] - [n_2\alpha])| \leq N^{-1}.$$

Sea $n_1 - n_2 = q$, observemos que $q \in \mathbb{Z}$ y, $1 \leq q \leq N$. Como $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, entonces su diferencia $q = n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}$. Además, como $n_1, n_2 \leq N$, $n_1 \neq n_2$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $1 \leq q \leq N$.

Luego puede afirmarse que existen $q = n_1 - n_2, a = [n_1\alpha] - [n_2\alpha]$ enteros con $1 \leq q \leq N$ tales que $|q\alpha - a| \leq N^{-1}$. Y de aquí

$$|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{qN}.$$

Además, podemos suponer que $\frac{a}{q}$ es irreducible porque en otro caso simplificaríamos.$\blacksquare$

**Lema 2.11.** *Sea $f \in C^2([A,B])$ positiva con $A, B \in \mathbb{Z}, B - A = N$, y $0 < |f''| \leq \lambda_2$. Sea $a/q$ la fracción que se obtiene en el lema anterior para $\alpha = f'(A)$. Entonces la recta*

$$r(x) = a\frac{(x-A)}{q} + f(A)$$

*satisface:*

$$|f(x) - r(x)| \leq \lambda_2 N^2 + q^{-1}, \text{ para } x \in [A, B].$$

**Demostración**

Es fácil comprobar la siguiente igualdad:

$$|f(x) - r(x)| = \left| \left( \frac{f(x) - f(A)}{x - A} - f'(A) + f'(A) - \frac{a}{q} \right) (x - A) \right|,$$

utilizando el Teorema del valor medio:

$f(x) - f(A) = (x - A)f'(c)$, donde $c \in [x, A]$.

Luego:

$$|f(x) - r(x)| = \left| \left( f'(c) - f'(A) + f'(A) - \frac{a}{q} \right) (x - A) \right| \leq \left( |f'(c) - f'(A)| + \left| f'(A) - \frac{a}{q} \right| \right) |x - A|.$$

Utilizando de nuevo el Teorema del valor medio:

$$|f(x) - r(x)| \leq \left( |(c - A)f''(k)| + \left| f'(A) - \frac{a}{q} \right| \right) |x - A|.$$

Usando el lema anterior para $\alpha = f'(A)$, se tiene que existe una fracción irreducible $\frac{a}{q}$, con $1 \leq q \leq N$, tal que

$$\left| f'(A) - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}, \text{ por tanto}$$

$$|f(x) - r(x)| \leq \left( |(c - A) f''(k)| + \frac{1}{qN} \right) (x - A).$$

Observemos que como $c \in [A, B]$ entonces $c - A \leq B - A = N$. Además, por hipótesis $0 < |f''(k)| \leq \lambda_2$. Y como $x \in [A, B]$, también se verifica que $|x - A| \leq B - A = N$, así que:

$$|f(x) - r(x)| \leq \left( N\lambda_2 + \frac{1}{qN} \right) N = N^2 \lambda_2 + \frac{1}{q}, \text{ para } x \in [A, B]. \blacksquare$$

**Lema 2.12.** *La gráfica de $f$ está contenida entre dos rectas de la forma*

$$r_1(x) = \frac{ax}{q} + b_1, r_2(x) = \frac{ax}{q} + b_2,$$

*con $0 < b_1 - b_2 \leq 2\lambda_2 N^2 + 2q^{-1}$.*

*Además, existe*

$$r_0(x) = \frac{ax}{q} + b_0$$

*tal que $r_2(x) < r_0(x) < r_1(x)$ de manera que el área bajo $r_0$ coincide con el área bajo $f$.*

**Demostración**

En el intervalo $[A, B]$ $f$ está contenida entre dos rectas $r_1(x)$ y $r_2(x)$ definidas en el enunciado del lema. Por el lema anterior, sabemos que si:

$$r(x) = a\frac{(x - A)}{q} + f(A),$$

entonces:

$$|f(x) - r(x)| \leq \lambda_2 N^2 + q^{-1}, \text{ para } x \in [A, B].$$

Consideremos la recta $r(x)$ del lema anterior, y sea $\mathcal{M} = \text{máx}_x |f(x) - r(x)| \leq \lambda_2 N^2 + \frac{1}{q}$. Sea $r_1(x)$ una recta paralela a $r(x)$ por encima de ella tal que $|r(x) - r_1(x)| = r_1(x) - r(x) = \mathcal{M}$, y sea $r_2(x)$ una recta paralela a $r(x)$ que queda por debajo de $f$, tal que $|r(x) - r_2(x)| = r(x) - r_2(x) = \mathcal{M}$. Entonces se tiene que:

$$0 < r_1(x) - r_2(x) = (r_1(x) - r(x)) + (r(x) - r_2(x)) = 2\mathcal{M} \leq 2\lambda_2 N^2 + \frac{2}{q}.$$

Sea

$$F(t) = \int_A^B \left( \frac{a}{q} x + t \right) dx - \int_A^B f(x) dx.$$

Observemos que para $t = b_1$,

$$F(b_1) = \int_A^B \left( \frac{a}{q} x + b_1 \right) dx - \int_A^B f(x) dx = \int_A^B (r_1(x) - f(x)) dx > 0,$$

ya que $r_1(x)$ es la recta que queda por encima de $f$, es decir, $r_1 > f$.

Por otro lado, para $t = b_2$:

$$F(b_2) = \int_A^B \left( \frac{a}{q} x + b_2 \right) dx - \int_A^B f(x) dx = \int_A^B (r_2(x) - f(x)) dx < 0,$$

ya que $r_2(x)$ es la recta que queda por debajo de $f$, es decir, $r_2 < f$.

Luego debe de existir $b_0 \in [b_1, b_2]$ tal que

$$F(b_0) = \int_A^B \left( \frac{a}{q} x + b_0 \right) dx - \int_A^B f(x) dx = 0,$$

luego el área bajo $r_0$ coincide con el área bajo $f$.■

**Lema 2.13.** *Sea $\mathcal{N}_q$ el número de puntos de coordenadas enteras entre $r_0$ y $-r_0$, en el intervalo $[A, B]$ contando sólo la mitad de los puntos de las fronteras derecha e izquierda. Si $q | N + 1$, entonces*

$$\mathcal{N}_q = 2\int_A^B f + O(Nq^{-1}).$$

**Demostración**

Sea $\mathcal{N}_e$, el número de puntos de coordenadas enteras entre $r_0$ y $-r_0$ contando completamente los puntos en las fronteras,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_e &= \sum_{n=A}^{B}\left(1+2\left[\frac{a}{q}n+b_0\right]\right)\\
&= \sum_{n=A}^{B}(-2)\psi\left(\frac{a}{q}n+b_0\right)+\sum_{n=A}^{B}2\left(\frac{a}{q}n+b_0\right).
\end{aligned}$$

Observemos que utilizando la siguiente igualdad que se cumple para funciones lineales,

$$\sum_{n=A}^{B} l(n) = \frac{l(A)+l(B)}{2} + \int_A^B l(t)dt,$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=A}^{B}\left(\frac{a}{q}n+b_0\right) &= 2\left(\frac{r_0(A)+r_0(B)}{2}+\int_A^B r_0(t)dt\right)\\
&= r_0(A)+r_0(B)+2\int_A^B r_0(t)dt = r_0(A)+r_0(B)+2\int_A^B f(t)dt,
\end{aligned}$$

ya que por el lema anterior el área bajo $r_0$ coincide con el área bajo $f$, se tiene que:

$$\int_A^B r_0(t)dt = \int_A^B f(t)dt.$$

Por otro lado, si suponemos que $q|N+1$:

$$\sum_{n=A}^{B}\psi\left(\frac{a}{q}n+b_0\right) = \psi(b_0q)\frac{B-A+1}{q} = \frac{N+1}{q}\psi(b_0q) = O\left(\frac{N}{q}\right),$$

ya que $B - A = N$.

Luego

$$\mathcal{N}_e = r_0(A) + r_0(B) + 2\int_A^B f(x)dx + O\left(\frac{N}{q}\right).$$

Para obtener $\mathcal{N}_q$ hemos de contar sólo la mitad de los puntos de las fronteras derecha e izquierda, así que queda:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_q &= r_0(A) + r_0(B) + 2\int_A^B f(x)dx + O\left(\frac{N}{q}\right) - [r_0(A)] - [r_0(B)] - 1\\ &= 2\int_A^B f(x)dx + O\left(\frac{N}{q}\right) + O(1).\blacksquare\end{aligned}$$

**Lema 2.14.** *Si $q|N+1$, el número de puntos de coordenadas enteras que hay en el romboide determinado por las rectas $r_1$ y $r_2$ para $A \leq x \leq B$ y $N = B - A$ es, sin contar los que pertenecen a la base inferior:*

$$\mathcal{R}_q = O(Nq^{-1} + \lambda_2 N^3).$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_q &= \sum_{n=A}^{B}\left(\left[\frac{an}{q} + b_1\right] - \left[\frac{an}{q} + b_2\right]\right)\\ &= \sum_{n=A}^{B}\{\left(\left[\frac{an}{q} + b_1\right] - \left[\frac{an}{q} + b_2\right]\right) - \left(\frac{an}{q} + b_1\right) + \frac{1}{2} + \left(\frac{an}{q} + b_2\right)\\ &- \frac{1}{2} + \left(\frac{an}{q} + b_1\right) - \left(\frac{an}{q} + b_2\right)\}\\ &= \sum_{n=A}^{B}\psi\left(\frac{an}{q} + b_2\right) - \sum_{n=A}^{B}\psi\left(\frac{an}{q} + b_1\right) + \sum_{n=A}^{B}\left(\frac{an}{q} + b_1 - \frac{an}{q} - b_2\right)\end{aligned}$$

Observemos que si $q|N+1$, entonces $N+1 = qk$, con $k \in \mathbb{Z}$, por el lema 2.9:

$$\mathcal{R}_q = \psi(b_2 q) - \psi(b_1 q) + (b_1 - b_2)(N+1) =$$
$$= Frac(b_2 q) - Frac(b_1 q) + (b_1 - b_2)(N+1)$$

Usando que $0 < b_1 - b_2 \leq 2\lambda_2 N^2 + 2q^{-1}$, se obtiene la acotación deseada.■

**Lema 2.15.** *Sea $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ en $I = [-M, M]$ con $M = \left[\frac{R}{\sqrt{2}}\right] + 1$. Supongamos que $I$ se divide en subintervalos adosados $I_k = [A_k, B_k], k = 0, 1, 2, ...,$ de longitudes $N_k$ con $A_0 = -M, \cup I_k = I$. A cada $A_k$ se le asigna $a/q, 1 \leq q \leq N$, de tal forma que:*

$$\left| f'(A_k) - \frac{a}{q} \right| < (qN)^{-1}, \quad (*)$$

*y ajustamos $B_k$ de manera que $q|N_k + 1$ con $N \leq N_k \leq 2N$ (excepto en el último intervalo en el que es obligado $B_k = -M$).*

*Entonces fijado $a/q$, la desigualdad $(*)$, sólo puede cumplirse para $O(Rq^{-1}N^{-2} + 1)$ valores de $k$.*

**Demostración**

Sea

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| x - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{qN} \right\} = \left( \frac{-1}{qN} + \frac{a}{q}, \frac{a}{q} + \frac{1}{qN} \right).$$

Si sale el mismo $a/q$ para $A_{r+1}, A_{r+2}, ..., A_{r+k}$ significa que

$$f'(A_{r+1}), ..., f'(A_{r+k}) \in \left( \frac{-1}{qN} + \frac{a}{q}, \frac{a}{q} + \frac{1}{qN} \right).$$

Como consecuencia de esto se tiene que:

$$|f'(A_{r+k}) - f'(A_{r+1})| \leq \left( \frac{a}{q} + \frac{1}{qN} \right) - \left( \frac{-1}{qN} + \frac{a}{q} \right).$$

Utilizando el Teorema del valor medio:

$$|f'(A_{r+k}) - f'(A_{r+1})| = |f''(c)||A_{r+k} - A_{r+1}|,$$

Luego:

$$\frac{2}{qN} > |f'(A_{r+k}) - f'(A_{r+1})| \geq |f''(c)|(k-1)N,$$

ya que como por hipótesis $N_k \geq N$, se tiene que $A_{r+k} - A_{r+1} \geq (k-1)N$.

De esta forma se llega a la siguiente desigualdad

$$\frac{2}{qN} > |f''(c)|(k-1)N \Rightarrow k < \frac{2}{qN^2|f''(c)|} + 1.$$

Calculemos $f''(c)$, donde $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ en $I = [-M, M]$, con $M = \left[\frac{R}{\sqrt{2}}\right] + 1$. Tras algunos cálculos se obtiene:

$$|f''(x)| = \frac{R^2}{(\sqrt{R^2 - x^2})^3} \geq \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

Luego, nos queda

$$k < \frac{2}{qN^2|f''(c)|} + 1 \leq \frac{2R}{qN^2} + 1,$$

que es lo que queríamos probar.■

**Lema 2.16.** *Para la circunferencia, el número de puntos de coordenadas enteras en todos los romboides correspondientes a los $I_k$ es:*

$$\mathcal{R} \ll \sum_{0 \leq a \leq q \leq N} (Rq^{-1}N^{-2} + 1)(Nq^{-1} + N^3R^{-1}), \ \textit{donde } m.c.d(a,q) = 1.$$

*Si $N = [R^{1/3}]$ se deduce $\mathcal{R} = O(R^{1/3} \log R)$.*

**Demostración**

Recordemos que $\mathcal{R}_q = O(Nq^{-1} + \lambda_2 N^3)$, donde $\mathcal{R}_q$ es el número de puntos de coordenadas enteras que hay en el romboide determinado por las rectas $r_1, r_2$ (sin contar los que pertenecen a la base inferior). Además, vimos en el lema anterior que fijado $\frac{a}{q}$,

$$\left| f'(A_k) - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{qN},$$

sólo puede cumplirse para $O(Rq^{-1}N^{-2} + 1)$ valores de $k$. Luego

$$\mathcal{R} \ll \sum_{0 \le a \le q \le N} (Rq^{-1}N^{-2} + 1)(Nq^{-1} + N^3R^{-1}), \text{ donde } m.c.d(a,q) = 1.$$

Observemos que si tomamos $N = [R^{1/3}]$ (en realidad vamos a sustituir $N$ por $R^{1/3}$, ya que estamos utilizando la notación $O$ grande):

$$\mathcal{R} \ll \sum_{0 \le a \le q \le R^{1/3}} (R^{1/3}q^{-1} + 1)(R^{1/3}q^{-1} + 1) \ll \sum_{0 \le a \le q \le R^{1/3}} (R^{1/3}q^{-1})^2.$$

Así que

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = O\left( \sum_{0 \le a \le q \le R^{1/3}} R^{2/3}q^{-2} \right) &= O\left( \sum_{1 \le q \le R^{1/3}} \sum_{a \le q} R^{2/3}q^{-2} \right) \\ = O\left( \sum_{q=1}^{[R^{1/3}]} R^{2/3}q^{-1} \right) &= O\left( R^{2/3} \sum_{q=1}^{[R^{1/3}]} \frac{1}{q} \right). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\sum_{q=2}^{[R^{1/3}]} \frac{1}{q} \le \int_1^{[R^{1/3}]} \frac{1}{q} dq = \log q \bigg|_1^{[R^{1/3}]} = O(\log R),$$

luego

$$\mathcal{R} = O(R^{2/3} \log R). \blacksquare$$

**Lema 2.17.** *El número de puntos de coordenadas enteras en $I$ entre las funciones escalonadas determinadas por los segmentos de recta $r_0$ y $-r_0$ (en los $I_k$) y contando sólo la mitad de los puntos con $x = \pm M$, es*

$$\mathcal{N} = 2\int_{-M}^{M} \sqrt{R^2 - x^2}dx + O(R^{2/3}).$$

**Demostración:**

Por el lema 2.13

$$\mathcal{N} = \sum_{k\in K} \mathcal{N}_q = \sum_{k\in K} 2\int_{A_k}^{B_k} f(x)dx + \sum_{k\in K} O(Nq^{-1}).$$

Como hemos tomado $N = [R^{1/3}]$, se tiene que:

$$\mathcal{N} = 2\int_{-M}^{M} \sqrt{R^2 - x^2}dx + \sum_{k\in K} O(R^{1/3}q^{-1}).$$

Por el lema 2.15 fijado $a/q$ puede haber a lo más $O(Rq^{-1}N^{-2} + 1)$ sumatorios con dicho $\frac{a}{q}$, luego:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= 2\int_{-M}^{M} \sqrt{R^2 - x^2}dx + \sum_{1\leq a\leq q\leq R^{1/3}} O(R^{1/3}q^{-1}) \cdot (Rq^{-1}R^{-2/3} + 1) \\
&= 2\int_{-M}^{M} \sqrt{R^2 - x^2}dx + \sum_{1\leq a\leq q\leq R^{1/3}} O(R^{1/3}q^{-1}(Rq^{-1}R^{-2/3} + 1)) \\
&= 2\int_{-M}^{M} \sqrt{R^2 - x^2}dx + \sum_{1\leq a\leq q\leq R^{1/3}} O(R^{2/3}q^{-2}),
\end{aligned}$$

ya que como $q \leq R^{1/3} \implies R^{1/3}q^{-1} \geq 1 \implies R^{1/3}q^{-1} = O(R^{2/3}q^{-2})$.

Veamos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq a\leq q\leq R^{1/3}} R^{2/3}q^{-2} &= \sum_{q\leq R^{1/3}} \sum_{1\leq a\leq q} R^{2/3}q^{-2} = \sum_{q\leq R^{1/3}} R^{2/3}q^{-2}q \\
&= \sum_{q\leq R^{1/3}} R^{2/3}q^{-1} = R^{2/3} \sum_{q\leq R^{1/3}} q^{-1} \leq R^{2/3}(1 + \int_1^{R^{1/3}} \frac{1}{q}dq) = O(R^{2/3}\log R).
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\mathcal{N} = 2\int_{-M}^{M} \sqrt{R^2 - x^2}dx + O(R^{2/3}\log R).\blacksquare$$

**Lema 2.18.** *El número de puntos de coordenadas enteras en la porción del círculo de radio $R$, con $x \in [-M, M]$ es:*

$$\mathcal{W} = 2\sqrt{R^2 - M^2} + 2\int_{-M}^{M} \sqrt{R^2 - x^2}dx + O(R^{2/3}\log R).$$

**Demostración:**

Por los lemas 2.16 y 2.17:

$$\mathcal{W} = \mathcal{N} + \mathcal{R} + 2[\sqrt{R^2 - M^2}] = 2\int_{-M}^{M} \sqrt{R^2 - x^2}dx + O(R^{2/3}\log R) + 2[\sqrt{R^2 - M^2}],$$

como $[x] = x + O(1)$, se tiene que:

$$\mathcal{W} = 2\sqrt{R^2 - M^2} + 2\int_{-M}^{M} \sqrt{R^2 - x^2}dx + O(R^{2/3}\log R).\blacksquare$$

**Teorema 2.1.** *El error en el problema del círculo es $O(R^{2/3}\log R)$.*

**Demostración:**

Por el lema 2.18, conocemos que $\mathcal{W}$ es el número de puntos de coordenadas enteras en el círculo de radio $R$ con $x \in [-M, M]$.

Consideremos las porciones del círculo dadas por $|x| \leq M$ y $|y| \leq M$, éstas cubren todo el área del círculo excepto a lo más cuatro unidades. Además, el cuadrado $[-M, M] \times [-M, M]$ está contenido en ambas, por tanto el área del círculo es:

$$\pi R^2 = 2\int_{-M}^{M} \sqrt{R^2 - x^2}dx + 2\int_{-M}^{M} \sqrt{R^2 - y^2}dy - 4M^2 + O(1).$$

Por otra parte, como el número de puntos del retículo en el cuadrado es $(2M + 1)^2$, según el lema 2.18, el número total de puntos en el círculo será:

$$N_R = 2\int_{-M}^{M}\sqrt{R^2-x^2}dx + 2\int_{-M}^{M}\sqrt{R^2-y^2}dy + 4\sqrt{R^2-M^2} - (2M+1)^2 + O(R^{2/3}\log R).$$

Restando estas dos expresiones, se obtiene:

$$N_R - \pi R^2 = 4\sqrt{R^2-M^2} - 4M + O(R^{2/3}\log R).$$

Y usando que $M = \left[\frac{R}{\sqrt{2}}\right] + 1$ se concluye que el error en el problema del círculo viene dado por $O(R^{2/3}\log R)$. $\blacksquare$

# 3. El método de las sumas trigonométricas

## 3.1. Análisis armónico del término de error

Esta sección es una consecuencia de las series de Fourier.

En este apartado se demuestra el siguiente teorema:

Sea $f \in C^2([a,b])$ con $f(a) = f(b) = 0, b-a = O(N),$ y $N^{-1} \ll |f''| \ll N^{-1}$. Sea $\mathcal{P}$ el número de puntos de $\mathbb{Z}^2$ en la región limitada por la gráfica de $f$ y el eje $X$, entonces se cumple

$$\mathcal{P} = \frac{b-a}{2} + \int_a^b |f(t)|dt + E,$$

con $E = O(N^{2/3})$, el cual nos permite contar el número de puntos de coordenadas enteras en la región limitada por la gráfica de una función y el eje $X$. Para ello utilizamos la función $\psi$, $\tilde{\psi}$ (que es la función $\psi$ regularizada), el desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{\psi}$, y el teorema de estimación de sumas trigonométricas para obtener una estimación del término de error $E$, en la cual aparecerá una suma infinita, la cual dividiremos en dos sumas de tal forma que podremos aplicar propiedades del seno para obtener una estimación más sencilla en función de $\varepsilon$, donde $0 < \varepsilon < 1$. Tomando $\varepsilon = N^{-1/3}$ se concluirá la demostración del teorema.

Posteriormente, utilizando este teorema, se divide el círculo de radio $R$ en el cuadrado inscrito en el mismo y cuatro segmentos circulares, y se cuenta el número de puntos de coordenadas enteras en cada segmento circular. Obteniendo de esta forma que el error en el problema del círculo de radio $R$ es $O(R^{2/3})$.

**Lema 3.1.**

$$E \ll 1 + \left| \sum_{a \le n \le b} \psi(f(n)) \right|.$$

**Demostración**

Supongamos que $f$ es positiva,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \sum_{a\leq n\leq b}([f(n)]+1) = \sum_{a\leq n\leq b}(\psi(f(n))+[f(n)]+1-\psi(f(n)))\\
&= \sum_{a\leq n\leq b}\left(-\psi(f(n))+f(n)-[f(n)]-\frac{1}{2}+[f(n)]+1\right) = \sum_{a\leq n\leq b}\left(-\psi(f(n))+f(n)+\frac{1}{2}\right)\\
&= -\sum_{a\leq n\leq b}\psi(f(n))+\frac{1}{2}(b-a)+O(1)+\sum_{a\leq n\leq b}f(n).
\end{aligned}$$

Utilizando la aproximación de sumas por integrales:

$$\sum_{a\leq n\leq b}f(n) = \int_a^b f + O\left(\sum_{a\leq n\leq b}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|\right).$$

Como $|f''(x)| = O(N^{-1})$, y $b-a = O(N)$, el último término $O(\sum_n \sup|f''(x)|) = O(1)$, y al sustituir en la fórmula para $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = -\sum_{a\leq n\leq b}\psi(f(n)) + \frac{b-a}{2} + \int_a^b f + O(1),$$

lo cual implica que:

$$E = -\sum_{a\leq n\leq b}\psi(f(n)) + O(1) \Rightarrow E \ll 1 + \sum_{a\leq n\leq b}\psi(f(n)),$$

si $f$ es positiva.

Si $f$ fuese negativa, para contar el número de puntos de coordenadas enteras en la región limitada por la gráfica de $f$ y el eje $X$, se tomaría el valor absoluto de $f$.■

**Definición**

Sea $\phi$ continua no necesariamente periódica con $sop\phi \subset [\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$, $\phi \geq 0$, y $\int \phi = 1$. Sea $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Entonces la función regularizada de $\psi$, a la cual denotamos por $\tilde{\psi}$ viene dada por $\tilde{\psi} = \psi * g_\varepsilon$.

**Lema 3.2.** *Sea $\tilde{\psi}$, la función $\psi$ regularizada. Para $0<\varepsilon<1$:*

$$\sum_{a\leq n\leq b} \tilde{\psi}\left(f(n)+\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(\varepsilon N) \leq \sum_{a\leq n\leq} \psi(f(n)) \leq \sum_{a\leq n\leq b} \tilde{\psi}\left(f(n)-\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(\varepsilon N)$$

**Demostración**

Por ser $\tilde{\psi}$ la función $\psi$ regularizada, se verifica:

$$\tilde{\psi}\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2} \leq \psi(x) \leq \tilde{\psi}\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando $x=f(n)$, y la suma sobre $a\leq n\leq b$ a ambos lados de las desigualdades:

$$\sum_{a\leq n\leq b}\left(\tilde{\psi}\left(f(n)+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \psi(f(n)) \leq \sum_{a\leq n\leq b}\left(\tilde{\psi}\left(f(n)-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Luego:

$$\sum_{a\leq n\leq b} \tilde{\psi}\left(f(n)+\frac{\varepsilon}{2}\right)-O(\varepsilon N) \leq \psi(f(n)) \leq \sum_{a\leq n\leq b} \tilde{\psi}\left(f(n)-\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(\varepsilon N).\blacksquare$$

**Lema 3.3.** $E \ll S+\varepsilon N+1$, *donde*

$$S=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{|sen(\pi\varepsilon h)|}{h^2\varepsilon}\left|\sum_{a\leq n\leq b} e(hg(n))\right|, \ con\ g(n)=f(n)\pm\tfrac{\varepsilon}{2},$$

*donde* $\pm$ *indica que la desigualdad del lema se cumple con alguno de los dos signos, aunque no necesariamente con los dos.*

**Demostración**

- Si $\sum_{a\leq n\leq b}\psi(f(n))\geq 0$, entonces:

$$E \ll 1+\left|\sum_{a\leq n\leq b}\psi(f(n))\right| \ll 1+\left|\sum_{a\leq n\leq b}\tilde{\psi}\left(f(n)-\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(\varepsilon N)\right|.$$

- Si $\sum_{a\leq n\leq b}\psi(f(n))<0$, entonces:

$$E \ll 1 + \left| \sum_{a \le n \le b} \psi(f(n)) \right| \ll 1 + \left| \sum_{a \le n \le b} \tilde{\psi}\left(f(n) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + O(\varepsilon N) \right|.$$

Luego, puede concluirse que:

$$E \ll 1 + \left| \sum_{a \le n \le b} \tilde{\psi}\left(f(n) \pm \frac{\varepsilon}{2}\right) + O(\varepsilon N) \right| \ll 1 + \left| \sum_{a \le n \le b} \tilde{\psi}\left(f(n) \pm \frac{\varepsilon}{2}\right) \right| + \varepsilon N.$$

Observemos, que tenemos que llegar a que $E \ll S + \varepsilon N + 1$, luego queremos ver que:

$$\left| \sum_{a \le n \le b} \tilde{\psi}\left(f(n) \pm \frac{\varepsilon}{2}\right) \right| \le S.$$

Sea $g(n) = f(n) \pm \frac{\varepsilon}{2}$, para simplificar la notación, utilizando que el desarrollo de Fourier de $\tilde{\psi}$ es:

$$\tilde{\psi}(x) = \psi * g_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-sen(\pi\varepsilon n)sen(2\pi nx)}{\pi^2 n^2 \varepsilon},$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{a \le n \le b} \tilde{\psi}(g(n)) \right| &= \left| \sum_{a \le n \le b} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{-sen(\pi\varepsilon n)sen(2\pi hg(n))}{\pi^2 h^2 \varepsilon} \right| \\ &\ll \sum_{h=1}^{\infty} \left| \frac{-sen(\pi\varepsilon h)}{\pi^2 h^2 \varepsilon} \right| \left| \sum_{a \le n \le b} sen(2\pi hg(n)) \right|. \end{aligned}$$

Como:

$$e(hg(n)) = e^{2\pi i hg(n)} = cos(2\pi hg(n)) + isen(2\pi hg(n)),$$

se tiene que $|sen(2\pi hg(n))| \le |e(hg(n))|$.

Por tanto queda:

$$\left|\sum_{a\leq n\leq b}\tilde{\psi}(g(n))\right| \ll \sum_{h=1}^{\infty}\left|\frac{-sen(\pi\varepsilon h)}{\pi^2 h^2\varepsilon}\right|\left|\sum_{a\leq n\leq b} e(hg(n))\right|.\blacksquare$$

**Lema 3.4.**

$$S \ll N^{1/2}\sum_{h=1}^{\infty} h^{-3/2}\varepsilon^{-1}|sen(\pi\varepsilon h)|.$$

**Demostración**

La demostración de este lema se basa en el Teorema de estimación de sumas trigonométricas Graham y Kolesnik [3], que dice lo siguiente:

“Supongamos que $y$ es una función real con dos derivadas continuas en $I$. Supongamos también que hay algún $\lambda > 0$ y algún $\alpha \geq 1$ tal que:

$$\lambda \leq |y''(x)| \leq \alpha\lambda, \text{ en } I\ .$$

Entonces:

$$\sum_{n\in I} e(y(n)) \ll \alpha|I|\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}\text{”}.$$

En nuestro caso, sea $F(n) = hg(n) = h(f(n) \pm \frac{\varepsilon}{2})$:

$$F'(n) = hf'(n)$$
$$F''(n) = hf''(n).$$

Como $|f''| \ll N^{-1}$, podemos tomar $\alpha = k', \lambda = kN^{-1}h$, los cuales verifican:

$$\lambda \leq |hf''(n)| \leq \alpha\lambda.$$

Por el Teorema de estimación de sumas trigonométricas enunciado anteriormente,

$$\sum_{a\leq n\leq b} e(hg(n)) \ll \alpha|I|\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2} \ll N^{1/2}h^{1/2} + N^{1/2}h^{-1/2},$$

ya que $\lambda = kN^{-1}h, \alpha = k', b - a = |I| = O(N)$.

Por tanto, como $h$ es un índice de sumación tal que $h \in [1, \infty]$ implica que $h^{-1/2} \leq h^{1/2}$. Con lo cual el término $N^{1/2}h^{-1/2}$ es absorbido por el término $N^{1/2}h^{1/2}$.

$$\sum_{a \leq n \leq b} e(hg(n)) \ll N^{1/2}h^{1/2}.$$

Además, como por el lema anterior teníamos que:

$$S = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|sen(\pi\varepsilon h)|}{h^2\varepsilon} | \sum_{a \leq n \leq b} e(hg(n))|,$$

se concluye que:

$$S \ll N^{1/2} \sum_{h=1}^{\infty} h^{-3/2}\varepsilon^{-1}|sen(\pi\varepsilon h)|. \blacksquare$$

**Lema 3.5.**

$$S \ll N^{1/2}\varepsilon^{-1/2}.$$

**Demostración**

Por el lema anterior,

$$\begin{aligned} S &\ll N^{1/2} \sum_{h=1}^{\infty} h^{-3/2}\varepsilon^{-1}|sen(\pi\varepsilon h)| \\ &= N^{1/2} \sum_{1 \leq h \leq \varepsilon^{-1}} h^{-3/2}\varepsilon^{-1}|sen(\pi\varepsilon h)| + N^{1/2} \sum_{h > \varepsilon^{-1}} h^{-3/2}\varepsilon^{-1}|sen(\pi\varepsilon h)|. \end{aligned}$$

Analicemos cada parte por separado:

1) Si $h > \varepsilon^{-1}$ entonces $|sen(\pi\varepsilon h))| = O(1)$, por tanto:

$$\sum_{h > \varepsilon^{-1}} h^{-3/2}\varepsilon^{-1}|sen(\pi\varepsilon h)| \ll \sum_{h > \varepsilon^{-1}} h^{-3/2}\varepsilon^{-1}.$$

Observemos que la serie

$$\sum_{h>\varepsilon^{-1}} h^{-3/2}\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1}\sum_{h>\varepsilon^{-1}} \frac{1}{h^{3/2}}.$$

es convergente, ya que $3/2 > 1$.

Por tanto, utilicemos la siguiente aproximación de sumas por integrales:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \leq f(a) + \int_a^{\infty} f(t)dt,\ f \text{ decreciente },$$

con $f(n) = n^{-3/2}$:

$$\sum_{h>\varepsilon^{-1}} h^{-3/2}\varepsilon^{-1}|sen(\pi\varepsilon h)| \ll \varepsilon^{-1}\int_{\varepsilon^{-1}}^{\infty} \frac{dh}{h^{3/2}} + \varepsilon^{1/2} \ll \varepsilon^{-1/2},$$

donde se ha usado que $0 < \varepsilon < 1$.

Con lo cual queda que

$$N^{1/2}\sum_{h>\varepsilon^{-1}} h^{-3/2}\varepsilon^{-1}|sen(\pi\varepsilon h)| \ll N^{1/2}\varepsilon^{-1/2}.$$

2) Si $h \leq \varepsilon^{-1}$ entonces $(\pi\varepsilon h)^{-1}|sen(\pi\varepsilon h)| = O(1)$:

$$\sum_{1\leq h\leq\varepsilon^{-1}} h^{-3/2}\varepsilon^{-1}|sen(\pi\varepsilon h)| \ll \sum_{1\leq h\leq\varepsilon^{-1}} h^{-3/2}h\pi \ll \sum_{1\leq h\leq\varepsilon^{-1}} h^{-1/2}$$

Procediendo como antes:

$$N^{1/2}\sum_{1\leq h\leq\varepsilon^{-1}} h^{-3/2}\varepsilon^{-1}|sen(\pi\varepsilon h)| \ll N^{1/2}\left(\int_1^{\varepsilon^{-1}} h^{-1/2}dh + 1\right) \ll$$
$$\ll N^{1/2}\varepsilon^{-1/2}.$$

Lo cual completa la demostración.■

**Teorema 3.1.** *(del exponente 2/3).*

*Sea $f \in C^2([a,b])$ con $f(a) = f(b) = 0, b-a = O(N)$, y $N^{-1} \ll |f''| \ll N^{-1}$. El número de puntos $\mathcal{P}$ de $\mathbb{Z}^2$ en la región limitada por la gráfica de $f$ y el eje $X$, verifica:*

$$\mathcal{P} = \frac{b-a}{2} + \int_a^b |f(t)|dt + E, \text{ con } E = O(N^{2/3}).$$

**Demostración**

Sabemos que $E \ll S + \varepsilon N + 1$, y que $S \ll N^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$. Tomando $\varepsilon = N^{-1/3}$, se obtiene el resultado. ■

Supongamos un círculo de radio $R$, y dividamóslo en cinco trozos: el cuadrado inscrito en el mismo de lado $R\sqrt{2}$, y los cuatro segmentos circulares que determina. El número de puntos de coordenadas enteras en el círculo de radio $R$, se va a obtener como la suma del numero de puntos de coordenadas enteras que caen en cada uno de estos 5 trozos en los cuales hemos dividido el círculo.

**Lema 3.6.** *El término de error en el problema del círculo es $O(R^{2/3})$.*

**Demostración**

Sea $N_R$, el número de puntos de coordenadas enteras en el círculo de radio $R$, y $A_R$ su área. - Supongamos que $\frac{R}{\sqrt{2}} = N \in \mathbb{Z}$:

Sea $N_c$, el número de puntos de coordenadas enteras en el cuadrado de lado $\frac{2R}{\sqrt{2}} + 1$ inscrito en el círculo de radio $R$. En este caso, $N_c = (2N+1)^2$.

Sea $N_s$, el número de puntos de coordenadas enteras en cada uno de los segmentos circulares, sin contar los $2N+1$ puntos que caen sobre la base del segmento circular, y sea $S_1$, el área de cada segmento circular. Para obtener el número de puntos de coordenadas enteras en cada segmento circular, utilizamos el Teorema del exponente 2/3. Por tanto

$$N_s = \frac{\frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{-R}{\sqrt{2}}}{2} + S_1 + O(N^{2/3}) - (2N+1) = S_1 - N - 1 + O(N^{2/3}).$$

Luego

$$\begin{aligned} N_R &= 4N_s + N_c = 4(S_1 - N - 1 + O(N^{2/3})) + (2N+1)^2 = 4S_1 - 3 + 4N^2 + O(N^{2/3}) \\ &= 4S_1 + 4N^2 - 3 + O(N^{2/3}) = A_R + O(N^{2/3}) - 3 = A_R + O(N^{2/3}), \end{aligned}$$

para $N$ grande. Además, como $O(N^{2/3}) = O(R^{2/3})$, se tiene que

$$N_R = A_R + O(R^{2/3}),$$

donde $A_R$ es el área del círculo de radio $R$.

- Si $\frac{R}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Z}$:

Sea $N \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{R}{\sqrt{2}} < N < \frac{R}{\sqrt{2}} + 1,$$

entonces podemos aplicar el mismo argumento que hemos aplicado anteriormente.■

## 3.2. Problema del círculo y problemas del divisor

En Córdoba y Cilleruelo [2], se hace un estudio del número de representaciones de un número $n$ como suma de dos cuadrados, de tal forma que cada representación puede ser entendida como un punto de coordenadas enteras sobre la circunferencia, es decir, desde un punto de vista geométrico.

Recordemos la función de Teoría de Números, $\chi(d)$, y que todo número entero $n$ puede descomponerse de la siguiente manera:

$$n = 2^{\gamma} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} ... q_s^{\beta_s}$$

donde los $p_i$ son de la forma $4k+1$, y los $q_i$ de la forma $4k+3$. Además, el número de representaciones de $n$ como suma de dos cuadrados es:

$$r(n) = 4(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_r) \qquad [1]$$

cuando todos los $\beta_i$ son pares. Si algún $\beta_i$ es impar, entonces $r(n) = 0$. Utilizando además, el lema de Abel, series alternantes y expresar las sumas infinitas en función de integrales finitas, obtendremos una nueva fórmula en función de sumatorios de $\psi$ para el término de error que nos será de gran utilidad en la siguiente sección.

**Lema 3.7.**

$$r(n) = 4\textstyle\sum_{d|n} \chi(d), \ \textit{donde} \ \chi(d) = \begin{cases} 1, & \textit{si } d \equiv 1(4) \\ -1, & \textit{si } d \equiv 3(4) \\ 0, & \textit{en otro caso} \end{cases} \qquad [2]$$

**Demostración:**

Como $r(n)$, y $4\sum_{d|n}\chi(d)$ son funciones multiplicativas, basta comprobar que $r(n)$, y $4\sum_{d|n}\chi(d)$, coindiden en las potencias de números primos. (Para calcular $r(n)$ en cada uno de los siguientes casos, se utiliza la fórmula [1]).

- Para $n = 2^{\gamma}$:

$$r(n) = r(2^{\gamma}) = 4$$

$$4\sum_{d|2^\gamma}\chi(d)=4(\chi(1)+\chi(2)+\chi(4)+...+\chi(2^\gamma))=4(1+0+0+...+0)=4$$

ya que si $d$ es par $\chi(d)=0$, utilizando la expresión dada por [2].

- Para $n=p^\alpha$, donde $p=4k+1$:

$$r(p^\alpha)=4(1+\alpha)$$

$$4\sum_{d|p^\alpha}\chi(d)=4(\chi(1)+\chi(p)+\chi(p^2)+...+\chi(p^\alpha))=4(1+1+1+...+1)=4(\alpha+1)$$

- Para $n=q^\beta$, donde $q=4k+3$:

$$r(q^\beta)=\begin{cases}4, & \text{si } \beta \text{ par}\\ 0, & \text{si } \beta \text{ impar}\end{cases}$$

$$4\sum_{d|q^\beta}\chi(d)=4(\chi(1)+\chi(q)+\chi(q^2)+...+\chi(q^\alpha))=4(1+(-1)+1+...)=\begin{cases}4, & \text{si } \beta \text{ par}\\ 0, & \text{si } \beta \text{ impar}\end{cases}$$

lo cual termina la prueba. ■

Como consecuencia de este lema $r(n)$ puede expresarse también en función de los divisores de $n$ de la siguiente manera:

$$r(n)=4\sum_{d|n}\chi(d)=4(d_1(n)-d_3(n)),$$

donde $d_1(n)$ es el número de divisores de $n$ de la forma $4k+1$, tal que $k\in\mathbb{N}$, y $d_3(n)$ es el número de divisores de $n$ de la forma $4k+3$, $k\in\mathbb{N}$.

Por otro lado, si $d$ es un divisor de $n$ entonces $d\cdot m=n$, tal que $m\in\mathbb{N}$, así pues $(d,m)$ es un punto de la hipérbola $xy=n$. Por tanto, el número de divisores de $n$ coincide con el número de puntos de coordenadas enteras en la hipérbola $xy=n$, en el primer cuadrante.

**Lema 3.8.**

*Sea $\mathcal{N}(R)$ el número de puntos de coordenadas enteras en el círculo centrado de radio $R$, entonces:*

$\mathcal{N}(R) = 4(S_1 + S_2 - S_3)$, *donde*

$$S_1 = \sum_{d \leq R} \sum_{m \leq \frac{R^2}{d}} \chi(d), \quad S_2 = \sum_{m \leq R} \sum_{d \leq \frac{R^2}{m}} \chi(d), \quad S_3 = \sum_{m \leq R} \sum_{d \leq R} \chi(d).$$

**Demostración:**

Como $\mathcal{N}(R)$ es el número de puntos de coordenadas enteras en el círculo de radio $R$, entonces:

$$\mathcal{N}(R) = \sum_{n \leq R^2} r(n).$$

Utilizando el lema anterior:

$$\mathcal{N}(R) = \sum_{n \leq R^2} 4 \sum_{d|n} \chi(d) = 4 \sum_{n \leq R^2} \sum_{d|n} \chi(d).$$

Si $d|n$ entonces $n = md$ tal que $m \in \mathbb{Z}$, así que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(R) = 4 \sum_{md \leq R^2} \chi(d) &= 4 \sum_{d \leq R^2} \sum_{m \leq \frac{R^2}{d}} \chi(d) \\
&= 4 \sum_{d \leq R} \sum_{m \leq \frac{R^2}{d}} \chi(d) + 4 \sum_{R < d \leq R^2} \sum_{m \leq \frac{R^2}{d}} \chi(d) \\
&= 4 \sum_{d \leq R} \sum_{m \leq \frac{R^2}{d}} \chi(d) + 4 \sum_{md \leq R^2, R < d \leq R^2} \chi(d)
\end{aligned}$$

Observemos, que si $md \leq R^2$ entonces es inmediato que $d < R^2$, con lo cual:

$$md \leq R^2, R < d \leq R^2 \Leftrightarrow md \leq R^2, R < d \Leftrightarrow d \leq \frac{R^2}{m}, R < d$$
$$\Leftrightarrow R < d \leq \frac{R^2}{m}, m \leq R^2.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(R) &= 4\sum_{d\leq R}\sum_{m\leq \frac{R^2}{d}}\chi(d) + 4\sum_{m\leq R^2}\sum_{R<d\leq \frac{R^2}{m}}\chi(d)\\ &= 4\sum_{d\leq R}\sum_{m\leq \frac{R^2}{d}}\chi(d) + 4\sum_{m\leq R}\sum_{R<d\leq \frac{R^2}{m}}\chi(d).\end{aligned}$$

Como:

$$4\sum_{m\leq R}\sum_{R<d\leq \frac{R^2}{m}}\chi(d) = 4\sum_{m\leq R}\sum_{d\leq \frac{R^2}{m}}\chi(d) - 4\sum_{m\leq R}\sum_{d\leq R}\chi(d)$$

se tiene el resultado buscado.■

**Lema 3.9.**

*Sea $S(x) = \sum_{d\leq x}\chi(d)$. Entonces:*

$$S_1 = R^2\sum_{d\leq R}\frac{\chi(d)}{d} - \frac{1}{2}S(R) - \sum_{d\leq R}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right), \quad S_2 = \sum_{m\leq R} S\left(\frac{R^2}{m}\right), \quad S_3 = [R]S(R),$$

*donde $S_1$, $S_2$, y $S_3$ están definidos en el lema anterior.*

**Demostración:**

$$S_3 = \sum_{m\leq R}\sum_{d\leq R}\chi(d) = \sum_{m\leq R} S(R) = S(R)\sum_{m\leq R} 1 = S(R)[R]$$

ya que $R$ puede no ser entero.

$$S_1 = \sum_{d\leq R}\sum_{m\leq \frac{R^2}{d}}\chi(d) = \sum_{d\leq R}\chi(d)[\frac{R^2}{d}], S_2 = \sum_{m\leq R}\sum_{d\leq \frac{R^2}{m}}\chi(d) = \sum_{m\leq R} S\left(\frac{R^2}{m}\right).$$

Recordemos la función $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{d \le R} \chi(d) \left( \left[ \frac{R^2}{d} \right] - \frac{R^2}{d} + \frac{1}{2} + \frac{R^2}{d} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{d \le R} \chi(d) \left( -\psi \left( \frac{R^2}{d} \right) \right) + \sum_{d \le R} \chi(d) \left( \frac{R^2}{d} - \frac{1}{2} \right) \\ &= R^2 \sum_{d \le R} \frac{\chi(d)}{d} - \frac{1}{2} S(R) - \sum_{d \le R} \chi(d) \psi \left( \frac{R^2}{d} \right). \end{aligned}$$

**Lema 3.10.**

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} = \frac{\pi}{4}.$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} &= \frac{\chi(1)}{1} + \frac{\chi(2)}{2} + \frac{\chi(3)}{3} + \frac{\chi(4)}{4} + \frac{\chi(5)}{5} + \frac{\chi(6)}{6} + \frac{\chi(7)}{7} + \frac{\chi(8)}{8} + \frac{\chi(9)}{9} + ... \\ &= 1 + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{7} + 0 + \frac{1}{9} + ... = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... \end{aligned}$$

Observación:

Todos los números enteros, son de la forma: $4k, 4k+1, 4k+2,$ ó $4k+3$. Sabemos que si $n$ es par entonces $\chi(n) = 0$, luego $\chi(4k) = \chi(4k+2) = 0$. También sabemos que $\chi(4k+1) = 1$, y $\chi(4k+3) = -1$, por definición de $\chi(d)$.

Por otro lado:

$$\int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^7 - x^8 + ...)dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ...$$

Luego:

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^7 - x^8 + ...)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx,$$

ya que $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$ es una progresión geométrica de razón: $-x^2$.

Como:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4},$$

se tiene que:

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} = \frac{\pi}{4}.\blacksquare$$

**Lema 3.11.**

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} = \int_1^{\infty} \frac{S(t)}{t^2}dt, \qquad y \qquad \sum_{d\leq R} \frac{\chi(d)}{d} = \frac{S(R)}{R} + \int_1^{R} \frac{S(t)}{t^2}dt.$$

**Demostración:**

Sea $S(R) = \sum_{R\leq R}\chi(d)$ , y $\varphi(R) = \frac{1}{R} \Rightarrow \varphi'(R) = \frac{-1}{R^2}$. Aplicando el Lema de Abel:

$$\sum_{d\leq R} \frac{\chi(d)}{d} = \left(\sum_{d\leq R}\chi(d)\right)\frac{1}{R} - \int_1^{R}\left(\frac{-1}{t^2}\right)\left(\sum_{d\leq t} S(d)\right)dt = \frac{S(R)}{R} + \int_1^{R} \frac{S(t)}{t^2}dt.$$

Por tanto:

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(d)}{d} = \lim_{R\to\infty} \sum_{d=1}^{R} \frac{\chi(d)}{d} = \lim_{R\to\infty} \sum_{d\leq R} \frac{\chi(d)}{d} = \lim_{R\to\infty} \frac{S(R)}{R} + \int_1^{\infty} \frac{S(t)}{t^2}dt.$$

Además, como:

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{d\leq x}\chi(d)\\
&= \chi(1)+\chi(2)+\chi(3)+\chi(4)+...+\chi(4k)+\chi(4k+1)+\chi(4k+2)+\chi(4k+3)+...\\
&= 1+0+(-1)+0+...+0+1+0+(-1)+...\\
&= \begin{cases} 0, \text{ si } x=4k\\ 1, \text{ si } x=4k+1\\ 1, \text{ si } x=4k+2\\ 0, \text{ si } x=4k+3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Luego $S(x)$ es un número finito, por tanto: $\text{lím}_{R\to\infty}\frac{S(R)}{R}=0$, y con esto:

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\chi(d)}{d}=\int_1^{\infty}\frac{S(t)}{t^2}dt.$$

**Lema 3.12.**

$$\sum_{d\leq R}\frac{\chi(d)}{d}=\frac{\pi}{4}+\frac{S(R)}{R}-\int_R^{\infty}\frac{S(t)}{t^2}dt.$$

**Demostración:**

Observemos que:

$$\int_1^{R}\frac{S(t)}{t^2}dt=\int_1^{\infty}\frac{S(t)}{t^2}dt-\int_R^{\infty}\frac{S(t)}{t^2}dt.$$

Por el lema anterior:

$$\sum_{d\leq R}\frac{\chi(d)}{d}=\frac{S(R)}{R}+\int_1^{\infty}\frac{S(t)}{t^2}dt-\int_R^{\infty}\frac{S(t)}{t^2}dt.$$

Como:

$$\int_1^{\infty}\frac{S(t)}{t^2}dt=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\chi(d)}{d}=\frac{\pi}{4},$$

se obtiene el resultado deseado. ■

**Lema 3.13.**

$$\int_R^\infty \frac{S(t)}{t^2}dt = \frac{1}{2R} + \int_R^\infty \left(\frac{S(t)}{t^2} - \frac{1}{2t^2}\right) dt \ , \ donde \ \int_R^\infty \left(\frac{S(t)}{t^2} - \frac{1}{2t^2}\right) dt = O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

**Demostración:**

$$\int_R^\infty \frac{S(t)}{t^2}dt = \int_R^\infty \left(\frac{S(t)}{t^2} - \frac{1}{2t^2}\right) dt + \int_R^\infty \frac{1}{2t^2}dt = \frac{1}{2R} + \int_R^\infty \left(\frac{S(t)}{t^2} - \frac{1}{2t^2}\right) dt$$

Sea $R$ cualquier número positivo, denotemos por $M$ el entero más próximo a $R$ de la forma $M = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $R \leq M$, entonces:

$$\int_R^\infty \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt = \int_R^M \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt + \int_M^{M+2} \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt + \int_{M+2}^{M+4} \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt + ...$$

Observemos que $M \leq R+4$, por definición de $M$. Luego:

$$\int_R^M \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt \leq \int_R^{R+4} \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt.$$

Por definición de $S(t)$, se tiene que $S(t) - \frac{1}{2} \leq 1$, así que:

$$\int_R^M \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt \leq \int_R^{R+4} \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt = O(R^{-2}).$$

Por tanto se llega a que:

$$\int_R^\infty \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt = O(R^{-2}) + \int_M^{M+2} \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt + \int_{M+2}^{M+4} \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt + ...$$

Consideremos la serie $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ donde:

$$a_n = (-1)^n \int_{M+2n}^{M+2(n+1)} \frac{S(t)-\frac{1}{2}}{t^2}dt,$$

con $a_n \geq 0$ y $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n$ por definición de la función $S$. De esta forma:

$$f(M) = \int_{M}^{M+2} \frac{S(t) - \frac{1}{2}}{t^2} dt + \int_{M+2}^{M+4} \frac{S(t) - \frac{1}{2}}{t^2} dt + ... = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ...,$$

es una serie alternante de términos decrecientes, por tanto es menor que el primer término, es decir:

$$f(M) \leq \int_{M}^{M+2} \frac{S(t) - \frac{1}{2}}{t^2} dt \leq \int_{M}^{M+2} \frac{1}{t^2} dt = O(M^{-2}),$$

con lo cual:

$$\int_{R}^{\infty} \frac{S(t) - \frac{1}{2}}{t^2} dt = O(R^{-2}) + O(M^{-2}) = O(R^{-2}),$$

porque $M$ ha sido tomada de tal forma que $R \leq M$.■

**Lema 3.14.**

$$S(t) = \frac{1}{2} - \psi\left(\frac{t}{4} - \frac{1}{4}\right) + \psi\left(\frac{t}{4} - \frac{3}{4}\right)$$

*para cualquier* $t \in \mathbb{R}$.

**Demostración:**

Sea

$$F(t) = \frac{1}{2} - \psi\left(\frac{t}{4} - \frac{1}{4}\right) + \psi\left(\frac{t}{4} - \frac{3}{4}\right) = \left[\frac{t}{4} - \frac{1}{4}\right] - \left[\frac{t}{4} - \frac{3}{4}\right],$$

utilizando la definición de la función $\psi$.

Es fácil ver que $F$ es periódica de periodo 4, porque $[x+1] = [x] + 1$, así que basta comprobar que $F(t) = S(t)$ en $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)$, y $[3,4)$.

Sea $0 \leq \varepsilon < 1$:

- Si $t = \varepsilon$, entonces $S(t) = 0$, y

$$F(t) = \left[\frac{\varepsilon - 1}{4}\right] - \left[\frac{\varepsilon - 3}{4}\right] = (-1) - (-1) = 0,$$

ya que:

$$\frac{-1}{4} \leq \frac{\varepsilon - 1}{4} < 0, \text{ y } \frac{-3}{4} \leq \frac{\varepsilon - 3}{4} < \frac{-1}{2}.$$

- Si $t = 1 + \varepsilon$, entonces $S(t) = 1$, y

$$F(t) = \left[\frac{\varepsilon}{4}\right] - \left[\frac{-2 + \varepsilon}{4}\right] = -(-1) = 1,$$

ya que:

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{-2 + \varepsilon}{4} < \frac{-1}{4}, \text{ y } 0 \leq \frac{\varepsilon}{4} < \frac{1}{4}.$$

- Si $t = 2 + \varepsilon$, entonces $S(t) = 1$, y

$$F(t) = \left[\frac{1 + \varepsilon}{4}\right] - \left[\frac{-1 + \varepsilon}{4}\right] = -(-1) = 1,$$

ya que:

$$\frac{-1}{4} \leq \frac{-1 + \varepsilon}{4} < 0, \text{ y } 0 \leq \frac{1 + \varepsilon}{4} < \frac{1}{2}.$$

- Si $t = 3 + \varepsilon$, entonces $S(t) = 0$, y

$$F(t) = \left[\frac{2 + \varepsilon}{4}\right] - \left[\frac{\varepsilon}{4}\right] = 0,$$

ya que:

$$0 \leq \frac{2 + \varepsilon}{4} < \frac{3}{4}, \text{ y } 0 \leq \frac{\varepsilon}{4} < \frac{1}{4}.$$

De esta forma se concluye el resultado. ■

**Teorema 3.2.**

*El error en el problema del círculo de radio $R$ es:*

$$E(R)=4\sum_{d\le \frac{R}{4}}\left(\psi\left(\frac{R^2}{4d+3}\right)-\psi\left(\frac{R^2}{4d+1}\right)\right)+4\sum_{d\le R}\left(\psi\left(\frac{R^2}{4d}-\frac{3}{4}\right)-\psi\left(\frac{R^2}{4d}-\frac{1}{4}\right)\right)+O(1).$$

**Demostración:**

$$E(R)=\mathcal{N}(R)-\pi R^2$$

Utilizando el Lema 3.8:

$$E(R)=4(S_1+S_2-S_3)-\pi R^2.$$

Por el Lema 3.9:

$$E(R)=4\left(R^2\sum_{d\le R}\frac{\chi(d)}{d}-\frac{1}{2}S(R)-\sum_{d\le R}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)\right)+4\sum_{m\le R}S\left(\frac{R^2}{m}\right)-4[R]S(R)-\pi R^2.$$

Utilizando el Lema 3.12:

$$\begin{aligned}E(R)=4&\left\{R^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{S(R)}{R}-\int_R^\infty\frac{S(t)}{t^2}dt\right)-\frac{1}{2}S(R)-\sum_{d\le R}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)\right\}\\&+4\sum_{m\le R}S\left(\frac{R^2}{m}\right)-4[R]S(R)-\pi R^2.\end{aligned}$$

Ahora, por el Lema 3.13:

$$\begin{aligned}E(R)=4&\left\{R^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{S(R)}{R}-\left(\frac{1}{2R}+\int_R^\infty\left(\frac{S(t)}{t^2}-\frac{1}{2t^2}\right)dt\right)\right)-\frac{1}{2}S(R)-\sum_{d\le R}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)\right\}\\&+4\sum_{m\le R}S\left(\frac{R^2}{m}\right)-4[R]S(R)-\pi R^2.\end{aligned}$$

Utilizando de nuevo el Lema 3.13:

$$E(R) = 4\left\{R^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{S(R)}{R}-\left(\frac{1}{2R}+O\left(\frac{1}{R^2}\right)\right)\right)-\frac{1}{2}S(R)-\sum_{d\leq R}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)\right\}$$
$$+4\sum_{m\leq R}S\left(\frac{R^2}{m}\right)-4[R]S(R)-\pi R^2,$$

y operando:

$$E(R) = 4RS(R)-2R+O(1)-2S(R)-4\sum_{d\leq R}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)+4\sum_{m\leq R}S\left(\frac{R^2}{m}\right)-4[R]S(R)$$

Utilizando el Lema 3.14:

$$E(R) = 4S(R)\psi(R)-2R+4\sum_{m\leq R}\left(\frac{1}{2}-\psi\left(\frac{R^2}{4m}-\frac{1}{4}\right)+\psi\left(\frac{R^2}{4m}-\frac{3}{4}\right)\right)$$
$$-4\sum_{d\leq R}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)+O(1),$$

y empleando que $S(R)=O(1)$:

$$E(R) = 4\sum_{d\leq R}\left(\psi\left(\frac{R^2}{4d}-\frac{3}{4}\right)-\psi\left(\frac{R^2}{4d}-\frac{1}{4}\right)\right)-4\sum_{d\leq R}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)+O(1)$$

Observemos que:

$$-\sum_{d\leq R}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right) = -\sum_{d\leq R, d=4k}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)-\sum_{d\leq R, d=4k+1}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)$$
$$-\sum_{d\leq R, d=4k+2}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)-\sum_{d\leq R, d=4k+3}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)$$

Teniendo en cuenta que $\chi(d)=0$ para $d$ par:

$$-\sum_{d\leq R}\chi(d)\psi\left(\frac{R^2}{d}\right) = -\sum_{d\leq R, d=4k+1}\psi\left(\frac{R^2}{d}\right)+\sum_{d\leq R, d=4k+3}\psi\left(\frac{R^2}{d}\right),$$

lo cual permite concluir la prueba.■

## 3.3. El método de van der Corput

La estimación del error en el problema del círculo lleva a expresiones en las cuales aparecen sumas trigonométricas. Utilizando la teoría de pares de exponentes de van der Corput, que fue escrita en su forma actual por E. Phillips [8], vamos a obtener algunas estimaciones cuando las fases cumplen ciertas propiedades que posteriormente veremos.

En esta sección se definirán los pares de exponentes de van der Corput como una herramienta que nos va a permitir mejorar en el problema del círculo, el exponente 2/3 que habíamos obtenido para acotar el término de error. Para ello utilizaremos la función $\tilde{\psi}$ y su desarrollo de Fourier, para conseguir acotar la siguiente suma

$$\sum_{n \asymp N} \psi(f(n)).$$

Con esta cota conocida, simplificaremos la expresión obtenida para el término de error al final de la sección anterior, la cual quedará reducida a que el término de error $E(R) \ll R^{(\alpha+\beta)/(\alpha+1)}$, donde $(\alpha, \beta)$ es un par de exponentes definido de la siguiente manera:

**Definición**

Sea $S = \sum_{n \asymp N} e(f(n))$ una suma trigonométrica donde $n \asymp N$ significa que $N \ll n \ll N$. Se dice que $(\alpha, \beta)$ es un par de exponentes si

$$\sum_{n \asymp N} e(f(n)) \ll D^{\alpha} N^{\beta}$$

para toda $f$ satisfaciendo:

$$|f^{(k)}| \asymp DN^{1-k}, k = 1, 2, 3, ..., D \gg 1.$$

Observemos que de esta última expresión se sigue que las derivadas de $f$ no se anulan, además, la acotación trivial corresponde a $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. También se deduce que $D$ es el tamaño de la primera derivada.

El método de van der Corput establece las fórmulas:

$$A(\alpha,\beta) = \left(\frac{\alpha}{2\alpha+2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2\alpha+2}\right) \text{ y } B(\alpha,\beta) = \left(\beta - \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}\right),$$

que permiten obtener inductivamente los pares de exponentes.

Se pueden obtener pares de exponentes aplicando $A$ y $B$ sucesivas veces al par trivial $(0,1)$.

**Lema 3.15.**

$$A^n B(0,1) = \left(\frac{1}{2^{n+2}-2}, 1 - \frac{n+1}{2^{n+2}-2}\right)$$

**Demostración**

Por inducción en $n$:

- Para $n = 0$:

$$A^0 B(0,1) = B(0,1) = \left(1 - \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Por otro lado:

$$\left(\frac{1}{2^{0+2}-2}, 1 - \frac{0+1}{2^{0+2}-2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Luego la fórmula se cumple para $n = 0$.

Supuesto que se cumple para $n$, es decir:

$$A^n B(0,1) = \left(\frac{1}{2^{n+2}-2}, 1 - \frac{n+1}{2^{n+2}-2}\right)$$

vamos a ver que se cumple para $n+1$:

$$A^{n+1}B(0,1) = AA^nB(0,1) = A\left(\frac{1}{2^{n+2}-2}, 1 - \frac{n+1}{2^{n+2}-2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n+3}-2}, 1 - \frac{(n+1)+1}{2^{n+3}-2}\right). \blacksquare$$

**Lema 3.16.** *Para todos los pares de exponentes obtenidos a partir de* $(0,1)$ *se cumple* $\beta \geq \frac{1}{2}$.

**Demostración**

Si el par de exponentes es de la forma:

$$B(\alpha_0, \beta_0) = (\beta_0 - \frac{1}{2}, \alpha_0 + \frac{1}{2})$$

donde $(\alpha_0, \beta_0)$ es otro par de exponentes obtenido a partir de $(0, 1)$ aplicando $A$ o $B$, entonces

$$\beta = \alpha_0 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2},$$

ya que si $(\alpha_0, \beta_0)$ es un par de exponentes entonces $\alpha_0, \beta_0 \geq 0$.

Si el par de exponentes es de la forma:

$$A(\alpha_0, \beta_0) = \left( \frac{\alpha_0}{2\alpha_0 + 2}, \frac{\alpha_0 + \beta_0 + 1}{2\alpha_0 + 2} \right)$$

entonces

$$\beta = \frac{\alpha_0 + \beta_0 + 1}{2\alpha_0 + 2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(\alpha_0 + \beta_0 + 1) \geq 2\alpha_0 + 2 \Leftrightarrow 2\beta_0 \geq 0 \Leftrightarrow \beta_0 \geq 0.$$

Por tanto, se concluye el resultado. ■

**Lema 3.17.** *Sea $\tilde{\psi}$, la función $\psi$ regularizada (definida en la sección 1.1 de la Introducción). Si $\#(I \cap \mathbb{N}) = N$, entonces:*

$$\left| \sum_{n \in I} \psi(f(n)) \right| \leq \left| \sum_{n \in I} \tilde{\psi}(g(n)) \right| + \varepsilon N.$$

**Demostración**

Por ser $\tilde{\psi}$ la función $\psi$ regularizada, vimos que se verificaba:

$$\tilde{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \psi(x) \leq \tilde{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando $x = f(n)$, la suma en los $n \in I$, y utilizando la hipótesis de que $\#(I \cap \mathbb{N}) = N$, se tiene que:

$$\sum_{n\in I}\tilde{\psi}\left(f(n)+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{2}N\leq\sum_{n\in I}\psi(f(n))\leq\sum_{n\in I}\tilde{\psi}\left(f(n)-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{2}N.$$

Ahora, se distinguen los casos $\sum_{n\in I}\psi(f(n))\geq 0$ y $\sum_{n\in I}\psi(f(n))\leq 0$, y se procede igual que en la demostración del lema 3.3. ■

**Lema 3.18.** *Si $f$ está en las hipótesis de la teoría de pares de exponentes, con $|f'|\asymp D$, entonces:*

$$\sum_{n\asymp N}\psi(f(n))\ll\varepsilon^{-1}D^{\alpha}N^{\beta}\sum_{h=1}^{\infty}|sen(\pi\varepsilon h)|h^{\alpha-2}+\varepsilon N.$$

**Demostración**

Del lema anterior tenemos que:

$$\left|\sum_{n\in I}\psi(f(n))\right|\leq\left|\sum_{n\in I}\tilde{\psi}(g(n))\right|+\varepsilon N,$$

lo cual implica que

$$|\sum_{n\asymp N}\psi(f(n))|\leq\left|\sum_{n\asymp N}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{sen(\pi\varepsilon h)}{\pi^2h^2\varepsilon}sen\left(2\pi h\left(f(n)\pm\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right|+\varepsilon N$$

Por tanto:

$$\sum_{n\asymp N}\psi(f(n))\ll\sum_{h=1}^{\infty}\frac{|sen(\pi\varepsilon h)|}{\pi^2h^2\varepsilon}\sum_{n\asymp N}\left|sen\left(2\pi h\left(f(n)\pm\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right|+\varepsilon N.$$

Como

$$\sum_{n\asymp N}\left|sen\left(2\pi h\left(f(n)\pm\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right|\leq|\sum_{n\asymp N}\left|e\left(h\left(f(n)\pm\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right|\ll(Dh)^{\alpha}N^{\beta}.$$

Sustituyendo se termina la prueba. ■

**Lema 3.19.**

$$\sum_{n\asymp N}\psi(f(n))\ll D^{\alpha}\varepsilon^{-\alpha}N^{\beta}+\varepsilon N.$$

**Demostración**

Por el lema anterior,

$$\sum_{n \asymp N} \psi(f(n)) \ll \varepsilon^{-1} D^{\alpha} N^{\beta} \sum_{h=1}^{\infty} |sen(\pi\varepsilon h)| h^{\alpha-2} + \varepsilon N.$$

Para concluir el resultado basta con probar que:

$$\varepsilon^{-1} \sum_{h=1}^{\infty} |sen(\pi\varepsilon h)| h^{\alpha-2} \ll \varepsilon^{-\alpha},$$

Dividamos esta suma en dos partes: la suma en los $h > \varepsilon^{-1}$, y en los $1 \leq h \leq \varepsilon^{-1}$,

$$\varepsilon^{-1} \sum_{h=1}^{\infty} |sen(\pi\varepsilon h)| h^{\alpha-2} = \varepsilon^{-1} \sum_{h=1}^{\varepsilon^{-1}} |sen(\pi\varepsilon h)| h^{\alpha-2} + \varepsilon^{-1} \sum_{\varepsilon^{-1}}^{\infty} |sen(\pi\varepsilon h)| h^{\alpha-2},$$

y a continuación, seguir los pasos de la demostración del lema 3.5 sustituyendo:

$$N^{1/2} \sum_{h=1}^{\infty} h^{-3/2} \varepsilon^{-1} |sen(\pi\varepsilon h)|$$

(del lema 3.5) por:

$$\sum_{h=1}^{\infty} h^{\alpha-2} \varepsilon^{-1} |sen(\pi\varepsilon h)|,$$

de esta forma se concluye el resultado enunciado en el lema.

Puede observarse que $\alpha \leq 1$, ya que en otro caso el resultado es trivial.$\blacksquare$

**Lema 3.20.**

$$\sum_{n \asymp N} \psi(f(n)) \ll D^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} N^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}},$$

*para todo par de exponentes* $(\alpha, \beta)$.

**Demostración**

Por el lema anterior,

$$\sum_{n \asymp N} \psi(f(n)) \ll D^{\alpha} \varepsilon^{-\alpha} N^{\beta} + \varepsilon N.$$

Tomemos el $\varepsilon$ que minimiza el segundo término de la expresión anterior. Para ello escojamos el $\varepsilon$ que se obtiene de la siguiente igualdad:

$$D^{\alpha} \varepsilon^{-\alpha} N^{\beta} = \varepsilon N,$$

es decir,

$$\varepsilon = N^{\frac{\beta-1}{\alpha+1}} D^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

Por la forma en que ha sido elegido $\varepsilon$:

$$\sum_{n \asymp N} \psi(f(n)) \ll \varepsilon N = N^{\frac{\beta-1}{\alpha+1}} D^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} N = N^{\frac{\beta-1}{\alpha+1}} D^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} N^{\frac{\alpha+1}{\alpha+1}} = D^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} N^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}}.$$

Con lo cual:

$$\sum_{n \asymp N} \psi(f(n)) \ll D^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} N^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}},$$

para todo par de exponentes $(\alpha, \beta)$.■

**Lema 3.21.** *Sea $E(R)$, el error en el problema del círculo de radio $R$. Si $(\alpha, \beta)$ es un par de exponentes, entonces el error $E(R)$ verifica:*

$$E(R) \ll R^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}}.$$

**Demostración**

Utilizando la fórmula que teníamos para $E(R)$:

$$E(R) = 4 \sum_{d \leq \frac{R}{4}} \left( \psi\left(\frac{R^2}{4d+3}\right) - \psi\left(\frac{R^2}{4d+1}\right) \right) + 4 \sum_{d \leq R} \left( \psi\left(\frac{R^2}{4d} - \frac{3}{4}\right) - \psi\left(\frac{R^2}{4d} - \frac{1}{4}\right) \right) + O(1),$$

y el resultado obtenido en el lema anterior:

$$\sum_{d \asymp N} \psi(f(d)) \ll D^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} N^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}},$$

Observemos que si $d \asymp R$ entonces $|f'(d)| \asymp 1$, y además, que la teoría de pares de exponentes se aplica a sumas del tipo $d \asymp N$, sin embargo en la expresión que tenemos para $E(R)$ en las sumas aparecen $d \leq \frac{R}{4}$ y $d \leq R$. Luego, podemos descomponer $d \leq R$ en los siguientes subintervalos:

$$1 \leq d \leq 2; \quad 2 \leq d \leq 4; \quad ...; \quad \frac{R}{2} \leq d \leq R,$$

y $d \leq \frac{R}{4}$ en:

$$1 \leq d \leq 2; \quad 2 \leq d \leq 4; \quad ...; \quad \frac{R}{8} \leq d \leq \frac{R}{4},$$

y en cada uno de ellos aplicar la teoría de pares de exponentes.

Se puede comprobar que el último intervalo, que es el de mayor longitud, aporta mayor contribución, luego se hará el cálculo sólo para éste, ya que para el resto es completamente análogo:

$$4\sum_{d \asymp R} \psi\left(\frac{R^2}{4d+3}\right) - 4\sum_{d \asymp R} \psi\left(\frac{R^2}{4d+1}\right) + 4\sum_{d \asymp R} \psi\left(\frac{R^2}{4d} - \frac{3}{4}\right) - 4\sum_{d \asymp R} \psi\left(\frac{R^2}{4d} - \frac{1}{4}\right) + O(1) = R^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}},$$

aplicando el lema anterior con $D \asymp 1$ y, $N = R$, se sigue el resultado.$\blacksquare$

Se pueden encontrar infinitas mejoras del exponente $\frac{2}{3}$. Tomemos, por ejemplo el par de exponentes:

$$BA^3B(0,1) = (\alpha, \beta) = \left(\frac{11}{30}, \frac{8}{15}\right),$$

entonces $E(R) \ll R^{\frac{27}{41}}$.

Si tomamos el par de exponentes:

$$BA^3BA^2B(0,1) = (\alpha, \beta) = \left(\frac{11}{28}, \frac{11}{21}\right),$$

se tiene que $E(R) \ll R^{\frac{77}{117}}$.

**Lema 3.22.** $(0, \beta)$*, no es un par de exponentes para* $\beta < \frac{1}{2}$.

**Demostración**

Si $(0, \beta)$ fuese un par de exponentes con $\beta < \frac{1}{2}$ se tendría que: $E(R) \ll R^{\beta}$, para $\beta < \frac{1}{2}$. Luego

$$\lim_{R\to\infty} \frac{|E(R)|}{R^{\frac{1}{2}}} \leq \lim_{R\to\infty} \frac{cR^{\beta}}{R^{\frac{1}{2}}} = \lim_{R\to\infty} c\frac{1}{R^{\frac{1}{2}-\beta}}, = 0$$

donde $c$ es una constante.

Así que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{|E(R)|}{R^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

lo cual es equivalente a decir: $E(R) = o(R^{\frac{1}{2}})$, lo cual es una contradicción ya que en el capítulo 5 veremos que $E(R) \neq o(R^{\frac{1}{2}})$.$\blacksquare$

**Observación:**

$(0, \frac{1}{2})$ no es un par de exponentes sin embargo se conjetura que para todo $\delta > 0$, $(\delta, \frac{1}{2} + \delta)$ sí lo es (al menos en casos especiales).

**Lema 3.23.** *Si se cumple la conjetura anterior, entonces* $E(R) = O(R^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$*, para todo* $\varepsilon > 0$.

**Demostración**

Si $(\delta, \frac{1}{2} + \delta)$ es un par de exponentes para todo $\delta > 0$ entonces

$$E(R) \ll R^{\frac{\delta+(\frac{1}{2}+\delta)}{\delta+1}} = R^{\frac{2\delta+\frac{1}{2}}{\delta+1}}.$$

Observemos ahora:

$$\frac{2\delta+\frac{1}{2}}{\delta+1}=\frac{1}{2}+\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon=\frac{2\delta+\frac{1}{2}}{\delta+1}-\frac{1}{2}=\frac{4\delta+1-\delta-1}{2(\delta+1)}=\frac{3\delta}{2(\delta+1)}.$$

Luego

$$E(R)=O(R^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),\ \text{para todo } \varepsilon>0.\blacksquare$$

# 4. Promedio sobre los centros:

D. G. Kendall [7], estudió el promedio sobre los centros. Para ello consideró $\mathcal{N}(R)$ como una variable aleatoria, y probó que la esperanza de $\mathcal{N}(R)$ es $\pi R^2$, y su desviación típica $\sigma = O(R^{1/2})$ pero $\sigma = \Omega(R^{1/2})$, es decir, $\sigma \neq o(R^{1/2})$, cuando $R$ es suficientemente grande.

Además, Hardy y Landau probaron que la relación $E(R) = O(R^{1/2})$ es falsa.

Supongamos que tiramos al azar un círculo de radio $R$ en $\mathbb{Z}^2$, vamos a tratar de comprobar que la diferencia entre el número de puntos de coordenadas enteras que quedan dentro del mismo y su área, normalmente no es de orden mayor que $R^{\frac{1}{2}}$.

Por la periodicidad del retículo de puntos de coordenadas enteras, sólo consideraremos círculos cuyo centro caiga dentro del cuadrado: $[0,1] \times [0,1]$, ya que el número de puntos de coordenadas enteras dentro del círculo de radio $R$ y centro $(\alpha, \beta)$ tales que $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, coincide con el número de coordenadas enteras del círculo de radio $R$ y centro $(\alpha + n, \beta + m)$ con $m, n \in \mathbb{Z}$.

**Lema 4.1.** *Sea $(\alpha, \beta) \in [0,1] \times [0,1]$ y, $\chi_R$ la función característica de $B_R(\vec{0})$. La serie*

$$N_R(\alpha, \beta) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} \chi_R(j - \alpha, k - \beta)$$

*coincide con el número de puntos de coordenadas enteras dentro del círculo de radio $R$ y centro $(\alpha, \beta)$.*

**Demostración:**

Observemos, que:

$$(j - \alpha, k - \beta) \in B_R(\vec{0}) \Leftrightarrow (j - \alpha)^2 + (k - \beta)^2 = R^2 \Leftrightarrow (j, k) \in B_R(\alpha, \beta).$$

Por definición, el número de puntos de coordenadas enteras en el círculo de radio $R$ y centro $(\alpha, \beta)$ es

$$N_R(\alpha, \beta) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} \chi_{R(\alpha,\beta)}(j, k) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} \chi_R(j - \alpha, k - \beta),$$

donde $\chi_{R(\alpha,\beta)}$ denota la función característica del círculo de radio $R$ centrado en $(\alpha, \beta)$. Por lo visto anteriormente,

$$(j-\alpha, k-\beta) \in B_R(\vec{0}) \Leftrightarrow (j,k) \in B_R(\alpha,\beta). \quad \blacksquare$$

*Observación:* El círculo de radio $R$ y centro $(\alpha, \beta)$ está acotado, la coordenada $j-\alpha$ toma valores enteros entre $R$ y $-R$, y la coordenada $k-\beta$ toma valores entre $R$ y $-R$, luego en realidad en esta última suma sólo hay un número finito de términos no nulos. En particular, la serie converge.

**Lema 4.2.** *$N_R(\alpha,\beta)$ es una función periódica de periodo uno en $\alpha$ y en $\beta$.*

**Demostración:**

1) $N_R(\alpha,\beta)$ es una función periódica de periodo uno en $\alpha$:

Para ello lo que tenemos que ver es que $N_R(\alpha,\beta) = N_R(\alpha+1,\beta)$.

$$\begin{aligned} N_R(\alpha+1,\beta) &= \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \chi_R(j-(\alpha+1), k-\beta) \\ &= \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \chi_R((j-1)-\alpha, k-\beta) = \sum_{(j',k)\in\mathbb{Z}^2} \chi_R(j'-\alpha, k-\beta), \end{aligned}$$

haciendo un cambio de variable y tomando $j-1=j'$.

Así pues:

$$N_R(\alpha+1,\beta) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \chi_R(j-\alpha, k-\beta) = N_R(\alpha,\beta).$$

2) Por simetría es análogo demostrar que $N_R(\alpha,\beta)$ es una función periódica de periodo uno en $\beta$.

**Lema 4.3.**

*Sea $F(\alpha,\beta) = \sum_{n,m} a_{nm} e(n\alpha + m\beta)$, la serie de Fourier de $N_R(\alpha,\beta)$. Se verifica lo siguiente: $a_{00} = \pi R^2$, y para $n^2+m^2 \neq 0$: $a_{nm} = RJ_1(2\pi R\sqrt{n^2+m^2})/\sqrt{n^2+m^2}$*

*Observación:* La teoría de series de Fourier dice que aunque la serie anterior puede diverger en muchos puntos, converge en $L^2([0,1] \times [0,1])$. En este sentido, $F(\alpha, \beta)$ es una función de dicho espacio. Además, $F(\alpha, \beta)$ y $N_R(\alpha, \beta)$ coinciden en casi todo punto.

**Demostración:**

Pasemos a comprobar estas igualdades. Para ello recordemos en primer lugar, la fórmula de los coeficientes de la serie de Fourier de la función $y = f(\alpha, \beta)$ en dos dimensiones:

$$a_{nm} = \int_0^1 \int_0^1 f(\alpha, \beta) e(-n\alpha - m\beta) d\alpha d\beta$$

Como en nuestro caso $y = f(\alpha, \beta) = N_R(\alpha, \beta)$, queda la siguiente expresión para $a_{nm}$:

$$a_{nm} = \sum_{(j,k) \in Z^2} \int_0^1 \int_0^1 \chi_R(j - \alpha, k - \beta) e(-n\alpha - m\beta) d\alpha d\beta$$

Haciendo un cambio de variable:

Para la primera integral: $u = j - \alpha \Rightarrow -\alpha = u - j \Rightarrow -d\alpha = du$ y los límites de integración quedan: para $\alpha = 0 \Rightarrow u = j$, y para $\alpha = 1 \Rightarrow u = j - 1$.

Para la segunda integral: $v = k - \beta \Rightarrow -\beta = v - k \Rightarrow -d\beta = dv$ y los límites de integración quedan: para $\beta = 0 \Rightarrow v = k$, y para $\beta = 1 \Rightarrow v = k - 1$.

Además, con este cambio de variable, $e(-n\alpha - m\beta) = e(nu + mv)$.

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \sum_{(j,k) \in Z^2} \int_{j-1}^{j} \int_{k-1}^{k} \chi_R(u, v) e(nu + mv) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_R(u, v) e(nu + mv) du dv \end{aligned}$$

Calculemos ahora

$$a_{00} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_R(u, v) e(0) du dv = \int_{B_R(\vec{0})} 1 du dv = \pi R^2$$

Para $n^2 + m^2 \neq 0$, $a_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_R(u, v) e(nu + mv) dudv$.

Si tomamos: $\vec{\xi} = (n, m)$ y $\vec{x} = (u, v)$ nos queda que:

$$\begin{aligned}\widehat{\chi}_R(n, m) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i (u,v)(n,m)} \chi_R(u, v) dudv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e(-nu - mv) \chi_R(u, v) dudv \\ = RJ_1(2\pi R||\vec{\xi}||)/||\vec{\xi}||,\end{aligned}$$

por el lema 2.1.

Observemos que $\widehat{\chi}_R(n, m)$ es casi igual a $a_{nm}$, salvo que en $\widehat{\chi}_R(n, m)$ aparece dentro de la integral el factor: $e(-nu - mv)$, mientras que en $a_{nm}$ aparece $e(nu + mv)$.

Para obtener $a_{nm} = RJ_1(2\pi R\|\vec{\xi}\|)/\|\vec{\xi}\|$ comprobemos que:

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_R(u, v) e(nu + mv) dudv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_R(u, v) e(-nu - mv) dudv$, lo cual ocurre si y sólo si $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_R(u, v) e(nu + mv) dudv$ es real, pero esto es fácil de ver ya que es una función de Bessel, y las funciones de Bessel son reales. ■

**Lema 4.4.**

*Consideremos el espacio de probabilidad: X=[0,1]×[0,1] con la medida usual. Sea* $\xi_R : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *la variable aleatoria que asigna a cada* $(\alpha, \beta) \in X$ *el error en el problema del círculo con centro* $(\alpha, \beta)$ *y radio* $R > 1$, *entonces la esperanza de* $\xi_R$ *es igual a 0.*

**Demostración:**

Se tiene que: $\xi_R = N_R(\alpha, \beta) - \pi R^2$, donde $N_R(\alpha, \beta)$ es el número de puntos de coordenadas enteras dentro del círculo de radio $R$ y centro $(\alpha, \beta)$, y $\pi R^2$ es el área del círculo de radio $R$ y centro $(\alpha, \beta)$.

$$\begin{aligned}E(\xi_R) &= \int_0^1 \int_0^1 (N_R(\alpha, \beta) - \pi R^2) 1 d\alpha d\beta \\ &= \int_0^1 \int_0^1 N_R(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \int_0^1 \int_0^1 \pi R^2 d\alpha d\beta\end{aligned}$$

Utilizando la definición de los coeficientes de Fourier:

$$a_{nm} = \int_0^1 \int_0^1 N_R(\alpha, \beta) e(-n\alpha - m\beta) d\alpha d\beta,$$

se tiene:

$$a_{00} = \int_0^1 \int_0^1 N_R(\alpha,\beta) e^{-2\pi i 0} d\alpha d\beta = \int_0^1 \int_0^1 N_R(\alpha,\beta) d\alpha d\beta.$$

Como vimos que $a_{00} = \pi R^2$, se tiene que: $E(\xi_R) = 0$. ■

**Lema 4.5.**

*La varianza de $\xi_R$ es:*

$$\sigma_R^2 = R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(k)}{k} J_1^2(2\pi R\sqrt{k}).$$

*Además, a partir de esta fórmula se puede deducir que $\sigma_R^2 = O(R)$.*

**Demostración:**

Para obtener esta fórmula para la varianza de $\xi_R$ vamos a utilizar la "Identidad de Parseval".

Como la esperanza de $\xi_R$ es nula, la varianza es $E(\xi_R^2)$, luego:

$$\begin{aligned}
\sigma_R^2 &= \int_0^1 \int_0^1 (N_R(\alpha,\beta) - \pi R^2)^2 d\alpha d\beta = \int_0^1 \int_0^1 (N_R(\alpha,\beta) - a_{00})^2 d\alpha d\beta \\
&= \sum_{(n,m)\neq(0,0)} |a_{nm}|^2 = \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \left| \frac{RJ_1(2\pi R\sqrt{n^2+m^2})}{(n^2+m^2)^{1/2}} \right|^2 \\
&= R^2 \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{J_1^2(2\pi R\sqrt{n^2+m^2})}{n^2+m^2} = R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(k) J_1^2(2\pi R\sqrt{k})}{k},
\end{aligned}$$

donde $r(k) = \#\{(n,m) : n^2+m^2 = k\}$. De esta forma se llega a que:

$\sigma_R^2 = R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(k)}{k} J_1^2(2\pi R\sqrt{k})$.

Utilizando la acotación de $J_1$: $J_1(t) \ll \text{mín}(t, t^{-1/2})$, se tiene que:

$J_1(2\pi R\sqrt{k}) \ll \text{mín}(2\pi R\sqrt{k}, (2\pi R\sqrt{k})^{-1/2}) = (2\pi R\sqrt{k})^{-1/2}$ , ya que $k \in [1,\infty)$, con lo cual $J_1^2(2\pi R\sqrt{k}) \ll (2\pi R\sqrt{k})^{-1}$.

De este modo,

$$
\begin{aligned}
\sigma_R^2 &= R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(k)}{k} J_1^2(2\pi R\sqrt{k}) \ll R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(k)}{k} (2\pi R\sqrt{k})^{-1} \\
&\ll R \sum_{k=1}^{\infty} r(k) k^{-3/2}.
\end{aligned}
$$

Apliquemos el Lema de Abel a la serie: $\sum_{k=1}^{\infty} r(k)k^{-3/2}$.

En nuestro caso:

$A(x) = \sum_{k\leq x} r(k) = \pi x + O(\sqrt{x})$, y $\varphi(x) = x^{-3/2}$, luego $\varphi'(x) = (-3/2)x^{-5/2}$.

De este modo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} r(k)k^{-3/2} &= \lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{x} r(k)k^{-3/2} = \lim_{x\to\infty} \left( \sum_{k\leq x} r(k)k^{-3/2} \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} ((\pi x + O(\sqrt{x}))x^{-3/2}) - \lim_{x\to\infty} \int_1^x (\pi t + O(\sqrt{t}))(-3/2)t^{-5/2} dt \\
&\ll \lim_{x\to\infty} x^{-1/2} - \int_1^{\infty} t^{-3/2} dt \ll 1.
\end{aligned}
$$

Así pues, nos queda que $\sigma_R^2 \ll R$. ■

**Teorema 4.1.**

*Sea $\alpha > \frac{1}{2}$ fijado. La probabilidad de que el error $X = E(R)$ en el problema del círculo con centro elegido al azar sea mayor que $CR^\alpha$ (con $C$ una constante), tiende a cero cuando $R \to \infty$.*

**Demostración:**

Sea $\alpha > \frac{1}{2}$, queremos ver que $P\{|X| \geq CR^\alpha\} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

Para ello vamos a utilizar la "Desigualdad de Chebychev", que dice lo siguiente:

$$
P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E^2(X)}{\varepsilon^2},
$$

donde $X$ es una variable aleatoria con media 0.

Sea $\alpha > \frac{1}{2}$,

$$P\{|X| \geq CR^{\alpha}\} \leq \frac{E^2(X)}{(CR^{\alpha})^2}$$

Usando lo visto en el lema anterior, es decir, que $E^2[X] = \sigma_R^2 \ll R$:

$$P\{|X| \geq CR^{\alpha}\} \ll \frac{R}{(CR^{\alpha})^2} \ll R^{1-2\alpha}.$$

Como estamos suponiendo que $\alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha > 1 \Rightarrow 1 - 2\alpha < 0$, así pues:

$$P\{|X| \geq CR^{\alpha}\} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0. \quad \blacksquare$$

# 5. Un resultado negativo:

Hardy [4], conjetura que el error en el problema del círculo de radio $R$, $E(R) = O(R^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ para todo $\varepsilon > 0$, y demuestra que esta conjetura es cierta en promedio, es decir:

$$\frac{1}{R^2}\int_1^{R^2} |E(R)|dr = O(R^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

para $\varepsilon > 0$. Ésto es lo que se conoce como promedio sobre los radios.

Habíamos visto que para un círculo centrado "al azar"el error en el problema del círculo típicamente no excede $O(R^{1/2})$. Veremos que para el círculo centrado en $(0,0)$ no podemos mejorar este resultado, es decir, que $E(R) \neq o(R^{1/2})$ donde $E(R)$ es el error en el problema del círculo.

**Lema 5.1.**

*Sea* $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)e^{-s\sqrt{n}}$, *definida en* $\mathcal{U} = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\ s > 0\}$. *Entonces:*

$$F(s) = \frac{2\pi}{s^2} + s\int_0^{\infty} E(R)e^{-sr}dr.$$

**Demostración:**

Sea la función: $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)e^{-s\sqrt{n}}$.

Utilizando el Lema de Abel, y tomando en nuestro caso: $\varphi(n) = e^{-s\sqrt{n}} \Rightarrow \varphi'(n) = e^{-s\sqrt{n}}(-s)\frac{1}{2}n^{-1/2}$, y $a_n = r(n)$. Tenemos por tanto que:

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} r(n)e^{-s\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty}\sum_{n=0}^{x} r(n)e^{-s\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty}\sum_{n\leq x} r(n)e^{-s\sqrt{n}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\left\{\sum_{n\leq x} r(n)e^{-s\sqrt{n}} + \frac{s}{2}\int_0^x \left(\sum_{n\leq t} r(n)\right) e^{-s\sqrt{t}}t^{-1/2}dt\right\} \end{aligned}$$

$$F(s)=\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x} r(n)\right)e^{-s\sqrt{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{s}{2}\left\{\int_0^x\left[\sum_{n\le t} r(n)-\pi t\right]e^{-s\sqrt{t}}t^{-1/2}dt+\int_0^x \pi t e^{-s\sqrt{t}}t^{-1/2}dt\right\}$$

Como$\sum_{n\le x} r(n)=\pi x+O(\sqrt{x})$, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x} r(n)\right)e^{-s\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty} e^{-s\sqrt{x}}(\pi x+O(\sqrt{x}))=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi x}{e^{s\sqrt{x}}}=0$$

Por tanto:

$$F(s)=\lim_{x\to\infty}\frac{s}{2}\int_0^\infty E(\sqrt{t})e^{-s\sqrt{t}}t^{-1/2}dt+\int_0^\infty \pi t e^{-s\sqrt{t}}t^{-1/2}dt$$

Haciendo el cambio de variable: $\sqrt{t}=u\Rightarrow \frac{1}{2}t^{-1/2}dt=du$, y además, $t=u^2$:

$$F(s)=s\int_0^\infty E(u)e^{-su}du+s\pi\int_0^\infty e^{-su}u^2du$$

Recordemos que para una distribución Gamma de parámetros $\alpha$ y $\beta$, $\Gamma(\alpha,\beta)$ se cumple:

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{-x}{\beta}}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}dx=1$$

Luego:

$$F(s)=s\int_0^\infty E(u)e^{-su}du+s\pi\frac{2}{s^3}=\frac{2\pi}{s^2}+s\int_0^\infty E(u)e^{-su}du. \quad \blacksquare$$

**Lema 5.2.**

*Supongamos que* $E(R)=o(r^{1/2})$. *Entonces,* $\lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}|F(\sigma+2\pi i)|=0$.

**Demostración:**

Como $E(R)=o(r^{1/2})$, esto significa que $\lim_{r\to\infty}\frac{E(R)}{r^{1/2}}=0$. Por definición de límite, para cada $\varepsilon>0$ existe $k>0$ tal que: $|E(R)|<\varepsilon r^{1/2}$ para $r>k$.

Utilizando que: $F(s)=\frac{2\pi}{s^2}+s\int_0^\infty E(R)e^{-sr}dr$, y tomando $s=\sigma+2\pi i$ se tiene que:

$$F(\sigma+2\pi i)=\frac{2\pi}{(\sigma+2\pi i)^2}+(\sigma+2\pi i)\int_0^\infty E(R)e^{-(\sigma+2\pi i)r}dr.$$

Luego:

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}|F(\sigma+2\pi i)| &= \lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}\left|\frac{2\pi}{(\sigma+2\pi i)^2}+(\sigma+2\pi i)\int_0^\infty E(R)e^{-(\sigma+2\pi i)r}dr\right|\\ &\ll \lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}|\sigma+2\pi i|\int_0^k |E(R)|e^{-\sigma r}dr+\\ &+\lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}|\sigma+2\pi i|\int_k^\infty |E(R)|e^{-\sigma r}dr\end{aligned}$$

La primera integral, $\int_0^k |E(R)|e^{-\sigma r}dr$, está acotada porque $r$ varía entre 0 y $k$, donde $k$ es un valor finito y $|e^{-\sigma r}|\leq 1$, por tanto:

$$\lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}|F(\sigma+2\pi i)|\leq \lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}|\sigma+2\pi i|\int_k^\infty |E(R)|e^{-\sigma r}dr$$

Como por hipótesis, $|E(R)|<\varepsilon r^{1/2}$ para $r>k$ :

$$\lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}|F(\sigma+2\pi i)|\leq \lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}2\pi\varepsilon\int_k^\infty r^{1/2}e^{-\sigma r}dr.$$

Tomando el siguiente cambio de variable: $\sigma r=u\Rightarrow \sigma dr=du$, y además, se tiene que: $r=\frac{u}{\sigma}\Rightarrow r^{1/2}=\frac{u^{1/2}}{\sigma^{1/2}}$, con lo cual:

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}|F(\sigma+2\pi i)| &\leq \lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}2\pi\varepsilon\frac{1}{\sigma}\int_k^\infty r^{1/2}e^{-\sigma r}\sigma dr\\ &= \lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}2\pi\varepsilon\frac{1}{\sigma}\int_k^\infty \frac{u^{1/2}}{\sigma^{1/2}}e^{-u}du\leq \lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}2\pi\varepsilon\frac{1}{\sigma^{3/2}}\Gamma(\frac{3}{2})\\ &= \lim_{\sigma\to 0^+}\sigma^{3/2}2\pi\varepsilon\frac{1}{\sigma^{3/2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\pi^{3/2}\varepsilon.\end{aligned}$$

Así pues:

$$\lim_{\sigma\to 0^+}|F(\sigma+2\pi i)|\leq \pi^{3/2}\varepsilon.$$

Para $\varepsilon$ arbitrariamente pequeño, se tiene que:

$$\lim_{\sigma\to 0^+}|F(\sigma+2\pi i)|=0.\quad \blacksquare$$

A continuación, vamos a calcular este límite de otra forma, sin usar el error en el problema del círculo $E(R) = o(r^{1/2})$, y llegaremos a un resultado distinto de cero.

**Lema 5.3.**

*Sea* $\theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 z}$*, definida en* $\mathcal{U} = \{s \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\ s > 0\}$*. Entonces:*

$$\theta^2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} r(m) e^{-\pi z m}.$$

**Demostración:**

Como $\theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 z}$ :

$$\theta^2(z) = \theta(z)\theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 z} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2 z} = \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} e^{-\pi z(n^2+k^2)} = \sum_{m=0}^{\infty} r(m) e^{-\pi z m}. \quad \blacksquare$$

**Lema 5.4.** *Para* $z \in \mathcal{U}$, $\theta(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\theta(\frac{1}{z})$.

**Demostración:**

Hay que ver que: $\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 z}$ es igual a $\frac{1}{\sqrt{z}}\theta(\frac{1}{z}) = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\pi n^2}{z}}$.

Para ello utilicemos la fórmula de sumación de Poisson. Como queremos ver la igualdad siguiente:

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 z} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\pi n^2}{z}}$, basta con comprobar que la transformada de Fourier de $e^{-\pi n^2 z}$, $\widehat{e^{-\pi n^2 z}}$ es $\frac{1}{\sqrt{z}} e^{\frac{-\pi n^2}{z}}$.

Recordemos que si $g(x) = e^{-\pi x^2}$ entonces su transformada de Fourier:

$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} e^{-\pi x^2 z} dx = e^{-\pi \xi^2}$.

Sea $f(x) = e^{-\pi n^2 z}$ entonces su transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} e^{-\pi x^2 z} dx$$

Considerando el siguiente cambio de variables: $x = \frac{u}{\sqrt{z}} \Rightarrow dx = \frac{du}{\sqrt{z}}$.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z}} e^{\frac{-2\pi i \xi u}{\sqrt{z}}} e^{-\pi u^2} du = \frac{1}{\sqrt{z}} \widehat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{\sqrt{z}} e^{\frac{-\pi \xi^2}{z}}.$$

Por tanto, utilizando la fórmula de sumación de Poisson se concluye el resultado.

■

**Lema 5.5.**

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} \theta^2 \left(\frac{s^2}{4\pi t}\right) dt. \quad \blacksquare$$

**Demostración:**

En las tablas de integrales se puede encontrar la siguiente igualdad:

$$\int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-v(u+u^{-1})} du = e^{-2v} \sqrt{\frac{\pi}{v}}$$

Entonces:

$$e^{-2v} = \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-v(u+u^{-1})} du.$$

Sea $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) e^{-s\sqrt{n}}$. Utilizando la igualdad anterior para $v = \frac{s\sqrt{n}}{2}$, se tiene que:

$$e^{-s\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{s\sqrt{n}}{2\pi}} \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{\frac{-s\sqrt{n}}{2}(u+u^{-1})} du.$$

Así pues:

$$\begin{aligned} F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) e^{-s\sqrt{n}} &= r(0) + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \sqrt{\frac{s\sqrt{n}}{2\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{\frac{-s\sqrt{n}}{2}(t+t^{-1})} dt \\ &= r(0) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \int_0^{\infty} \left(\frac{s\sqrt{n}}{2}\right)^{1/2} t^{-1/2} e^{\frac{-s\sqrt{n}t}{2}} e^{\frac{-s\sqrt{n}}{2} t^{-1}} dt \end{aligned}$$

Considerando el siguiente cambio de variable: $\frac{s\sqrt{n}t}{2} = y \Rightarrow t = \frac{2y}{s\sqrt{n}}$, y además: $\frac{s\sqrt{n}}{2}dt = dy$.

$$
\begin{aligned}
F(s) &= r(0) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \frac{2}{s\sqrt{n}} \int_0^{\infty} \left(\frac{4}{s^2 n}\right)^{-1/2} y^{-1/2} e^{-y} e^{\frac{-s\sqrt{n}}{2} \frac{s\sqrt{n}}{2y}} dy \\
&= r(0) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} r(n) e^{\frac{-s^2 n}{4t}} dt
\end{aligned}
$$

Observemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} r(0) dt = \frac{r(0)}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Por tanto:

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} r(0) dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} r(n) e^{\frac{-s^2 n}{4t}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} \left( r(0) + \sum_{n=1}^{\infty} r(n) e^{\frac{-s^2 n}{4t}} \right) dt
\end{aligned}
$$

Como $r(0)e^{\frac{-s^2 0}{4t}} = r(0)$ entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} r(n)e^{\frac{-s^2 n}{4t}} = r(0) + \sum_{n=1}^{\infty} r(n)e^{\frac{-s^2 n}{4t}}$.

Y así: $F(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} r(n) e^{\frac{-s^2 n}{4t}} dt$.

Observemos que: $\theta^2(\frac{s^2}{4\pi t}) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) e^{\frac{-s^2 n}{4t}}$.

Luego se concluye:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} \theta^2 \left(\frac{s^2}{4\pi t}\right) dt. \quad \blacksquare$$

**Lema 5.6.** *Para* $s \in \mathcal{U}$

$$F(s) = \frac{4\sqrt{\pi}}{s^2} \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} \theta^2 \left(\frac{4\pi t}{s^2}\right) dt = 2\pi s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(n)}{(s^2 + 4\pi^2 n)^{3/2}}.$$

**Demostración:**

Por el lema anterior:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} \theta^2 (\frac{s^2}{4\pi t}) dt.$$

Utilizando que: $\theta(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \theta(\frac{1}{z})$entonces $\theta^2(z) = \frac{1}{z}\theta^2(\frac{1}{z})$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{4\sqrt{\pi}}{s^2} \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t} \theta^2 \left(\frac{4\pi t}{s^2}\right) dt = \sum_{m=0}^{\infty} r(m) \frac{4\sqrt{\pi}}{s^2} \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t} e^{\frac{-4\pi^2 tm}{s^2}} dt \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} r(m) \frac{4\sqrt{\pi}}{s^2} \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t(1+\frac{4\pi^2 m}{s^2})} dt = \sum_{m=0}^{\infty} r(m) \frac{4\sqrt{\pi}}{s^2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{s^3}{(s^2+4\pi^2 m)^{3/2}} \\
&= 2\pi s \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r(m)}{(s^2+4\pi^2 m)^{3/2}}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Lema 5.7.** $\lim_{\sigma\to 0^+} \sigma^{3/2} |F(\sigma + 2\pi i)| = 2\sqrt{\pi} \neq 0.$

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to 0^+} \sigma^{3/2} |F(\sigma+2\pi i)| &= \lim_{\sigma\to 0^+} \sigma^{3/2} \left| 2\pi(\sigma+2\pi i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(n)}{((\sigma+2\pi i)^2 + 4\pi^2 n)^{3/2}} \right| \\
&= \lim_{\sigma\to 0^+} 4\pi^2 \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(n)\sigma^{3/2}}{(\sigma^2 - 4\pi^2 + 4\pi\sigma i + 4\pi^2 n)^{3/2}} \right| \\
&= \lim_{\sigma\to 0^+} 4\pi^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)\sigma^{3/2}}{(\sigma + 4\pi^2(n-1)\sigma^{-1} + 4\pi i)^{3/2}} + \frac{r(1)\sigma^{3/2}}{(\sigma^2+4\pi\sigma i)^{3/2}} \right| \\
&= \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{4\pi^2 r(1)}{|\sigma + 4\pi i|^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi} r(1)}{2} = 2\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Con todo esto se puede enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 5.1.**

*Si $E(R)$ es el error en el problema del círculo de radio $r$,entonces $E(R) \neq o(r^{1/2})$.*

**Demostración:**

Supongamos que $E(R) = o(r^{1/2})$, entonces vimos que $\lim_{\sigma \to 0^+} \sigma^{3/2}|F(\sigma + 2\pi i)| = 0$, sin embargo por el lema visto anteriormente se tiene que: $\lim_{\sigma \to 0^+} \sigma^{3/2}|F(\sigma + 2\pi i)| = 2\sqrt{\pi} \neq 0$, luego la hipótesis: $E(R) = o(r^{1/2})$ es falsa.$\blacksquare$

# Referencias


[1] H. Chaix. Démonstration élémentaire d'un théorème de Van der Corput. *C. R. Acad. Sc. Paris.* **275**, 883-885 (1972).

[2] J. Cilleruelo y A. Córdoba. *La teoría de los números* (1992), Biblioteca Mondadori

[3] S.W. Graham, G. Kolesnik. Van der Corput's Method of Exponential Sums. London Math. Society Lecture Note Series 126. Cambridge University Press 1991.

[4] G. H. Hardy. The average order of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$. *Proc. London Math. Soc.(2)* **15**, 192-213 (1916).

[5] G. H. Hardy. The Lattice Points of a Circle. *2 Proceedings of the Royal Society A*. **107**, 344-635 (1925).

[6] M. N. Huxley. Exponential sums and lattice points II. *Proc. London Math. Soc. (3)*. **66**, 279-281 (1993).

[7] D. G. Kendall. On the number of lattice points inside a random oval. *Quart. J. Math. Oxford*. **19**, 6-24 (1948).

[8] E. Phillips. The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method. *Quart. J. Math.* **4**, 209-225 (1933).

[9] E. Preissman. Sur la moyenne quadratique du terme de reste du problème du cercle. *C. R. Acad. Sci. Paris.* **306**, 151-154 (1988).

**Índice**