

# ÍNDICE

# INTRODUCCIÓN Y AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo pretende ser el segundo de los dos que han de ser entregados para optar al título de Diplomado en Estudios Avanzados – D.E.A. – por la Universidad Autónoma de Madrid – U.A.M. - habiendo sido el primero “...”.

Estudiamos diferentes resultados relacionados con la distribución de los números primos, la función zeta, distribuciones de sus ceros, etcétera, disponiendo los resultados en los capítulos que comentamos brevemente a continuación

- **Capítulo 1: Repaso de la Publicación Original de Riemann.** En este capítulo introductorio recorreremos la única publicación que Bernhard Riemann hizo en teoría de números, justificando algunos pasos y comentando todo aquello que no esté claro o que sea incorrecto. No daremos pruebas exhaustivas de cada uno de los pasos, sino que iremos dando referencias a otras partes del trabajo. La idea es permitir seguir las ideas originales de Riemann de forma sencilla evitando en la medida de lo posible el perdernos en los detalles.
- **Capítulo 2: Resultados Auxiliares.** Damos demostraciones rigurosas y explicaciones detalladas de todos los pasos incompletos en el original de Riemann. Está organizado en secciones numeradas que se corresponden con las referencias dadas en el capítulo 1.
- **Capítulo 3: Teorema de los Números Primos.** En las dos primeras secciones pueden encontrarse dos demostraciones completas del teorema de los números primos: una usando teoría de Fourier y la otra utilizando únicamente métodos de variable compleja. En la última sección de este capítulo resumimos otras ocho demostraciones alternativas de este teorema.

- **Capítulo 4: Distribución de Ceros para la Función Zeta de Riemann.** Este último capítulo consta de cinco secciones en las que estudiaremos esencialmente cómo se distribuyen los ceros de la función zeta de Riemann en la banda crítica, y cómo el conocer dicha distribución nos permite obtener información de cómo se distribuyen los números primos dentro de los enteros.
- **Apéndice 1: Resultados Auxiliares.** Breves explicaciones de todos aquellos resultados – teoremas o teorías – importantes que se han usado en las demostraciones a lo largo del presente trabajo.
- **Apéndice 2: Trabajo Original de Riemann.** Para que sea más sencillo el hacer consultas incluimos una traducción al inglés del trabajo original de Riemann. Este trabajo se encuentra disponible en Internet y es la referencia [1].
- **Bibliografía.**

### AGRADECIMIENTOS AQUÍ.

La notación que se emplea en este trabajo es más o menos estándar, salvo quizá un poco en el primer capítulo intentando acercarnos al original de Riemann de forma que las comparaciones con el Apéndice 2 fuesen más sencillas. Haremos explícitos algunos símbolos por si pudiesen resultar confusos:

1.  $\Re(s)$  denota la **parte real** del número complejo  $s$ .
2.  $\Im(s)$  es la **parte imaginaria** del número complejo  $s$ .
3.  $[x]$  Función **parte entera**: el mayor entero menor o igual a  $x$ .
4.  $\{x\}$  Función **parte fraccionaria**:  $\{x\} = x - [x]$ .
- 5.

Hay que explicar la notación  $\ll$  y la de Landau

Sobre la notación de Landau, ver secc 9.8 de [E] pág 199

# Capítulo 1: Revisión del Trabajo de Riemann

## 1.1 Introducción

En 1859 Bernhard Riemann publica su único trabajo en teoría de números. Es un trabajo de una profundidad extraordinaria que nos sorprende, entre otras muchas cosas, por su actualidad – salvo alguna cuestión notacional menor –. Es uno de esos clásicos que aparecen como referencia en muchos libros y artículos y cuya influencia se deja sentir hoy en día de forma notable debido, fundamentalmente, a la famosa hipótesis de Riemann.

Varias ramas de la matemática contemporánea han surgido para dar respuesta o ampliar ideas expuestas en este trabajo y ha sido también uno de los motores más importantes para su posterior desarrollo. Como curiosidad incluimos una breve descripción de algunos problemas y teorías matemáticas y físicas relacionadas:

referir a “consequences of the Riemann Hypothesis”. Incluir un breve resumen aquí.

Uno de los focos de investigación más activos en la actualidad en teoría de números gira entorno a una de las afirmaciones que aparece en su publicación y que todavía queda por demostrar: la conocida como **hipótesis de Riemann**. Éste es seguramente el problema abierto más importante, o al menos el más famoso, que actualmente tienen planteadas las matemáticas. Hay varios premios para aquél o aquellos que consigan demostrar su veracidad (curiosamente el premio no se hará efectivo si se encuentra un contraejemplo de forma numérica). Véase, por ejemplo, la página del Instituto Clay de Matemáticas en [www.claymath.org](http://www.claymath.org).

El título original en español del trabajo de Riemann se puede traducir por algo así como **sobre la distribución de números primos menores que una**

***cantidad dada*** (el original en alemán ***Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen grösse***). Puede encontrarse una traducción al inglés del original alemán en el **Apéndice 2** de este mismo trabajo.

Existen estupendas publicaciones que cuentan con muchísimos detalles la vida y obra de B. Riemann, por lo que en este trabajo no haremos casi ningún comentario histórico. Para situar al autor diremos que actualmente B. Riemann está considerado, junto con Euclides, I. Newton, L. Euler y K. F. Gauss, como uno de los matemáticos más importantes e influyentes de toda la historia.

En este capítulo hacemos un seguimiento de la publicación de Riemann comentando brevemente algunos puntos que pueden parecer oscuros, pero que admiten una explicación sencilla. Todos aquellos que requieran de una explicación más profunda, o más larga, se dejarán para el capítulo segundo. Lo que pretendemos es que en un primer estudio tengamos una visión general de las ideas originales del autor impidiendo, en la medida de lo posible, perdernos en los detalles.

Siguiendo esta división, sería recomendable realizar una primera lectura de este capítulo ignorando las referencias, de forma que se obtenga una visión global. Posteriormente, y una vez que hayamos asimilado las ideas de Riemann, podríamos realizar una segunda lectura revisando cada una de las referencias en profundidad.

Riemann divide su trabajo en dos partes que diferencia claramente: en la primera introduce todos los conceptos y fórmulas que necesitará posteriormente en la segunda, donde hace un desarrollo en el que pretende dar una fórmula que aproxime exactamente la función de distribución de los números primos. Anticipándonos un poco diremos que desafortunadamente su desarrollo no es suficientemente riguroso y ni siquiera podemos considerar que diese una demostración aceptable del teorema de los números primos, ya que una parte importante de su trabajo descansa en la aún no probada hipótesis de Riemann.

Resumimos brevemente el esqueleto del trabajo de Riemann, siguiendo su

orden de exposición:

1. Definición y continuación analítica a todo el plano complejo de la función  $\zeta(s)$ .
2. Propiedades básicas de la función zeta: no es multivaluada, tiene un único polo simple en  $s=1$  y se anula en los enteros pares negativos.
3. Enunciado y demostración de la ecuación funcional.
4. Fórmula asintótica para el número de ceros que la función  $\xi(s)$  – relacionada con la  $\zeta(s)$  – tiene en la banda crítica.
5. A partir de la fórmula anterior justifica la factorización de  $\xi(s)$  como producto de sus raíces.
6. Introducción de  $f(x)$  y  $F(x)$  : funciones que nos permiten estudiar la distribución de los números primos.
7. Relación de estas funciones con la zeta de Riemann.
8. Fórmula explícita para la función  $\zeta(s)$  y aparición del logaritmo integral.
9. Fórmula explícita para  $f(x)$ , obtenida a partir de la que se comenta en el punto anterior.
10. Fórmula explícita para  $F(x)$  a partir de la obtenida para  $f(x)$  usando inversión de Möbius.
11. Mejora de la aproximación de Gauss y Legendre y posibles continuaciones de su trabajo.

Lo que sí consigue Riemann – aunque de forma no rigurosa – es mejorar las estimaciones y propuestas heurísticas que aparecen en los trabajos de Gauss y otros autores (referimos al lector a **[P]** por ejemplo) y establecer – de nuevo de forma no rigurosa – una fórmula exacta para la función de distribución de los números primos como desarrollo en serie de funciones del tipo logaritmo integral. En mi opinión, su mayor aportación fue aclarar en qué sentido el logaritmo integral aproxima la distribución de los primos dentro de los enteros, estableciendo de esta forma un contexto adecuado para el estudio del problema, y orientando en gran medida una buena parte de la investigación posterior hasta

nuestros días.

## 1.2 Hechos Preparatorios: Propiedades Básicas.

Riemann parte de la **identidad 1.2.1** de Euler que relaciona los números enteros con la sucesión de los primos.

$$(1.2.1) \quad \zeta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^s} \right) = \prod_{p \text{ primo}} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right)$$

La demostración es sencilla e ingeniosa, consecuencia del teorema fundamental de la aritmética (los enteros se descomponen de manera esencialmente única como producto de primos), por lo que pasamos a demostrarla a continuación y definimos de paso la función  $\zeta(s)$ .

Empezamos partiendo de la fórmula para las series geométricas aplicada a la función  $(1 - p_n)^{-1}$ , donde representamos la sucesión de los números primos por  $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ .

$$\frac{1}{1 - p_n^{-s}} = \sum_{m=0}^{\infty} p_n^{-ms}$$

y por lo tanto

$$\prod_{k=1}^N \left( 1 - p_k^{-s} \right)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} n_{N,j}^{-s}$$

donde los enteros  $\{n_{N,1}, n_{N,2}, n_{N,3}, \dots\}$  son todos aquellos que pueden ser factorizados como producto de potencias de los primos  $p_k$  con  $k=1, \dots, N$ . Haciendo  $N \rightarrow \infty$  obtenemos la identidad de Euler.





El principal problema es que de esta manera tenemos la función  $\zeta(s)$  definida exclusivamente para  $\Re(s) > 1$ , así que nuestro próximo objetivo – junto con Riemann – es definirla para todo valor complejo y probar, de paso, que tiene únicamente un polo simple en  $s=1$  y es finita para todo valor finito de la variable. Lo conseguimos a partir de la definición de la función  $\Gamma(s)$  :

$$(1.2.2) \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{s-1} \cdot dx \quad .$$

Uno de los pocos cambios notacionales que comentamos en la introducción tiene lugar aquí. En la época de Riemann se representaba a la función gamma usando una pi mayúscula  $\Pi(s)$  y la definición era levemente distinta. La relación entre ambas es bastante sencilla:  $\Pi(s) = \Gamma(s+1)$ , es decir, trasladamos  $\Pi(s)$  una unidad a la derecha en el eje de abscisas.

En lugar de **1.2.2**, consideramos la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-nx} \cdot x^{s-1} \cdot dx$$

a partir de la que se sigue, usando la igualdad **1.2.2** y aplicando el cambio de variable  $t = n \cdot x \rightarrow dx = dt/n$ , la siguiente cadena de identidades:

$$\int_0^{\infty} e^{-n \cdot x} \cdot x^{s-1} \cdot dx = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} n^{1-s} n^{-1} \cdot dx = n^{-s} \cdot \Gamma(s) \quad .$$

Ahora hacemos el sumatorio en  $n$  y, usando la fórmula para una serie geométrica de razón  $e^{-x}$ , obtenemos por fin la expresión **1.2.3**. Observemos que los cambios de sumatorio con integración están plenamente justificados por la convergencia absoluta de la serie. Recordemos que – debido a la definición de las funciones utilizadas hasta ahora – estamos suponiendo de manera implícita que  $\Re(s) > 1$ .

$$(1.2.3) \quad \zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

Esta expresión es válida únicamente cuando  $\Re(s) > 1$ , con lo que por ahora no hemos conseguido nada. Lo que se le ocurre a Riemann es considerar la expresión

$$\int_0^{\infty} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

a partir de la cual obtiene la identidad **1.2.4**. La justificación completa de dicha identidad es un poco larga así que la presentamos en la **sección 1** de **2.2**.

$$(1.2.4) \quad \int_{\gamma_\epsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx = -\Gamma(s)\zeta(s)2i\text{sen}(\pi s) .$$

donde  $\gamma_\epsilon$  es el camino definido en la figura **2.2.1**. En dicha sección justificamos detalladamente por qué **1.2.4** nos da la extensión a todo el plano complejo de la función  $\zeta(s)$ . Justificamos también las siguientes propiedades de la función  $\zeta(s)$ :

1. no es multivaluada,
2. tiene un único polo en  $s=1$  y
3. se anula cuando  $s$  es un entero par negativo (que por definición son los conocidos como **ceros triviales**).

## 1.3 Ecuación Funcional

Riemann continúa enunciando y demostrando lo que actualmente se conoce

como la ecuación funcional de  $\zeta(s)$  (es la fórmula **1.3.4** que podemos encontrar un poco más adelante). Llama la atención el hecho de que dé dos demostraciones diferentes de esta fórmula ya que Riemann era un matemático muy “económico” en sus publicaciones (parco en explicaciones y demostraciones). Esta brevedad en sus exposiciones hace que la tarea de seguir sus ideas y rastrear la procedencia de éstas sea bastante complicado en general. En este sentido recomendamos la referencia **[E]**, en la que el autor hace exposiciones muy completas, comparando con trabajos anteriores de otros autores y del propio Riemann.

Nosotros ahora vamos a fijar nuestra atención en la relación de la fórmula de Poisson con la función zeta, intentando de esta forma ver de dónde pudo extraer Riemann su “inspiración”. En la **sección 2.3** pueden encontrarse las dos demostraciones completas que Riemann dio de la ecuación funcional.

En cierto sentido se puede decir que la ecuación funcional para la función zeta “no es más que” la aplicación de la fórmula de Poisson a la función  $f(x)=|x|^{-s}$ . La anterior afirmación y los cálculos que reproducimos a continuación deben ser entendidos como orientativos, es decir, poco rigurosos. No nos vamos a preocupar en exceso por demostrar dónde son aplicables las fórmulas sino solamente por establecer formalmente relaciones entre las funciones en las que estamos interesados.

Empezamos calculando la transformada de Fourier de la función  $f(x)=|x|^{-s}$  :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(r) &= \int_{\mathbb{R}} |x|^{-s} e^{-2\pi i r x} dx = r^{s-1} \int_{\mathbb{R}} |y|^{-s} e^{2\pi i y} dy \\ &= r^{s-1} 2 (2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= r^{s-1} \left( \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \right).$$

En la segunda igualdad, dentro de la sucesión de identidades anteriores, hemos hecho el cambio de variable  $y = -x \cdot r \rightarrow dx = -dy/r$  para hacer aparecer la función gamma. Posteriormente hemos usado **1.2.4** y en la última identidad hemos utilizado algunas propiedades básicas de la función gamma (véase la **sección A.5 del Apéndice 1**). Observar que las operaciones anteriores son válidas al menos cuando  $r \neq 0$  y  $0 < \Re(s) < 1$ .

Usando la notación  $|0|^s = 0$ , aplicando la fórmula de Poisson a la función  $|x|^{-s}$  y considerando las identidades anteriores, obtenemos la ecuación funcional para la función zeta de Riemann:

$$(1.3.1) \quad \zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s).$$

Como ya hemos comentado anteriormente, las identidades y cálculos precedentes deben entenderse sólo a nivel formal, ya que cuando uno de los lados de la **igualdad 1.3.1** converge, el otro no – tampoco en  $0 < \Re(s) < 1$  –. De hecho la ecuación funcional no se puede demostrar sin alguna forma de continuación analítica, de forma que Riemann necesitó argumentar de forma más cuidadosa aplicando la fórmula de Poisson a funciones de decaimiento rápido. Eligió como funciones de decaimiento rápido la familia de las gaussianas probablemente debido a que utiliza una identidad que atribuye a Jacobi y que es válida precisamente para estas funciones. En su trabajo hace referencia a una publicación de Jacobi donde, curiosamente, no aparece explícitamente dicha identidad, sino en otro documento – **[J1]** – en el que Jacobi atribuye esta identidad a Poisson. Definimos la función psi mediante la fórmula:

$$(1.3.2) \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} .$$

La identidad de Jacobi a la que nos referimos es

$$(1.3.3) \quad \frac{1 + 2\psi(x)}{1 + 2\psi(1/x)} = \frac{1}{\sqrt{x}} .$$

Esta función  $\psi(x)$  no tiene absolutamente nada que ver con la que introduciremos en la sección 1.5. La demostración no es muy complicada una vez sabemos que la transformada de Fourier de

$$g(x) = e^{-\pi x^2 y} \quad \text{es} \quad \hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\pi \frac{\xi^2}{y}} .$$

La ecuación funcional para la función zeta se enuncia de muchas formas diferentes dependiendo de la aplicación que se le quiera dar o incluso de quién la vaya a utilizar (véase otra en **A.5.7**, por ejemplo). Una de las formas más comunes es la ya escrita anteriormente y que repetimos para futuras referencias:

$$(1.3.4) \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) .$$

Esencialmente 1.3.4 nos establece una simetría con respecto a la línea vertical  $\frac{1}{2}$ . Dicha simetría debe entenderse en el sentido de que conocido el comportamiento en la parte derecha de esa línea, conocemos el comportamiento en la parte izquierda y viceversa.

## 1.4 Número de Ceros y Factorización

Para finalizar esta primera parte de su trabajo, a la que Riemann denomina “preparatoria”, define una nueva función  $\xi(s)$  a partir de  $\zeta(s)$  que considera más adecuada para hacer cálculos. Establece dos hechos importantes para ella:

el número de ceros que esta función tiene en la banda crítica hasta altura  $T$  y su factorización como productorio de sus raíces.

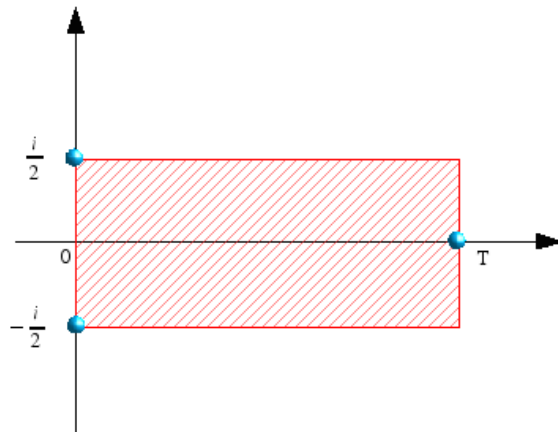
Riemann empieza haciendo el cambio de variable  $s = it + 1/2$  – donde la variable  $t$  puede tomar de nuevo valores complejos – y define

$$(1.4.1) \quad \xi(t) = \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) (s-1) \pi^{-s/2} \zeta(s) .$$

La anterior definición surge a partir de la ecuación funcional después de multiplicar por  $s(s-1)/2$ , ya que de otra forma tendríamos dos polos, uno para  $s=0$  y otro para  $s=1$  – véase la identidad **2.3.4** –. Para llegar a la identidad **1.4.1** hemos usado una de las propiedades básicas de la función gamma, a saber, que  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ .

A partir de la definición **1.4.1** conseguimos de nuevo una función entera que tiene los mismos ceros que la función zeta de Riemann pero cuya expresión para la ecuación funcional es mucho más compacta:  $\xi(s) = \xi(1-s)$ . Para verlo basta con sustituir **1.4.1** en **1.3.2**.

Nosotros, al igual que el resto de los trabajos posteriores a la publicación de Riemann, usaremos la variable  $s$  en lugar de la  $t$  propuesta en dicho trabajo, es decir, no haremos el cambio de variable que Riemann propone. La única diferencial “sustancial” reside en el hecho de que al hacer  $s = 1/2 + it$  la banda crítica pasa de ser  $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leq s \leq 1\}$  al conjunto  $B = \{t \in \mathbb{C} \mid -i/2 \leq t \leq i/2\}$ . El cambio de variable, como transformación, gira  $\pi/2$  radianes en sentido horario y desplaza media unidad en dirección vertical la variable independiente  $t$ . Seguramente Riemann hizo su cambio pensando en la hipótesis de Riemann: para que así los ceros de  $\xi$  fueran reales.



**figura 1.4.2**

Después de una serie de operaciones que podemos encontrar detalladas en la **sección 2.4**, Riemann llega a la expresión:

$$(1.4.3) \quad \xi(t) = 4 \int_1^{\infty} \left\{ \frac{d[x^{3/2} \psi'(x)]}{dx} x^{-1/4} \cos\left(\frac{t}{2} \log(x)\right) \right\} dx .$$

Continúa su trabajo haciendo dos afirmaciones que necesitan una pequeña explicación: la primera es que la integral anterior está acotada. Esto lo podemos ver observando que  $\psi(x)$  es una función del tipo  $e^{-t^2}$ , de forma que por más que derivemos seguiremos obteniendo una función de decaimiento rápido, con lo que la integral será convergente (observar que la parte del coseno está acotada en valor absoluto por 1). La segunda afirmación que hace Riemann es que **1.4.3** se puede desarrollar como serie de potencias en  $t^2$ : la variable  $t$  sólo aparece dentro de la función coseno, que es par.

Pasamos ahora – junto con Riemann – a establecer una fórmula que nos permita estimar el número de ceros – que denotaremos por  $N(T)$  – de la función  $\xi(t)$  en la banda crítica  $B$  dentro del intervalo  $[0, T]$ . Hoy en día se conoce como **fórmula de Riemann-von Mangoldt**, ya que fue éste último quien dio la primera demostración completa en el año 1905 (habían pasado 46 años

desde la publicación del original de Riemann).

$$(1.4.4) \quad N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} .$$

La demostración de esta fórmula puede encontrarse en la **sección 2.5**.

Por fin llegamos a la parte que ha traído y sigue trayendo a los matemáticos de cabeza durante prácticamente siglo y medio: la famosa **hipótesis de Riemann** (que mejor debiéramos llamar “conjetura de Riemann”, pero no voy a ser yo a estas alturas quien le cambie el nombre).

A continuación podemos encontrar una traducción libre del original de Riemann al español. La he hecho basándome en dos traducciones al inglés (véanse las referencias), así que espero haber sido relativamente fiel al original. Riemann se expresa, más o menos, en los siguientes términos:

*Uno de hecho encuentra aproximadamente este número de raíces entre estas cotas y es muy probable que todas las raíces sean reales. A uno desde luego le gustaría tener una demostración rigurosa de este hecho, pero he dejado de lado la búsqueda de esta demostración después de algunos intentos en vano porque no es necesario para el próximo paso en mi investigación.*

Explicamos brevemente este enunciado: como él usa la definición **1.4.1** para la función  $\xi(t)$ , La banda crítica es ahora el intervalo  $[-i/2, i/2]$ , y es por eso que él dice lo de que “*todas las raíces sean reales*” (normalmente en los libros encontramos el enunciado “todas las raíces tienen parte real  $1/2$ ”). Donde aparece “*uno de hecho encuentra aproximadamente este número de raíces*” se refiere a lo que nosotros ahora conocemos como fórmula de **Riemann-von Mangoldt**, es decir **1.4.4**.

Por último Riemann establece una fórmula que descompone la función  $\xi(t)$



como producto de sus raíces. Una vez más una justificación completa de esta descomposición llevó bastante tiempo e hizo que Hadamard desarrollase su teoría de funciones enteras y su teorema de factorización. Una exposición introductoria, aunque suficientemente detallada, puede encontrarse en la referencia bibliográfica **[C1]** o en la **sección A.7** en el **Apéndice 1** de este mismo trabajo. Nosotros a continuación daremos una justificación poco rigurosa de esta descomposición.

A la fórmula que queremos llegar es a **1.4.5**. Representaremos por  $\alpha$  a las raíces de la ecuación **1.4.1**,  $\xi(t)=0$ , mientras que usaremos la letra griega rho,  $\rho$ , para las raíces  $\xi(s)=0$ , es decir, sin hacer el cambio de variable que propone Riemann en su trabajo. La relación que existe entre ambas representaciones de la familia de raíces es sencilla:  $\alpha = i\rho + 1/2$ . Siguiendo el original de Riemann y realizando el cambio de variable que él propone llegaremos a:

$$(1.4.5) \quad \log(\xi(t)) = \log(\xi(0)) + \sum_{\alpha} \log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right).$$

Esencialmente esto lo podemos entender de la siguiente manera: todo polinomio con coeficientes en  $\mathbb{C}$  (teorema fundamental del álgebra) se descompone en factores lineales. Los términos independientes en los monomios son precisamente las raíces del polinomio (es la típica representación de un polinomio como “producto de sus raíces”). Algo muy similar es lo que hacemos aquí:

$$(1.4.6) \quad \xi(t) = C \prod_j (t - \alpha_j).$$

Esto no convergerá porque el término constante se nos va a ir a infinito si desarrollamos el producto, así que por una cuestión meramente notacional lo expresamos como en **1.4.7**. Tendremos que “normalizar” las raíces para que la igualdad se mantenga: por abuso de notación en ambos casos llamamos a las raíces  $\alpha_j$ .

$$(1.4.7) \quad \xi(t) = C \prod_j \left(1 - \frac{t}{\alpha_j}\right) .$$

Ahora hemos de observar que, por la ecuación funcional, las raíces son simétricas con respecto al eje imaginario (conjugadas), con lo que podemos escribir

$$(1.4.8) \quad \xi(t) = \xi(0) \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_j^2}\right) ,$$

donde hemos aplicado que  $(1-t/\alpha)(1-t/(-\alpha))=1-t^2/\alpha^2$  . Si por último extraemos el logaritmo de **1.4.8** obtendremos la fórmula que aparece en el trabajo de Riemann.

Podemos pensarlo de otra manera: esencialmente de lo que se trata es de caracterizar a la función a través de sus ceros y singularidades, es decir, como la función  $\log \xi(s)$  tiene las mismas singularidades que  $\xi(s)$  – salvo que son de tipo logarítmico – en los mismos puntos que  $\xi(s)$  y no tiene ninguna otra singularidad, entonces  $\log \xi(s)$  tendrá las mismas que la suma formal

$$\sum_{\rho} \log \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) .$$

La conclusión es que si la suma anterior converge y se comporta cerca de  $\infty$  tan bien como  $\log \xi(s)$  , entonces la suma anterior y la función  $\log \xi(s)$  difieren en, a lo sumo, una constante aditiva. Haciendo  $s=0$  obtenemos el valor  $\log \xi(0)$  para esta constante. Hallando la exponencial nos queda la fórmula que establece Riemann, que igual que **1.4.8**:

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) .$$

El punto que aparece como más oscuro en esta “demostración” es la convergencia del sumatorio: la convergencia es condicional (no absoluta) por lo que hemos de especificar un orden. Dicho orden es el correspondiente a poner

de forma creciente las raíces  $\rho$  en función de la magnitud de su módulo. Demostrar entonces la convergencia depende de probar que la densidad vertical de las raíces es del tipo  $\log(T/2\pi)$ . Para encontrar una prueba detallada de esta última afirmación referimos al lector a la **sección 2.5**.

Para ver que la función no se anula para  $\Re(s) > 1$  usamos la representación

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

Cuya demostración puede consultarse al comienzo de la **sección 3.2**. Como el miembro derecho – la serie – es convergente para  $\Re(s) > 1$  se tiene que la función zeta no se puede anular. Usando la ecuación funcional vemos que lo mismo ocurre para  $\Re(s) < 0$  (salvo los ceros triviales, véase la **sección 2.3**). Esta banda que nos queda en la que parecen estar ubicados el resto de los ceros es lo que se conoce como **banda crítica**.

Resumimos lo que Riemann ha hecho en su trabajo hasta el momento. En primer lugar ha definido la función zeta – que ya había definido Euler – pero en lugar de usar variable real, utiliza variable compleja. Posteriormente extiende la definición de dicha función a todo el plano complejo y demuestra lo que conocemos actualmente por ecuación funcional. A continuación hemos justificado una fórmula para el número de raíces que tiene la función  $\xi$  (equivalentemente, la función zeta) en la banda crítica hasta altura  $T$  y, para concluir, hemos dado un desarrollo para la función  $\xi$  como producto infinito. A lo largo del presente trabajo, en especial en la próxima sección, veremos el para qué de cada uno de estos resultados.

## 1.5 Función de Distribución de los Primos.

Riemann da por concluida la parte introductoria o preparatoria de su trabajo y comienza a estudiar la distribución de los números primos. Hasta ahora hemos

presentado una serie de funciones y hemos establecido algunas de sus propiedades más importantes. Estas funciones y sus propiedades las usaremos en lo que resta de capítulo para establecer la ley que sigue la distribución de los primos y el orden del error que cometemos.

La idea básica es la que ha perdurado desde entonces en el enfoque analítico del problema de la distribución de los primos: partimos de una ecuación integral para  $\zeta(s)$  que interpretamos como la transformada de Fourier de cierta otra función  $f(x)$ . A continuación despejamos  $f(x)$  en dicha ecuación (hablando en términos de transformadas de Fourier, invertimos el operador) de forma que nos quede  $f(x)$  en función de  $\zeta(s)$ . Resulta que la  $f(x)$  tiene mucho que ver con la distribución de los primos, como veremos posteriormente.

Empezamos definiendo la función que nos va a representar la distribución de los números primos. Sea  $F(x)$  una función tal que cuando  $x$  no sea primo nos dé el número de primos menores que él, y cuando sea igual a un primo incremente dicho valor en media unidad, es decir,

$$F(x) = \begin{cases} \left| \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ primo}, p < x\} \right| & \text{si } x \text{ no es primo} \\ \left| \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ primo}, p < x\} \right| + \frac{1}{2} & \text{si } x \text{ es primo} \end{cases}$$

de tal forma que cuando la función de distribución tenga un salto, sea válida la siguiente identidad:

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} .$$

Recordemos que vamos a usar series de Fourier y que cuando una serie de este tipo aproxima una función con un salto finito, en ese punto la serie converge al valor medio. Éste es otro sitio en el que la notación ha quedado un poco desfasada en el original: actualmente esta función no suele representarse mediante  $F(x)$ , sino por  $\pi(x)$ .

Tenemos las siguientes identidades cuya demostración es trivial:

$$p^{-s} = s \int_p^{\infty} x^{-s-1} dx, \quad p^{-2s} = s \int_{p^2}^{\infty} x^{-s-1} dx, \dots$$

En la ecuación **1.2.1** tomamos logaritmos de forma que nos queda:

$$\begin{aligned} (1.5.1) \quad \log(\zeta(s)) &= -\sum_p \log(1-p^{-s}) \\ &= \sum_p p^{-s} + \frac{1}{2} \sum_p p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum_p p^{-3s} + \dots \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado el desarrollo en serie de Taylor de la función logaritmo, recordamos la fórmula

$$\log(1-\omega) = \omega + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} + \dots$$

El desarrollo es válido si  $|\omega| < 1$  de forma que obtenemos una primera restricción de los valores a los que la fórmula será aplicable:

$$|p^{-s}| < 1 \Rightarrow |e^{-s \log p}| < 1 \Rightarrow -s \log p < 0 \Rightarrow \Re(s) > 0$$

En realidad el conjunto de valores en el que es válida la **identidad 1.5.1** es algo más restringido –  $\forall s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) = a > 1$  – ya que cada término de la serie en la última igualdad de **1.5.1** está acotado debido a la siguiente estimación:

$$\left| \sum_p p^{-s} \right| \leq \sum_p |p^{-s}| = \sum_p |p^{-a-ib}| = \sum_p |p^{-a}| = \sum_p p^{-a}$$

Definimos ahora la función que usaremos para el estudio de la distribución de los primos y la que hemos utilizado en los comentarios introductorios a esta sección.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F\left(\frac{x}{n}\right) = F(x) + \frac{1}{2} F\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3} F\left(\frac{x}{3}\right) + \dots$$

Esta es la función que invertiremos usando Fourier posteriormente y que está íntimamente relacionada con  $\zeta(s)$ . Dicha relación es la que vamos a probar en los próximos párrafos:

$$(1.5.2) \quad \frac{\log(\zeta(s))}{s} = \int_1^{\infty} f(x)x^{-s-1} dx .$$

De nuevo Riemann deja muchos detalles al lector ya que, como veremos inmediatamente, probar esta identidad no es trivial. Hemos considerado el incluir la demostración de **1.5.2** en este capítulo y no en el siguiente – como hemos hecho con el resto – porque nos parece muy instructivo el razonamiento, además de ser una de las identidades fundamentales en el trabajo de Riemann. Empezamos nuestra demostración con la siguiente observación:

$$\sum_{p \leq x} 1 = F(x) , \quad \sum_{p^2 \leq x} 1 = F(\sqrt{x}) , \quad \sum_{p^3 \leq x} 1 = F(\sqrt[3]{x}) , \dots$$

siempre que  $x$  no sea un primo. Esto es porque al considerar aquellas potencias  $n$ -ésimas de primos que no excedan al número  $x$ , hemos de tener en cuenta sólo los primos que sean anteriores a  $\sqrt[n]{x}$ . La siguiente fórmula es ahora sencilla de demostrar, basta con desarrollar los sumandos:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{p^m} \frac{1}{m} \right) = F(x) + \frac{1}{2} F(\sqrt{x}) + \frac{1}{3} F(\sqrt[3]{x}) + \dots .$$

Para terminar la demostración de **1.5.2** usaremos la fórmula de sumación de Abel (**apéndice 1, sección A.3**) aplicada a  $\log(\zeta(s))$ .

$$\begin{aligned} \log(\zeta(s)) &= -\sum \log(1-p^{-s}) \\ &= \sum p^{-s} + \frac{1}{2} \sum p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum p^{-3s} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{m} \sum_p p^{-ms} \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m} p^{-ms} \right) .
\end{aligned}$$

La última identidad la escribimos de esta manera porque queremos aplicar la fórmula de Abel al sumatorio más interno. Observemos que estamos en las hipótesis de dicho teorema, pero en lugar de hacer la sumación con respecto a una variable muda representada por una  $n$  o cualquier otra letra, la hacemos con respecto a  $p^m$ , es decir, aplicamos la fórmula de sumación de Abel haciendo las siguientes sustituciones:

$$a_{p^m} = \frac{1}{m}, \quad A(x) = \sum_{p^m \leq x} a_{p^m} = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m}, \quad \varphi(x) = x^{-s} .$$

siendo el valor de  $a=0$  en el resto de los casos, es decir,  $a_n=0 \Leftrightarrow n \neq p^m$ . Consúltese el significado de esta notación y las correspondientes funciones en el **apéndice 1, sección A.3**.

Tenemos pues que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m} p^{-ms} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^{-s} \cdot \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m} \right) \\
&= - \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_1^x \left[ (-s) t^{-s-1} \cdot \sum_{p^m \leq t} \frac{1}{m} \right] dt \right) .
\end{aligned}$$

Al ser el primer sumando igual a cero cuando  $x \rightarrow \infty$  porque  $\Re(s) > 1$ , nos queda que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m} x^{-s} \right) = s \int_1^{\infty} \left[ t^{-1-s} \sum_{p^m \leq t} \frac{1}{m} \right] dt ,$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m} x^{-s} \right) \right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left( s \int_1^{\infty} \left[ t^{-1-s} \sum_{p^m \leq t} \frac{1}{m} \right] dt \right) \\ &= s \int_1^{\infty} \left[ t^{-1-s} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p^m \leq t} \frac{1}{m} \right] dt \\ &= s \int_1^{\infty} t^{-1-s} f(t) dt . \end{aligned}$$

Meter el sumatorio dentro de la integral se justifica por la convergencia absoluta de la integral, así que, resumiendo, hemos obtenido:

$$(1.5.3) \quad \log(\zeta(s)) = s \int_1^{\infty} f(x) x^{-s-1} dx$$

y hemos visto que la identidad tiene validez en el conjunto  $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 1\}$  , con lo que hemos terminado de demostrar **1.5.2**.



Riemann pasa ahora a estudiar la ecuación

$$(1.5.4) \quad g(s) = \int_0^{\infty} h(x) x^{-s} d \log(x) .$$

Ya que  $d \log(x) = dx/x$  , al cambiar la medida hemos de cambiar también los



límites de integración  $0 \rightarrow 1$  y  $\infty \rightarrow \infty$ . Lo que pretendemos es invertir la transformada manteniendo la parte real de  $s$  constante, obteniendo de esta forma algo del tipo

$$(1.5.5) \quad 2\pi i h(y) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} g(s) y^s ds .$$

Riemann no se preocupa en absoluto de si es posible aplicar la fórmula de inversión de Fourier en este caso o no. En concreto, una vez hecho el cambio de variable  $x=e^t$  que nos permite expresar nuestra ecuación **1.5.3** de forma más adecuada (más parecida a la forma habitual en la que solemos ver las transformadas de Fourier), observamos que la función  $f(e^t)e^{-at}$ ,  $a>1$ , que nos queda es muy buena desde el punto de vista de series de Fourier: saltos finitos, idénticamente cero si  $t<0$  y tiende a cero más rápido que cualquier polinomio cuando  $t \rightarrow \infty$ . No hace falta ningún teorema sofisticado de series de Fourier para ver que podemos aplicar el teorema de inversión.

La integral **1.5.5** representa, para un valor de  $y$  donde la función  $h(y)$  tenga un salto, el valor medio entre los dos valores de  $h(y)$  a ambos lados de la discontinuidad. Es por esto que definimos en su momento  $F(x)$  de forma que tuviese este salto. Queda justificada por tanto la siguiente identidad:

$$(1.5.6) \quad f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log(\zeta(s))}{s} y^s ds .$$

Observemos que en prácticamente todos los trabajos posteriores al de Riemann sobre la distribución de primos no se usa la función  $\log(\zeta(s))$ , sino su derivada. Esto nos llevaría a hacer un desarrollo similar al que hemos venido haciendo hasta aquí, pero con la diferencia de que debemos usar  $\psi(x)$  en lugar de la función  $f(x)$ , definida por la fórmula

$$(1.5.7) \quad \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) , \text{ con}$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^m \text{ con } m \in \mathbb{Z} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

siendo  $\Lambda(n)$  el **símbolo de von Mangoldt**. Esta función  $\psi(x)$  que acabamos de definir no tiene nada que ver con la que hemos introducido en la sección **1.3**. Desafortunadamente el uso de la misma letra para las dos funciones es estándar.

Ahora nos queda claro cuál es la relación entre la distribución de los números primos y la función zeta. Si regresamos a las secciones anteriores y repasamos las funciones que introdujimos allí – con Riemann – y las propiedades que enunciamos y demostramos, veremos por dónde pretende continuar: manipular la integral y hacer aparecer el logaritmo integral, de forma que obtengamos una serie en la que el primer término sea dicha función. Una vez hecho esto podremos estimar el orden del error que cometemos si estimamos el orden de la serie que nos queda al considerar todos los términos de dicha serie salvo el primero. Esto, al menos desde un punto de vista especulativo como es el de ahora, debiera darnos el orden correcto del error en la aproximación que Gauss propuso.

## 1.6 Manipulaciones en la Ecuación Integral.

En esta sección lo único que haremos será, a partir de una serie de manipulaciones más o menos complicadas, llegar a una ecuación que nos relacione la función  $f(x)$  con el logaritmo integral  $Li(x)$ . Por comodidad para el lector volvemos a escribir la ecuación **1.4.1**:

$$\xi(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) (s-1) \pi^{-s/2} \zeta(s) .$$

Usando lo que enunciamos y demostramos en las secciones **1.2**, **1.3** y **1.4**, despejando, sustituyendo y extrayendo logaritmos obtenemos la siguiente identidad:

$$(1.6.1) \quad \log(\zeta(s)) = \frac{s}{2} \log(\pi) - \log(s-1) - \log \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \\ + \sum_{\rho} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \log \xi(0) .$$

Obsérvese que si usásemos el cambio de variable que Riemann propone, el sumatorio que incluye a las raíces en la fórmula anterior sería:

$$\sum_{\alpha} \log\left(1 + \frac{(s-1/2)^2}{\alpha^2}\right) .$$

Volviendo sobre un comentario anterior (el párrafo que sigue a la fórmula **1.5.6**) fijémonos en la  $s$  que está dividiendo al logaritmo de la función zeta en dicha fórmula: ésta es la razón por la que no se utiliza **1.4.1**, sino la más cómoda **1.4.3**.

El problema que se nos presenta es que al sustituir **1.6.1** en **1.5.6** obtendremos expresiones para las integrales que no serán convergentes. Por ejemplo, si nos fijamos en el término  $(s/2) \log \pi$ , nos daría lugar a una integral del tipo

$$i^{-1} \int x^s ds = e^a \int e^{iu \log x} du$$

que no es convergente. Riemann propone resolver el problema de divergencia de las series integrando por partes, de forma que nos queda la siguiente cadena de identidades:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log(\zeta(s))}{s} y^s ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \left( \left[ \frac{\log \zeta(s)}{s} \frac{y^s}{\log(y)} \right]_{s=a-i\infty}^{s=a+i\infty} - \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[ \frac{y^s}{\log(y)} \frac{d \frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} \right] ds \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\log(y)} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[ \frac{d \frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} y^s \right] ds .
\end{aligned}$$

Para justificar la última igualdad sólo hay que hacer un estudio sencillo de los dos denominadores y los dos numeradores encerrados entre corchetes de la parte a evaluar entre  $s=a-i\infty$  y  $s=a+i\infty$ , ya que al ser  $a>1$  vemos que todo está acotado menos la  $s$  en el primer denominador. Tenemos por tanto que

$$(1.6.2) \quad f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\log(x)} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[ \frac{d \frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} x^s \right] ds .$$

Al sustituir 1.6.1 en esta última expresión cada uno de los sumandos tendrá la forma 1.6.3, donde la  $\beta$  es una variable que en cada caso sustuiremos convenientemente de forma que recuperemos los respectivos sumandos.

$$(1.6.3) \quad \pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log(x)} \int_{a+i\infty}^{a-i\infty} \left( \frac{d \left[ \frac{1}{s} \log \left( 1 - \frac{s}{\beta} \right) \right]}{ds} x^s \right) ds .$$

Uno de los cinco sumandos, el término  $\log \xi(0)$ , no tiene la forma 1.6.3. Operando normalmente obtenemos para este caso que su valor es

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log(x)} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{s^2} \log(\xi(0)) x^s ds = \log(\xi(0)) .$$

De hecho Riemann en su trabajo – referimos al lector al **apéndice 2** – comete un error un poco tonto, ya que  $\log \xi(0)$  no es el valor de este término si hacemos el cambio de variable que él propone. Si nos quedamos con la variable  $s$  entonces sería correcto, en cuyo caso habría que escribir  $-\log(2)$  que es el valor correspondiente; pero de hecho Riemann hace un cambio de variable y pasa a utilizar la función  $\xi(it+1/2)$  – véase la fórmula **1.4.1** – con lo que el término que él escribe –  $\log \xi(0)$  – debiera ser en realidad  $\log \xi(1/2)$  . El primero en percatarse de este error fue Genocchi estando Riemann aún vivo. Para un análisis más detallado invitamos al lector a la **sección 16** del primer capítulo de la referencia **[E]**.

El único término que no queda claro que tenga la forma **1.6.3** es el correspondiente a  $\log \Gamma(1+s/2)$  . A partir de la definición de la constante de Euler  $\gamma$  y de la fórmula de Weierstrass para la función  $\Gamma(s)$  es un ejercicio sencillo demostrar la igualdad **1.6.4** en la que vemos claramente que este término también cumple lo anteriormente enunciado.

$$(1.6.4) \quad -\log \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=1}^M \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2} \log(M) \right] .$$

Tenemos por tanto que

$$(1.6.5) \quad \frac{-d\left(\frac{1}{s} \log \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)\right)}{ds} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\left(\frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{s}{2n}\right)\right)}{ds} .$$

Recordamos que la constante  $\gamma$  de Euler viene definida por la fórmula

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log(N) \right] .$$

Lo que nos interesa ahora es poder calcular exactamente el valor de la expresión **1.6.3** y relacionarla con el logaritmo integral. Nosotros presentamos aquí directamente el resultado y referimos al lector a la **sección 2.2.4** para ver todos los detalles. La solución que allí encontramos depende del signo de la parte real de  $\beta$  : si ésta es negativa tenemos que

$$(1.6.6) \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log(x)} \int_{a+i\infty}^{a-i\infty} \left( \frac{d \left[ \frac{1}{s} \log \left( 1 - \frac{s}{\beta} \right) \right]}{ds} \right) x^s ds = \int_{\infty}^x \frac{x^{\beta-1}}{\log(x)} dx + C_1 ,$$

mientras que si es positiva nos queda

$$(1.6.7) \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log(x)} \int_{a+i\infty}^{a-i\infty} \left( \frac{d \left[ \frac{1}{s} \log \left( 1 - \frac{s}{\beta} \right) \right]}{ds} \right) x^s ds = \int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log(x)} dx + C_2 .$$

A continuación vamos a aplicar las fórmulas **1.6.6** y **1.6.7** a cada uno de los cinco sumandos de **1.6.1**. Posteriormente, juntando todas las expresiones, obtendremos una de las fórmulas centrales de todo nuestro desarrollo: **1.6.8**.

Ya hemos comentado anteriormente el valor para el término  $\log \xi(0)$  , que nos queda él mismo. El término  $\log(\pi) \cdot s/2$  desaparece al dividirlo por  $s$  y derivar, con lo que no contribuye a la suma: ya hemos terminado con los dos primeros.

En el caso de  $-\log(s-1)$  la  $\beta$  vale 1, con lo que nos queda el logaritmo integral. Es decir, el término principal en el desarrollo que estamos buscando.

$$Li(x) = \int_0^x \frac{dx}{\log(x)} .$$

La fórmula anterior debemos entenderla como valor principal de la integral en el sentido de Cauchy, que se define como:

$$Li(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log(t)} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\log(t)} \right) .$$

Pasamos ahora al término  $-\log \Gamma(1+s/2)$ . En este caso aplica la fórmula **1.6.6** con  $\beta = -2n$ . Sustituyendo en **1.6.5** nos queda una serie geométrica de primer término  $x^{-3}/\log(x)$  y razón  $x^{-2}$ . Operando y teniendo en cuenta el signo y los límites de integración obtenemos

$$\int_x^\infty \frac{dx}{x(x^2-1)\log(x)} .$$

El último término que nos queda es el que sale de la descomposición de  $\xi(s)$  como producto de sus raíces (las que tienen parte real positiva). En la mayor parte de lo que resta de trabajo usaremos la representación de las raíces sin hacer el cambio de variable propuesto por Riemann, es decir, la familia representada por rho. Este desarrollo puede hallarse en la referencia **[E]**; nosotros para facilitar el seguimiento del original seguiremos la propuesta de Riemann, por lo que en los párrafos que vienen a continuación usaremos las alfa, esto es, habiendo hecho el cambio de variable propuesto por Riemann.

Empezamos pues por descomponer la suma de cuadrados como suma por diferencia:

$$\sum_{\alpha} \log \left( 1 + \frac{(s-1/2)^2}{\alpha^2} \right) = \sum_{\alpha} \left( \log \left( 1 - \frac{s-1/2}{i\alpha} \right) + \log \left( 1 - \frac{s-1/2}{-i\alpha} \right) \right) .$$

Para poder aplicar las fórmulas **1.6.6** y **1.6.7** sólo tenemos que trasladar en media unidad la variable independiente  $s$ , es decir, hacer el cambio de variable  $(s-1/2) \rightarrow s$  con lo que las raíces también se trasladarán en media unidad. Aplicamos las fórmulas antes mencionadas con  $\beta=i\alpha-1/2$  en el primer caso y  $\beta=i\alpha+1/2$  en el segundo, de manera que la contribución de este último término será

$$-\sum_{\alpha} \left( Li(x^{1/2+i\alpha}) + Li(x^{1/2-i\alpha}) \right) .$$

Escribiéndolo en función de las rho la expresión es:

$$-\sum_{\Im(\rho)>0} \left[ Li(x^{\rho}) + Li(x^{1-\rho}) \right] .$$

Ya sólo nos resta ponerlo todo junto para obtener la expresión que buscábamos: la que nos relaciona la distribución de los primos y el logaritmo integral, o lo que es lo mismo, una fórmula que aproxima la distribución de los primos dentro de los enteros.

$$(1.6.8) \quad f(x) = Li(x) - \sum_{\Im(\rho)>0} \left[ Li(x^{\rho}) + Li(x^{1-\rho}) \right] + \int_x^{\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)\log(x)} + C .$$

Hemos comentado anteriormente que en su trabajo Riemann establece incorrectamente la constante  $C=\log \xi(0)$ , ya que siguiendo su notación tendría que haber escrito  $C=\log \xi(1/2)$ . En cualquier caso, y si nos quedamos con la definición para  $\xi(s)$  – en lugar de la que usa Riemann  $\xi(1/2+it)$  –, el valor exacto es  $\log(\xi(0))=-\log(2)$ .



## 1.7 Conclusión.

Hemos llegado por fin al punto en el que tenemos una expresión para la distribución de los números primos relacionando ésta con el logaritmo integral. Ahora podemos despejar  $F(x)$  y escribirla en función de  $f(x)$  usando la fórmula de inversión de Möbius **1.7.1**. Recordemos que Riemann representa por  $F(x)$  la cantidad de primos que hay hasta el número  $x$ : ya comentamos anteriormente que hoy en día se representa habitualmente usando para esta aplicación la notación  $\pi(x)$ .

La fórmula de inversión de Möbius dice que si  $f(x)$  es una función que viene expresada en la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F\left(\frac{x}{n}\right)$$

entonces

$$(1.7.1) \quad F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} f\left(\frac{x}{m}\right),$$

Una demostración de **1.7.1** puede encontrarse en el **Apéndice 1, sección A.4** en este mismo trabajo. También pueden consultarse las referencias **[P]** o la **sección 9 del capítulo 10 de [E]**.

En la fórmula **1.6.8** tenemos cuatro términos. El principal –  $Li(x)$  – crece a medida que aumenta la  $x$ . El último – la constante – permanece fija. El tercero – la integral – va disminuyendo a medida que la variable tiende a infinito. Nos queda únicamente el sumatorio en las raíces de parte imaginaria positiva, a las que nosotros representamos con la letra griega rho. Riemann llamó erróneamente a este término “periódico”, ya que de hecho su comportamiento es oscilatorio – no es sencillo de probar que oscila – a medida que aumentamos la variable  $x$ .

Riemann propone una nueva aproximación que pretende mejorar la propuesta

por Legendre y Gauss: nos quedamos sólo con el término principal en **1.6.8** – el logaritmo integral – e ignoramos el resto. Este término es el único que sustituimos en **1.7.1**, de manera que obtenemos

$$\begin{aligned}
 (1.7.2) \quad F(x) &= Li(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} Li\left(\sqrt[n]{x}\right) \\
 &= Li(x) - \frac{Li\left(\sqrt[2]{x}\right)}{2} - \frac{Li\left(\sqrt[3]{x}\right)}{3} - \frac{Li\left(\sqrt[5]{x}\right)}{5} + \frac{Li\left(\sqrt[6]{x}\right)}{6} - \frac{Li\left(\sqrt[7]{x}\right)}{7} + \dots
 \end{aligned}$$

Empíricamente **1.7.2** se demuestra como bastante mejor aproximación que la propuesta por Legendre y Gauss (es decir, aproximar por el logaritmo integral, que es lo que en el capítulo 3 denominaremos teorema de los números primos). La idea es que los términos oscilatorios que hemos ignorado – esperamos – se cancelarán unos con otros en mayor o menor medida. Mientras más cancelación haya, mejor aproximación será **1.7.2**.

Incluimos a continuación una tabla en la que podemos observar cómo la nueva aproximación mejora considerablemente la que teníamos de Legendre y Gauss. En media, en el rango que hemos considerado, la mejora es de un 75% aproximadamente. Esta tabla es un extracto de las que podemos encontrar en **[L]**, y que viene parcialmente reproducida en **[E]**.

$x$	<i>Error Riemann:</i> $R$	<i>Error Gauss: G</i>	<i>Reducción error</i> $(1- R /G)$
1 000 000	30	130	70%
2 000 000	-9	122	93%
3 000 000	0	155	100%
4 000 000	33	206	84%
5 000 000	-64	125	49%
6 000 000	24	228	89%

$x$	<i>Error Riemann:</i> $R$	<i>Error Gauss: G</i>	<i>Reducción error</i> $(1- R /G)$
7 000 000	-38	179	79%
8 000 000	-6	223	97%
9 000 000	-53	187	72%
10 000 000	88	339	74%

Hemos visto cómo Riemann mejora sustancialmente la propuesta de Gauss, ya que no sólo propone una mejor aproximación, sino que su desarrollo nos permite ver y entender de dónde sale el “mágico” logaritmo integral. No obstante Riemann fue bastante consciente de las limitaciones y problemas que su aproximación acarrea: pasamos a comentarlo en más detalle a continuación.

El resultado más importante en esta publicación de Riemann es la fórmula **1.6.8**. A partir de ella obtenemos la aproximación **1.7.2** y una fórmula analítica exacta **1.7.3** para el error que se comete al ignorar los términos oscilatorios:

$$(1.7.3) \quad F(x) - \sum_{n=1}^N \frac{\mu(n)}{n} Li\left(\sqrt[n]{x}\right) = \sum_{n=1}^N \sum_{\rho} Li\left(x^{\rho/n}\right) + \text{orden menor}$$

El problema principal es que Riemann no tiene estimación alguna del orden de los términos oscilatorios  $\sum \sum Li\left(x^{\rho/n}\right)$ . De hecho resulta bastante sorprendente que sean tan pequeños como parecen dar a entender los estudios empíricos llevados a cabo por Lehmer en [L] y otros autores. Se puede demostrar que la serie definida por la fórmula

$$\sum_{\rho} Li\left(x^{\rho}\right) - Li\left(x^{1-\rho}\right)$$

converge condicionalmente, por lo que lo pequeña o lo grande que sea la suma total dependerá de la cancelación de sumandos, es decir, del signo de cada

sumando y su contribución.

Muchos de los términos crecen en valor absoluto como

$$\left| \frac{x^\rho}{\log x^\rho} \right| = \frac{x^{\Re(\rho)}}{|\rho| \log x} ,$$

así que algunos de ellos crecen tan rápido como  $\sqrt{x}/\log x \approx 2 \operatorname{Li}(\sqrt{x})$  – que es mayor que  $\operatorname{Li}(\sqrt[3]{x})$  – de forma que esperamos que para un  $x$  suficientemente grande no sean despreciables frente a

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Li}(\sqrt{x}) .$$

Riemann se limita a decir en su trabajo que sería interesante estudiar el efecto de los términos oscilatorios en la distribución de los primos. En **[E]** se comenta que hasta donde sabe el autor (H. M. Edwards) nunca se ha llevado a cabo esta labor. Siguiendo a Edwards explicamos con un poco más de detalle en qué sentido propone Riemann estudiar las aportaciones de estos términos periódicos.

Si derivamos la expresión **1.6.8** para  $f(x)$  obtenemos

$$df = \left[ \frac{1}{\log x} - \sum_{\Re(\alpha) > 0} \frac{2 \cos(\alpha \log x)}{\sqrt{x} \log x} - \frac{1}{x(x^2 - 1) \log x} \right] dx ,$$

donde hemos aplicado  $x^{-1/2}(x^{i\alpha} + x^{-i\alpha}) = 2x^{-1/2} \cos(\alpha \log x)$  . Es evidente que estamos suponiendo la hipótesis de Riemann, ya que si no la expresión hubiese sido levemente diferente:  $2x^{\beta-1} \cos(\gamma \log x)$  , donde  $\beta$  es la parte real de la raíz correspondiente y  $\gamma$  su parte imaginaria.

Por la definición que hicimos de  $f$  , la medida  $df$  es  $dx$  multiplicada por la suma de la densidad de primos, la mitad de la densidad de las potencias cadradas de primos, la tercera parte de la densidad de las potencias cúbicas de

primos, etcétera. Vemos que  $1/\log(x)$  no debiéramos considerarlo como una aproximación a la densidad de primos menores que una cantidad dada – como sugirió Gauss – sino a la medida  $df$ , esto es, a la densidad de los primos más la mitad de la densidad de las potencias cuadradas de los primos, etcétera.

Dados dos números suficientemente grandes  $a < b$ , la aproximación que se obtiene al tener en cuenta un número finito de las raíces

$$f(b) - f(a) \approx \int_a^b \frac{dt}{\log t} - 2 \sum \left( \int_a^b \frac{\cos(\alpha \log t) dt}{\sqrt{t} \log t} \right)$$

debiera ser una aproximación bastante buena ya que por un lado podemos despreciar el término

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - 1) \log(x)},$$

y por otro las integrales para  $\alpha$  grandes oscilan muy rápidamente cuando  $x$  crece, así que deben hacer contribuciones pequeñas. Recordemos que  $\alpha = -i(\rho - 1/2)$ . Riemann propone en su trabajo investigar el número de  $\alpha$  que son significativos en la expresión anterior, es decir, la influencia de los términos oscilatorios en la distribución de los primos.

## 1.8 Comentarios Finales.

Aquí damos por concluído el análisis de la publicación de Riemann; hemos visto lo que hemos sido capaces de demostrar y, para terminar, vamos a ver qué queda por probar: algunos agujeros han sido rellenados por trabajos posteriores al de Riemann, otros permanecen abiertos a día de hoy.

En primer lugar está el hecho de que la ecuación  $\xi(i\alpha + 1/2) = 0$  tiene aproximadamente  $(T/2\pi) \log(T/2\pi)$  raíces reales en el rango  $0 < \alpha < T$ . Este hecho, si lo interpretamos como que el error relativo cometido tiende a cero

a medida que  $T$  crece, permanece hoy en día como problema abierto.

La factorización que hace Riemann de la función  $\xi(s)$  se basa en la estimación comentada en el párrafo anterior, con lo que tampoco podemos decir que esta cuestión se estableciera con total rigor. Hubo que esperar hasta 1893 para que Hadamard diera la primera demostración completa de la factorización, y hasta 1905 para que von Mangoldt probara la estimación para el número de raíces en el intervalo  $0 \leq \Im(\alpha) \leq T$ .

La cuestión original, es decir, la validez de la aproximación propuesta por Gauss usando el logaritmo integral

$$(1.8.1) \quad \pi(x) \approx \int \frac{dt}{\log t},$$

permanece completamente sin resolver en el trabajo de Riemann. El problema es equivalente a ver si

$$\sum_{\rho} \frac{Li(x^{\rho})}{Li(x)} \rightarrow 0.$$

No fue hasta 1896 que Hadamard y de la Vallée Poussin – de manera independiente – demostraron el teorema de los números primos, es decir, la fórmula **1.8.1**, utilizando métodos alternativos.

Esta pequeña crítica final en absoluto pretende desmerecer el extraordinario trabajo de Riemann, ya que en mi opinión su valor principal ha sido no tanto dar solución a problemas, sino plantear adecuadamente y orientar de forma correcta el estudio de la distribución de los números primos dentro de los enteros.

# Capítulo 2: Resultados Auxiliares

## 2.1 Introducción

En este capítulo hemos decidido incluir demostraciones rigurosas de todos aquellos razonamientos que han quedado pendientes de justificar en el **capítulo 1**, terminando de esta manera nuestro análisis detallado del trabajo original de Riemann. La exposición de cada uno de los resultados es inconexa en el sentido de que no podemos ir leyéndelos uno detrás de otro, sino que debiéramos acceder a ellos cuando lleguemos a la correspondiente referencia en el **capítulo 1**. Para tal fin, lo ideal sería hacer una primera lectura del **capítulo 1** obviando las referencias y, una vez hayamos asimilado las ideas generales, releer el capítulo siguiendo todas y cada una de ellas.

En la **sección 2.2** demostraremos una serie de propiedades de la función zeta de Riemann tales como que no es multivaluada, que se anula en los enteros pares negativos, encontraremos su único polo y calcularemos el residuo y probaremos que puede extenderse analíticamente a todo el plano complejo.

Riemann en su trabajo da dos demostraciones diferentes de la ecuación funcional, siendo la exposición excesivamente sintética y dejando muchos pasos intermedios sin justificar. En la **sección 2.3** podemos encontrar ambas demostraciones detalladas.

La **sección 2.4** la dedicamos a demostrar la fórmula **1.4.3** y a partir de la cual Riemann deduce importantes propiedades de su función zeta.

La penúltima sección de este capítulo, la **2.5**, estudia la densidad vertical de raíces de la ecuación  $\xi(s)=0$ , probando que sigue la ley

$$\frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right).$$

Cerramos el capítulo con la **sección 2.6** que bajo el título *cálculos intermedios* incluye todos los cálculos que quedaron pendientes en la **sección 1.6**.

## 2.2 Propiedades Básicas de la Función Zeta

En esta sección veremos que la función zeta admite una extensión a todo el plano complejo con un polo simple de residuo 1 en  $s=1$ . Demostraremos además que no es multivaluada y que se anula para valores enteros pares negativos.

Para llevar a cabo estas demostraciones Riemann usa la identidad **2.2.4** (ver un poco más adelante). Nuestro objetivo inmediato es demostrar dicha identidad y es a lo que dedicaremos los siguientes párrafos.

En su publicación Riemann propone considerar un camino de integración que tenga una forma como la dibujada en la **figura 2.2.1**. Lo realmente importante, como veremos en un momento, es que evitemos que nuestro camino de integración pase por los polos de la función  $(-x)^{s-1}$  – en realidad la función únicamente tiene un polo en el origen si  $s$  es entero no positivo – por lo que la gráfica es simplemente un ejemplo: debe venir de  $+\infty$ , ir a  $+\infty$  y rodear el origen de coordenadas.



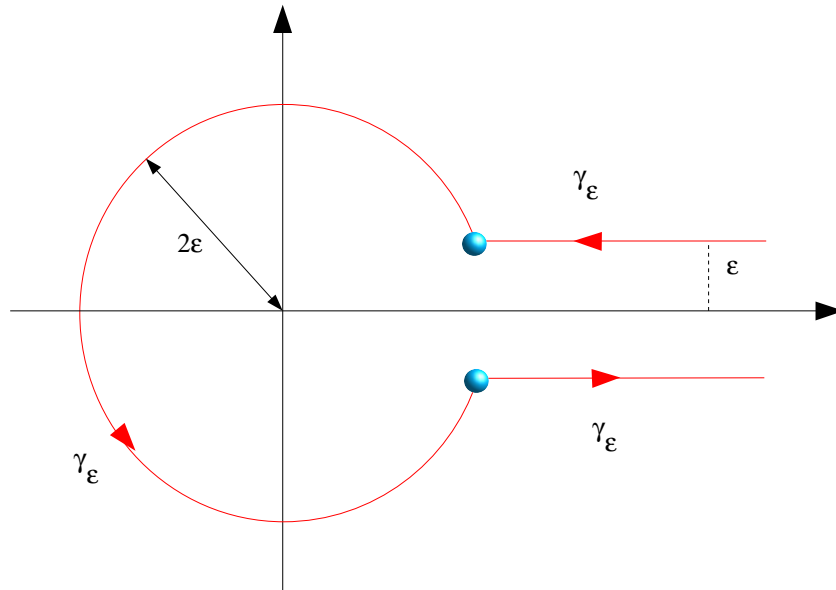


figura 2.2.1

Observemos que el valor de la integral **2.2.2** no depende del  $0 < \epsilon < 1$  que elijamos. Esto es cierto por el teorema de Cauchy: la integral valdrá cero mientras no contenga algún polo (véase la **sección A.6** en el **apéndice 1**). Siendo escrupulosos desde un punto de vista técnico tendremos que asegurarnos, para poder aplicar el teorema de Cauchy, de que la función tienda a cero rápidamente. Para esto valdría por ejemplo con que  $\Re(s) < 1$ . Traduciendo todo esto a nuestro caso tenemos que la integral será independiente del camino  $\gamma_\epsilon$  siempre que nuestro camino de integración  $\gamma_\epsilon$  no encierre ningún múltiplo de  $2\pi i$ . Acabamos de justificar la fórmula:

$$(2.2.2) \quad \int_{\gamma_\epsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\gamma_\epsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx \right)$$

Como sabemos por la definición de la función logaritmo, el conjunto de valores complejos  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \leq 0\}$  son singulares para dicha función. Como por definición tenemos que

$$(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)},$$

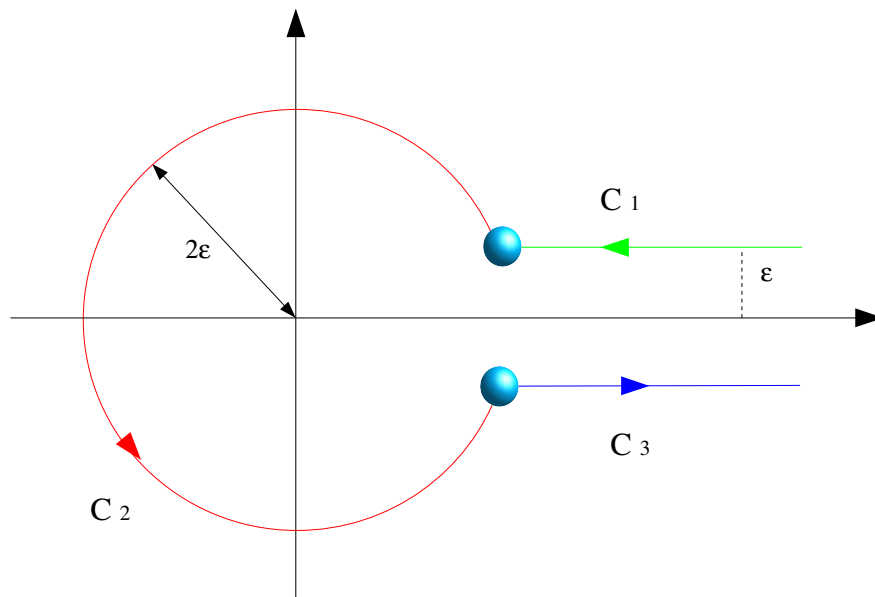
el logaritmo de  $-x$  lo determinamos de forma que sea real para valores negativos de la variable  $x$ . Esencialmente estamos haciendo el cambio de variable  $z \rightarrow -z$  con lo que  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq 0\}$  es ahora el conjunto de valores singulares, que es precisamente el que estamos rodeando con  $\gamma_\varepsilon$ . Hemos definido el argumento para el logaritmo  $\log(x) = \log|x| + i \cdot \text{Arg}(x)$  de la siguiente manera:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow -0} (\text{Arg}(x)) = -\pi, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\text{Arg}(x)) = +\pi.$$

Nuestro próximo paso será calcular el límite en la fórmula **2.2.2**, para lo que dividiremos nuestro camino  $\gamma_\varepsilon$  en tres trozos:  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  como se indica en la **figura 2.2.3**.

Pasamos ahora a calcular la integral para cada uno de los tres caminos. Sustituyendo la definición obtenemos la siguiente identidad:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{(s-1) \cdot \log(x)} \cdot e^{(s-1) \cdot i \cdot \text{Arg}(x)}}{e^x - 1} \cdot dx.$$



**figura 2.2.3**

### 1. En el camino $C_2$

El orden del denominador en la integral es  $e^x - 1 = O(x)$ , con lo que

$$\frac{|x|^{s-1}}{|e^x - 1|} = O(|x|^{\Re(s)-2}) = O(\epsilon^{\Re(s)-2}) .$$

De esta forma, si lo integramos a lo largo de  $\gamma_\epsilon$  podemos estimar la integral multiplicando por la longitud, de forma que nos quedará

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{|x|^{s-1}}{|e^x - 1|} = O(\epsilon^{\Re(s)-2} \cdot \epsilon) .$$

Como el  $\epsilon$  es arbitrario, haciéndolo tender a cero, terminamos.

### 2. En el camino $C_1$

$$\int_{\infty}^{2\epsilon} \frac{x^{s-1} \cdot e^{i \cdot s \cdot \text{Arg}(x)} \cdot e^{-i \cdot \text{Arg}(x)}}{e^x - 1} dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow +0} - \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \cdot e^{-is\pi} \cdot e^{i\pi} dx$$

que tras unas pocas manipulaciones algebraicas nos queda igual a

$$e^{-is\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx .$$

### 3. En el camino $C_3$

De manera completamente análoga:

$$\int_{2\epsilon}^{\infty} \frac{x^{s-1} \cdot e^{i \cdot s \cdot \text{Arg}(x)} \cdot e^{-i \cdot \text{Arg}(x)}}{e^x - 1} dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \cdot e^{is\pi} \cdot e^{-i\pi} dx .$$

Haciendo las correspondientes manipulaciones obtenemos una expresión muy similar:

$$-e^{is\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx .$$

En resumen, hemos dividido la integral de camino anterior en tres partes y hemos calculado la contribución de cada una de ellas. Lo escribimos todo junto en la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Y}_\epsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\mathcal{Y}_\epsilon} \frac{e^{(s-1) \cdot \log(x)} \cdot e^{(s-1) \cdot i \cdot \text{Arg}(x)}}{e^x - 1} dx \right) \\ &= e^{-is\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx - e^{is\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \\ &= -2i \text{sen}(s \cdot \pi) \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \\ &= -\Gamma(s) \zeta(s) 2i \text{sen}(s \pi) . \end{aligned}$$

Nos quedamos con el primer y último miembros de la cadena de identidades anterior para llegar a la misma fórmula que aparece en el trabajo de Riemann:

$$(2.2.4) \quad \int_{\mathcal{Y}_\epsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x - 1} dx = -\Gamma(s) \zeta(s) 2i \text{sen}(s \pi)$$

Esta identidad nos va a permitir, con un poco de esfuerzo adicional, justificar las afirmaciones que hace Riemann en su trabajo; son las tres que tenemos a continuación:

### 1. La fórmula 2.2.4 nos extiende la definición de $\zeta(s)$ a todo el plano complejo.

Esto se debe a que la integral del miembro izquierdo en 2.2.4 está definida para todo valor de la variable  $s$ ,  $s \neq 1$ , que se puede ver observando que la integral converge para todos los valores de la variable  $s$ , ya que una exponencial crece más rápidamente que una potencia y además la función que define es analítica (compleja) porque la convergencia es uniforme en dominios compactos.

Esta última afirmación podemos demostrarla usando el **teorema de Morera**: toda integral de una función dada que se anule sobre caminos cerrados dentro de un dominio define una nueva función analítica en ese dominio. Las únicas posibles excepciones ahora son los ceros de la función gamma; esto lo tratamos un poco más adelante.

Hemos seleccionado la rama de la función logaritmo de manera unívoca, con lo que  $\zeta(s)$  no es multivaluada.

### 2. La función $\zeta(s)$ tiene valor finito siempre que $s \neq 1$ .

Vamos a probar que efectivamente el valor de la función es finito salvo para  $s=1$ . Para probar esta afirmación haremos uso – junto con la ecuación 2.2.4 – de una de las ecuaciones funcionales que conocemos para la función gamma,  $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi / \text{sen}(s\pi)$  (véase la sección A.5 del Apéndice 1).

Para empezar representaremos el miembro izquierdo de 2.2.4 como la suma de los tres caminos  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , con lo que obtenemos la siguiente expresión para la función  $\zeta(s)$ :

$$(2.2.5) \quad \zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} I(s)$$

donde, como antes,

$$I(s) = \int_{\infty}^{2\epsilon} \frac{e^{s(\log(x)-i\pi)}}{e^x-1} \frac{dx}{x} + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{(-\omega)^s}{e^\omega-1} \frac{d\omega}{\omega} \\ + \int_{2\epsilon}^{\infty} \frac{e^{s(\log(x)+i\pi)}}{e^x-1} \frac{dx}{x} .$$

Por **2.2.5** vemos que el único punto conflictivo pasa a ser  $s=1$ , ya que la función zeta está perfectamente definida para el resto de los valores enteros de la variable, lo que nos indica que los polos de la función gamma se compensan con ceros que la integral debe tener en esos mismos puntos.

Cuando hacemos  $s \rightarrow 1$  las contribuciones del primer y del tercer camino se cancelan mutuamente, quedándonos sólo la contribución de la circunferencia.

Vamos a ver que la función zeta tiene en  $s=1$  un polo de orden uno. Para ello podríamos calcular directamente el valor del residuo, o bien observar que cuando  $s \rightarrow 1$  se tiene que  $\Gamma(s) \sim 1$ . Por otro lado desarrollando en serie de Taylor la función seno nos quedaría que

$$\text{sen}(s\pi) \sim -\pi(s-1) .$$

Además

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1} dx \sim \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{e^x-1} dx = 2\pi i ,$$

Así que finalmente nos queda que

$$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1} .$$

### 3. La función se anula para todos los enteros negativos pares.

Por último, al tener la función  $\Gamma(s)$  polos de orden uno en los enteros negativos se tiene que

$$\Gamma(s) \sim \frac{C}{s+2n} \text{ cuando } s \rightarrow -2n .$$

Como por Taylor

$$\text{sen}(\pi s) \sim \pi(s+2n)$$

vemos que

$$\lim_{s \rightarrow -2n} (\text{sen}(\pi s) \Gamma(s)) \neq 0 .$$

Deducimos pues que la función  $\zeta(s)$  debe anularse en los enteros pares negativos.

## 2.3 Ecuación Funcional

Esta sección está relacionada con la **1.3**, en la que hicimos una serie de comentarios sobre la ecuación funcional para la ecuación zeta, su relación con la ecuación de Poisson, pero dejamos en el aire las dos demostraciones detalladas que Riemann da en su trabajo.

Hay varias propuestas que pretenden explicar de dónde pudo sacar Riemann la inspiración para buscar (y encontrar) la ecuación funcional. Una de ellas la relaciona con la famosa fórmula de Euler que expresa el valor de la función zeta para los números pares, tanto positivos como negativos:

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n} (-1)^{n+1} B_{2n}}{2(2n)!}$$

donde los  $B_{2n}$  son los llamados números de Bernoulli, que vienen definidos como los coeficientes del desarrollo en serie de potencias

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!},$$

en particular tenemos que  $\zeta(2) = \pi^2/6$ . Históricamente era éste uno de los problemas que más intrigaban a su maestro **Nombre** Bernoulli – especialmente la forma cerrada para  $\zeta(2)$  que acabamos de escribir– y que L. Euler demostró satisfactoriamente. Desgraciadamente Bernoulli moría poco antes de que Euler pudiese comunicarle su resultado.

Es decir, aparte de la que se comenta sobre la fórmula de Poisson en la **sección 1.3**, Riemann habría intentado deducir la relación de Euler a partir de la ecuación integral **1.2.4** – o alguna de sus equivalentes –. Como hemos comentado anteriormente, Riemann dio dos demostraciones diferentes de esta ecuación, que pasamos a justificar en detalle.

En la primera demostración la idea es volver a usar el teorema de los residuos sobre el mismo camino que usamos en la **sección 2.2** (véase la **figura 2.2.1**), pero recorriéndolo en sentido contrario y “cerrando por fuera”. Llamaremos  $\gamma$  a nuestro camino de integración y lo descompondremos en las dos partes que podemos encontrar detalladas en la **figura 2.3.1** a continuación:  $\gamma = \gamma_R + \gamma_\epsilon$ , donde  $\gamma_R$  es la circunferencia exterior y  $\gamma_\epsilon$  será el recorrido interior.

Observemos que  $e^\omega = 1$  si y sólo si tenemos que la parte real de  $\omega$  es cero y la parte imaginaria  $\Im(\omega) = 2\pi in$  con  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Por lo tanto nuestros polos estarán dispuestos sobre el eje imaginario.



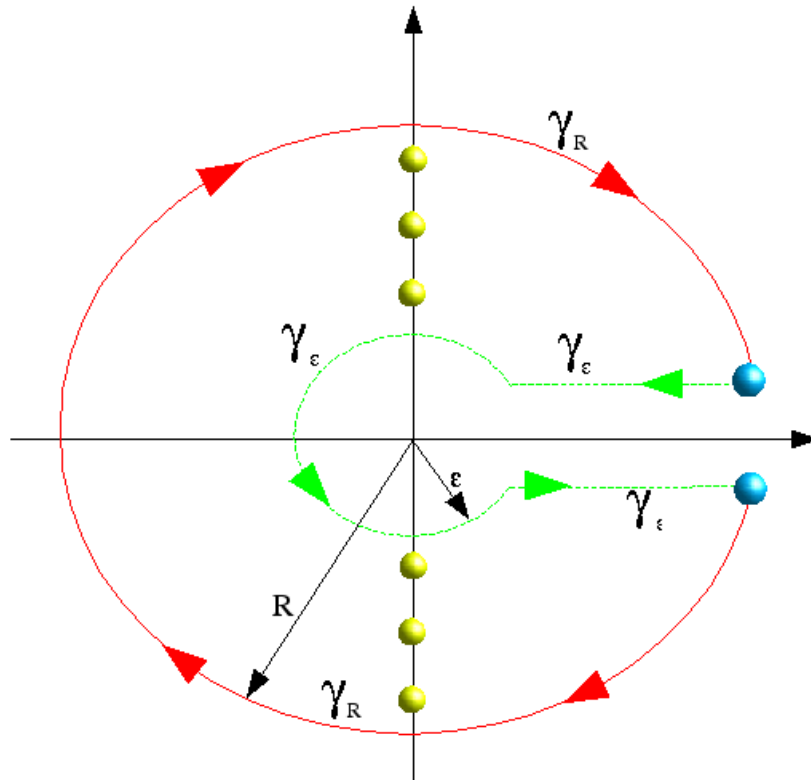


figura 2.3.1

Para  $\gamma_R$  tenemos la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned}
 & \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} (e^\omega - 1)^{-1} \frac{(-\omega)^s}{\omega} d\omega \\
 &= \sum_{\substack{k=-n, \dots, n \\ k \neq 0}} \text{Res} \left( (e^\omega - 1)^{-1} \frac{(-\omega)^s}{\omega}, \omega = 2\pi i k \right) \\
 &= -\sum_{k=1}^n \left( (2\pi i k)^{s-1} + (-2\pi i k)^{s-1} \right) .
 \end{aligned}$$

Como tenemos que

$$i^{s-1} + (-i)^{s-1} = \frac{1}{i} (e^{s \log(i)} - e^{s \log(-i)})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{i} \left( e^{\frac{s \cdot i \cdot \pi}{2}} - e^{\frac{-s \cdot i \cdot \pi}{2}} \right) \\
&= 2 \operatorname{sen} \left( \frac{s \pi}{2} \right) ,
\end{aligned}$$

finalmente nos queda la identidad

$$(2.3.2) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} (e^\omega - 1)^{-1} \frac{(-\omega)^s}{\omega} d\omega = 2(2\pi)^{s-1} \operatorname{sen} \left( \frac{s\pi}{2} \right) \sum_{k=1}^n k^{s-1} .$$

Acotamos a continuación la integral anterior. En primer lugar tenemos que en la circunferencia  $\gamma_R$  la función  $|e^s - 1|$  está acotada independientemente de  $R$ , y por otro lado sabemos que

$$\left| \frac{(-\omega)^s}{\omega} \right| \leq |\omega|^{\Re(s)-1} ,$$

así que podemos reemplazar  $\gamma_R$  por  $\gamma$  como camino de integración en **2.3.2**.

Sustituyendo todo esto en la **igualdad 2.2.4** obtenemos la fórmula de la ecuación funcional que, aunque en principio es válida sólo para  $\Re(s) < 0$ , por continuación analítica podemos extender para todo  $s \neq 1$ :

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \operatorname{sen} \left( \frac{s\pi}{2} \right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) .$$



Con esto finalizamos la primera de las demostraciones que encontramos en el trabajo de Riemann. La segunda de ellas, como ya comentamos en la sección **1.3**, se basa en el uso de la identidad de Poisson – o de su versión particular conocida como identidad de Jacobi –.

Revisar y hacer referencia explícita donde aparezca el comentario una vez añadido el apéndice 2. En su trabajo Riemann hace aparecer las gaussianas comentando que la simetría de la función zeta que él descubrió a partir de la ecuación funcional le llevó a considerar  $\Gamma(s/2)$  en lugar de  $\Gamma(s)$  en el término general de la función zeta.

En la región  $\Re(s) > 1$  tenemos la representación integral

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{\frac{s}{2}-1} \cdot dx = \left(\pi n^2\right)^{\frac{s}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} \cdot dt .$$

Como anteriormente, hacemos el sumatorio cambiamos el orden de integración con el de sumación que queda justificado por la convergencia absoluta en la región  $\Re(s) > 1$  .

Definiendo  $\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$  tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} (2.3.3) \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1} \omega(t) dt \\ &= \int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1} \omega(t) dt + \int_1^{\infty} t^{\frac{s}{2}-1} \omega(t) dt . \end{aligned}$$

Como hemos comentado anteriormente, Riemann necesitaba aplicar la fórmula de sumación de Poisson a una función de decaimiento rápido. La función elegida será la  $\theta(t)$  definida a continuación. El hecho de elegir la gaussiana no es absolutamente esencial, sino más bien por conveniencia ya que él conocía la identidad de Jacobi. Sin embargo podemos considerarla como una elección realmente inspirada ya que nos conduce a la teoría de formas modulares.

Consideramos la función:

$$\theta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} = 1 + 2\omega(t) .$$

La fórmula de sumación de Poisson aplicada a la función  $f(x) = e^{-\pi x^2 t}$ , que recordemos tiene por transformada

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{\xi^2}{t}} ,$$

nos produce la identidad:

$$\theta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{t}}$$

Expresado de otro modo:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right) = \theta(t) , \quad \omega\left(\frac{1}{t}\right) = \omega(t) \sqrt{t} + \frac{\sqrt{t}-1}{2} .$$

Procedemos por fin a evaluar la **identidad 2.3.3**.

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1} \omega(t) dt &= \int_1^{\infty} t^{-\frac{1+s}{2}} \omega(t) dt + \int_1^{\infty} t^{-1-\frac{s}{2}} \frac{\sqrt{t}-1}{2} dt \\ &= \int_1^{\infty} t^{-\frac{1+s}{2}} \omega(t) dt + \frac{1}{s(s-1)} . \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor obtenemos:

$$\begin{aligned}
 (2.3.4) \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left( t^{-\frac{1+s}{2}} + t^{-\frac{s}{2}-1} \right) \omega(t) dt \\
 &= \frac{1}{s(s-1)} + G(s) .
 \end{aligned}$$

Vemos que la **ecuación 2.3.4** es la ecuación funcional observando que la relación  $G(1-s)=G(s)$  produce:

$$\begin{aligned}
 \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) &= \frac{1}{s(s-1)} + G(s-1) \\
 &= \frac{1}{s(s-1)} + G(s) \\
 &= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) .
 \end{aligned}$$

Una de las consecuencias que podemos deducir directamente a partir de la ecuación funcional es que, aparte de los ceros triviales, los únicos ceros que tiene la función  $\zeta(s)$  están todos situados en la región  $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im(s) < 1\}$ , que es lo que se conoce como **banda crítica**.

Despejando de **2.3.4** vemos inmediatamente que el conjunto  $\{-2, -4, -6, \dots\}$  son ceros de  $\zeta(s)$ , ya que  $\{-1, -2, -3, \dots\}$  son polos de la función  $\Gamma(s)$ . Estos son los denominados **ceros triviales**.

## 2.4 Representación de la función $\xi(s)$

En la **sección 1.4** dejamos pendiente la demostración de la **identidad 1.4.3**, a partir de la que Riemann prueba una serie de importantes propiedades de la

función zeta. En esta sección vamos a ver dicha relación – la repetimos por comodidad:

$$(2.4.1) \quad \xi(t) = 4 \int_1^{\infty} \left\{ \frac{d[x^{3/2} \psi'(x)]}{dx} x^{-1/4} \cos\left(\frac{1}{2} t \log(x)\right) \right\} dx .$$

Expresamos de nuevo la **identidad 2.3.4**, pero en lugar de usar  $\omega(t)$  lo pondremos en función de  $\theta(t)$  :

$$(2.4.2) \quad \xi(s) = \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^{\infty} \theta(x) \left[ x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}} \right] \frac{dx}{x} .$$

Hacemos las siguientes manipulaciones:

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left\{ \theta(x) \left[ \frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2} \right] \right\} dx \\ &+ \frac{s(1-s)}{2} \int_1^{\infty} \theta'(x) \left[ \frac{x^{s/2}}{s/2} + \frac{x^{(1-s)/2}}{(1-s)/2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{s(1-s)}{2} \theta(1) \left[ \frac{2}{s} + \frac{2}{1-s} \right] \\ &+ \int_1^{\infty} \theta'(x) \left[ (1-s)x^{\frac{s}{2}} + sx^{\frac{(1-s)}{2}} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} + \theta(1) + \int_1^{\infty} x^{\frac{3}{2}} \theta'(x) \left[ (1-s)x^{\frac{s-1}{2}-1} + sx^{\frac{-s-1}{2}} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \theta(1) + \left[ x^{\frac{3}{2}} \theta'(x) \left( -2x^{\frac{s-1}{2}} - 2x^{-\frac{s}{2}} \right) \right]_{x=1}^{x=\infty} \\
&\quad - \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[ x^{\frac{3}{2}} \theta'(x) \right] \left( -2x^{\frac{s-1}{2}} - 2x^{-\frac{s}{2}} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} + \theta(1) - \theta'(1) [-2 - 2] \\
&\quad + \int_1^{\infty} \frac{d}{dx} \left[ x^{\frac{3}{2}} \theta'(x) \left( -2x^{\frac{s-1}{2}} - 2x^{-\frac{s}{2}} \right) \right] dx .
\end{aligned}$$

Si derivamos la identidad

$$2\theta(x) + 1 = \frac{2\theta\left(\frac{1}{x}\right) + 1}{\sqrt{x}}$$

obtenemos

$$(2.4.3) \quad \frac{1}{2} + \theta(1) + 4\theta'(1) = 0 .$$

Sustituyendo esta última igualdad en la serie de identidades anteriores tendremos finalmente

$$(2.4.4) \quad \xi(s) = 4 \int_1^{\infty} \left\{ \frac{d[x^{3/2}\theta'(x)]}{dx} x^{-1/4} \cosh\left(\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)\log(x)\right) \right\} dx$$

■

## 2.5 Número de Ceros y Factorización

En esta sección daremos la demostración rigurosa de los hechos que han quedado pendientes en la **sección 1.4**. En concreto vamos a probar que la densidad vertical de raíces de la ecuación  $\xi(s)=0$  sigue la ley  $\log(T/2\pi)$ .

La demostración que incluimos a continuación reproduce la que puede encontrarse en la referencia **[C1]**. Empezamos tomando un valor  $T$  de forma que la función  $\zeta(s)$ , equivalentemente  $\xi(s)$ , no tenga ningún cero en la línea  $\Im(s)=T$ . Observemos que no usamos el cambio de variable propuesto por Riemann (véase la **sección 1.4**).

A continuación consideramos el camino dibujado en la **figura 2.5.1**, que es un rectángulo de vértices  $2+iT$ ,  $-1+iT$ ,  $-1-iT$ ,  $2-iT$  y que está orientada en sentido positivo (antihorario). Llamaremos  $\Gamma_0$  a la parte de ese camino situada entre  $2$  y  $1/2+iT$ .

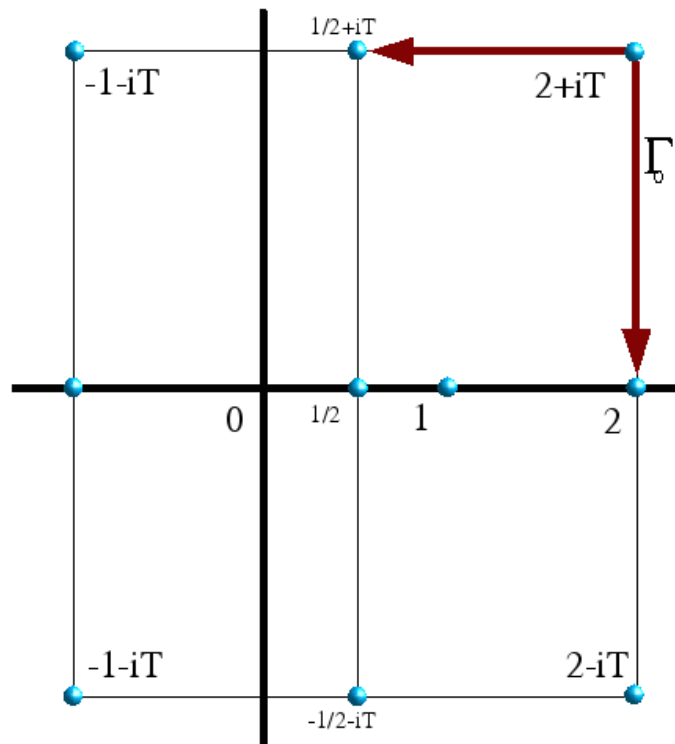




figura 2.5.1

El principio del argumento – véase **A.6.6** en el **apéndice 1** – nos permite escribir la siguiente serie de identidades:

$$2N(T) = \frac{1}{2\pi} \Im \left( \int_{\Gamma} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \right) = \frac{4}{2\pi} \Im \left( \int_{\Gamma_0} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \right) =$$

$$\frac{2}{\pi} \Im \left\{ \int_{\Gamma_0} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \log(\pi) + \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} + \frac{\zeta'\left(\frac{s}{2}\right)}{2\zeta\left(\frac{s}{2}\right)} \right) ds \right\} .$$

Como ya hicimos anteriormente (véase la **sección 2.2**) consideramos la rama de la función logaritmo correspondiente a tomar argumentos en  $(-\pi, \pi)$ . Evaluamos cada una de los sumandos de la última igualdad, de forma que tenemos en primer lugar:

$$\int_{\Gamma_0} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \log(\pi) \right) ds = \log\left(\frac{1}{2} + iT\right) + \log\left(-\frac{1}{2} + iT\right) - \log(2)$$

$$- \frac{1}{2} \log\left(-\frac{3\pi}{2} + i\pi T\right) .$$

En segundo lugar:

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\Gamma'(s/2)}{2\Gamma(s/2)} ds = \log \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2}\right) .$$

Los sumamos y extraemos la parte imaginaria.

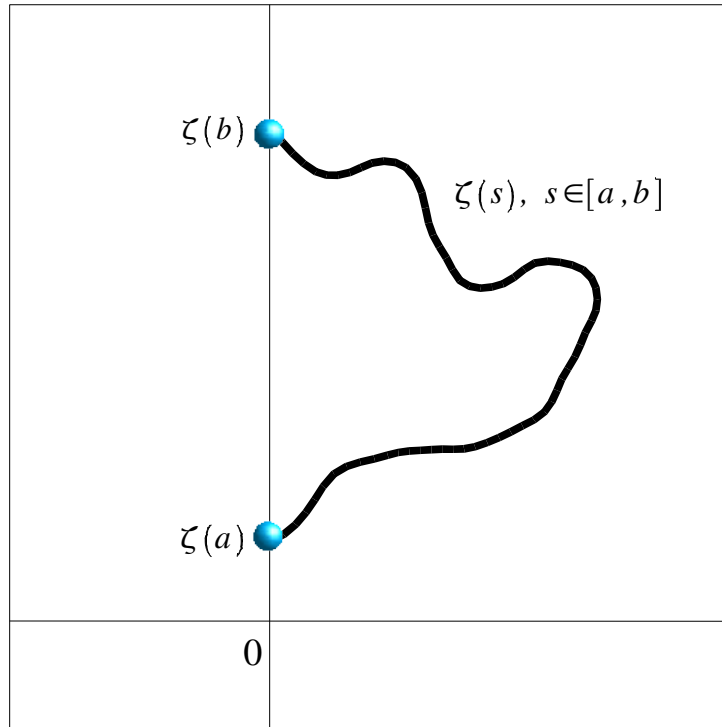
$$\begin{aligned} \Im \left\{ \int_{\Gamma_0} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \log(\pi) \right) ds + \int_{\Gamma_0} \frac{\Gamma'(s/2)}{2\Gamma(s/2)} ds \right\} &= \\ &= \frac{T}{\pi} \log \left( \frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{\pi} + O(\log T) . \end{aligned}$$

Para esta última identidad hemos usado la fórmula de Stirling: véase **A.5.8** en el **Apéndice 1**.

Acabaríamos la demostración si pudiésemos probar que

$$\Im \left\{ \int_{\Gamma_0} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right\} = O(\log T) .$$

Una forma de probar esto consiste en dividir el camino  $\Gamma_0$  en tantas partes como cambios de signo tenga  $\Re(\zeta(s))$  a lo largo de dicho camino. Si, por ejemplo,  $[a, b]$  es uno de esos trozos, tendremos que  $\Re(\zeta(a)) = \Re(\zeta(b)) = 0$  con lo que  $\zeta(s)$ ,  $s \in [a, b]$  excluyendo los puntos extremos, tendrá signo constante. Nos interesa el hecho de que, entonces, la curva  $\zeta(s)$ ,  $s \in [a, b]$ , estará contenida en uno de los semiplanos  $\Re(s) \geq 0$  ó  $\Re(s) \leq 0$ . Véase la **figura 2.5.2**.



**figura 2.5.2**

Tenemos que

$$\Im \left\{ \int_{[a,b]} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right\} = \Im (\log \zeta(b) - \log \zeta(a))$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } \Im(\zeta(a)), \Im(\zeta(b)) \text{ tienen igual signo} \\ 1, & \text{si } \Im(\zeta(a)), \Im(\zeta(b)) \text{ tienen distinto signo} \end{cases} .$$

si llamamos  $m$  al número de ceros que tiene  $\Re(\zeta(s))$  en el camino  $\Gamma_0$  obtenemos la siguiente acotación

$$\left| \Im \left\{ \int_{[a,b]} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right\} \right| \leq m+1 .$$

Ahora bien, como fácilmente se observa a partir de la definición de  $\zeta(s)$ , no

hay ningún cero en la línea vertical  $\{2+i\tau, -\infty < \tau < \infty\}$  (gracias al 2 vemos que la parte real es siempre mayor que cero).

Sólo nos falta por analizar el trozo de  $\Gamma_0$  comprendido entre los puntos  $2+iT$  y  $iT+1/2$ ; para ello usaremos la fórmula de Jensen (véase **Apéndice 1, Sección A.8**). Antes, no obstante, haremos una pequeña transformación que nos simplifique un poco la vida: definimos la función  $\rho(s)$  para que tenga los mismo ceros que  $\Re(\zeta(s))$  en el tramo que nos interesa, pero ésta los tendrá ubicados en el intervalo  $[1/2, 2]$ .

$$\rho(s) = \frac{1}{2} [\zeta(s+iT) + \zeta(s-iT)]$$

Aplicamos por fin la fórmula de Jensen con  $z_0=2$ ,  $R=7/4$ ,  $r=3/2$  y gracias a las estimaciones para la función zeta que podemos encontrar en la **sección 3.3** nos queda la desigualdad:

$$\left(\frac{7}{6}\right)^m \leq CT^{\frac{3}{4}}.$$

Tomando logaritmos obtenemos lo que buscábamos con lo que hemos finalizado la demostración de la **fórmula de Riemann-von Mangoldt**.



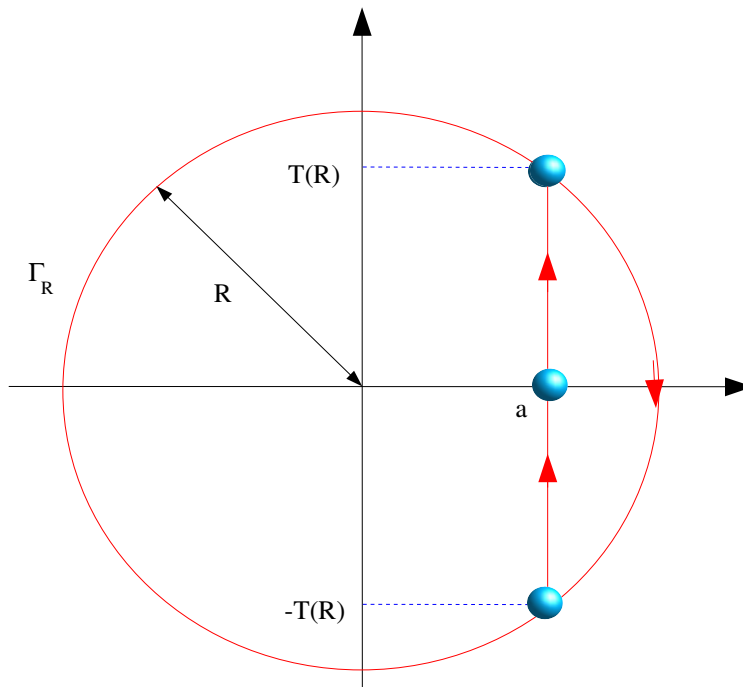
## 2.6 Cálculos Intermedios

En esta sección vamos a describir en detalle todos los cálculos necesarios para justificar las identidades **1.6.6** y **1.6.7**. Empezaremos por observar que

$$\frac{d \left[ \frac{1}{s} \log \left( 1 - \frac{s}{\beta} \right) \right]}{d\beta} = \frac{1}{(\beta-s)\beta}.$$

Si la parte real de  $s$  es menor que la de  $\beta$  la integral se anula porque el camino de integración que hemos elegido no contendría ningún polo del integrando (teorema de Cauchy, **Apéndice 1, sección A.6**). Véase la **figura 2.6.2**. Luego lo que hemos de hacer es hallar el valor cuando la parte real de  $s$  sea mayor que la de  $\beta$ , es decir,  $\Re(s) = a > \Re(\beta)$

$$(2.6.1) \quad -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s ds}{(\beta-s)s} = \frac{x^\beta}{\beta} .$$



**figura 2.6.2**

Aplicando el teorema de los residuos sólo hemos de probar que la parte correspondiente a  $\Gamma_R$  se anula cuando  $R \rightarrow \infty$  para ver que la integral en **2.6.1** se anula. Tenemos que

$$\int_{a-iT(R)}^{a+iT(R)} \frac{x^s}{(\beta-s)s} ds = - \int_{\Gamma_R} \frac{x^s}{(\beta-s)s} ds .$$

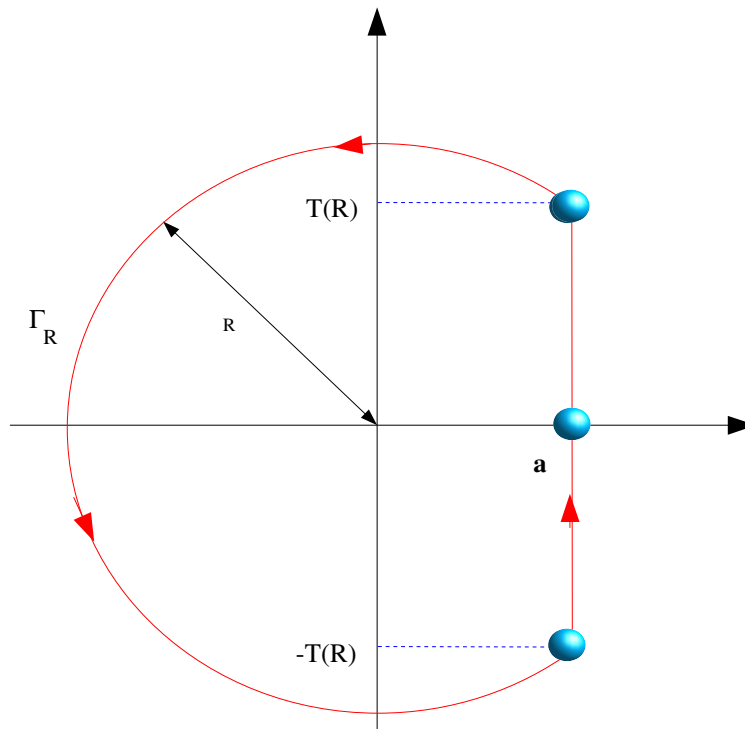
Ahora bien, en  $\Gamma_R$   $|y^s| = |y^\sigma| \leq y^a$  y

$$\left| \frac{1}{s+k} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma+k)^2 + \tau^2}} \leq \frac{1}{R}$$

Es evidente que  $T(R) \rightarrow \infty$  cuando  $R \rightarrow \infty$ . Por tanto nos queda que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{x^s}{(\beta-s)s} ds \right| \leq \frac{x^a}{R^{k+1}} (\text{longitud de } \Gamma_R) \leq \pi \frac{x^a}{R^k} .$$

Tomando límites vemos que la integral es nula. Pasamos ahora al caso que nos queda pendiente: cuando la parte real de  $s$  es mayor que la de  $\beta$



**figura 2.6.3**

Consideramos el recinto que se encuentra dibujado en la figura **2.6.3**. De forma análoga a como hemos procedido anteriormente obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s}{(\beta-s)s} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{x^s}{(\beta-s)s} ds \\ &= \operatorname{Res}\left(\frac{x^s}{(\beta-s)s}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{x^s}{(\beta-s)s}, \beta\right) = \frac{1}{\beta} + (-1)\frac{x^\beta}{s} \end{aligned}$$

que nos sale de poner, respectivamente,  $s=0$  en  $\frac{x^s}{\beta-s}$  y  $s=\beta$  en  $-\frac{x^s}{s}$ .

La demostración concluye observando que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{x^s}{(\beta-s)s} ds = 0$$

al igual que antes, y por idénticos motivos.



Como ya comentamos en la **sección 1.6**, queremos hacer aparecer el logaritmo integral, así que expresamos **2.6.1** como una integral. Si la parte real de  $\beta$  es negativa tenemos que

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s ds}{(\beta-s)\beta} = \int_{\infty}^x x^{\beta-1} dx$$

mientras que si es positiva

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^s ds}{(\beta-s)\beta} = \int_0^x x^{\beta-1} dx$$

Hemos considerado el caso en el que la parte real de  $\beta$  es negativa o positiva, excluyendo de esta manera la posibilidad de que la parte real sea igual a cero, de forma que no nos afectaría el hecho de que hubiese raíces en el eje imaginario.

Calculamos por fin el valor de **1.6.3**. Lo primero que haremos será integrar por partes y después aplicar la fórmula de derivación

$$\frac{d(x^{\beta-1})}{d\beta} = \log(x) \cdot x^{\beta-1} .$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log(x)} \int_{a+i\infty}^{a-i\infty} \left( \frac{d \left[ \frac{1}{s} \log \left( 1 - \frac{s}{\beta} \right) \right]}{ds} x^s \right) ds \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a+i\infty}^{a-i\infty} \frac{1}{s} \log \left( 1 - \frac{s}{\beta} \right) x^s ds \\ &= \int_{\infty}^x \frac{x^{\beta-1}}{\log(x)} dx + C \end{aligned}$$

en el caso de que la parte real de  $\beta$  sea negativa. Para el caso en el que la parte real de  $\beta$  sea positiva, esta última identidad se transforma en



$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log(x)} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left( \frac{d \left[ \frac{1}{s} \log \left( 1 - \frac{s}{\beta} \right) \right]}{ds} x^s \right) ds = \int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log(x)} dx + C .$$

■

# Capítulo 3: Teorema de los Números Primos

## 3.1 Introducción

Ya comentamos en la **sección 1.8** que no se puede considerar el trabajo de Riemann como una demostración del teorema de los números primos, ya que se dejan en él demasiadas lagunas. Todas ellas se han conseguido ir rellenando menos la hipótesis de Riemann que, como explicamos en esa sección, resulta central en el desarrollo que Riemann hace.

Los primeros en dar una demostración completa del teorema de los números primos de manera independiente— utilizando fundamentalmente variable compleja — fueron Hadamard y de la Vallée Poussin, en 1896.

Existen muchos enunciados equivalentes del teorema de los números primos, siendo una de las formas más comunes el presentarlo de la siguiente manera:

$$(3.1.1) \text{ si } x \rightarrow \infty, \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} .$$

Esta aproximación debe entenderse como que el error relativo de ambas expresiones tiende a cero a medida que la variable independiente tiende a infinito, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \right) = 0 .$$

En la literatura, sobre todo en la clásica, se prefiere el uso del logaritmo integral a **3.1.1**, que está más en la línea de Legendre, Gauss, Riemann, etc. Ambas expresiones son del mismo orden asintótico, por lo que desde el punto de vista del teorema de los números primos es indiferente el usar una u otra. En el **capítulo 3** de la referencia **[P2]** se encuentra una demostración sencilla de esta afirmación. De la Vallée Poussin probó una fórmula que se utiliza para demostrar

que efectivamente  $Li(x)$  es mejor aproximación en el sentido de que los errores relativos que se cometen son menores. Recomendamos el capítulo 5 en **[E]** para ampliar detalles.

Actualmente se conocen muchas demostraciones alternativas del teorema de los números primos. En este capítulo vamos a dar dos de ellas: la primera – **sección 3.2** – es relativamente corta y utiliza la fórmula de inversión de Fourier. La segunda – **sección 3.3** – es mucho más elaborada y usamos en ella únicamente variable compleja. Posteriormente, en la **sección 4.4**, comentaremos brevemente algunas otras demostraciones y resultados. Dentro de las diferentes pruebas que actualmente se conocen del teorema que ahora nos ocupa cabe destacar las que publicaron Selberg y Erdős en la que se usan únicamente métodos elementales (lo cual no quiere decir que la demostración sea elemental, sino más bien todo lo contrario).

## 3.2 Primera Demostración: Teoría de Fourier

En esta sección incluimos una demostración no detallada del teorema de los números primos usando análisis de Fourier. Nos centraremos en mostrar la idea general de la prueba más que en detallar minuciosamente cada uno de los pasos. Para todos aquellos detalles que dejamos al lector sugerimos la referencia bibliográfica **Dym-McKean**, donde se pueden encontrar demostraciones completas.

Para empezar vamos a establecer la identidad **3.2.1**. La demostración no es larga, aunque requiere un poco de trabajo. Puede consultarse la definición del símbolo de von Mangoldt en **1.5.7**.

$$\log(\zeta(s)) = -\sum_p \log(1 - p^{-s}),$$

de modo que derivando obtenemos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_p \frac{p^{-s}}{1-p^{-s}} \log(p)$$

luego

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log(p)}{p^s} + \frac{\log(p)}{(p^2)^s} + \frac{\log(p)}{(p^3)^s} + \dots ,$$

es decir,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} .$$

Aplicando ahora la fórmula de sumación de Abel – fórmula **A.3.2** del **Apéndice 1** – con  $a_n = \Lambda(n)$  y  $\varphi(x) = x^{-s}$  obtenemos

$$(3.2.1) \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \int_1^{\infty} \psi(x) x^{-s-1} dx .$$



Pasamos a explicar la idea de la demostración del teorema de los números primos usando análisis de Fourier. Lo primero es definir la función

$$(3.2.2) \quad f_{\delta}(b) = -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} ,$$

que evaluamos en  $s=1+\delta+ib$  , con  $0<\delta<1$  . Hacemos el cambio de variable  $x \rightarrow e^y$  en la integral en **3.2.1**, de forma que nos queda

$$f_{\delta}(b) = \int_0^{\infty} \left[ e^{-y} \psi(e^y) - 1 \right] e^{-\delta y} e^{-iby} dy .$$

Ahora multiplicamos ambos lados por  $e^{ibx} k(b)$  , siendo  $k \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$  (que

representa el conjunto de funciones de decaimiento rápido) e integramos en el conjunto de valores  $-\infty < b < \infty$ . Utilizando que la función  $\psi(x)$  está acotada por  $x \log(x)$  se justifica la identidad

$$\int e^{ibx} k(b) f_\delta(b) db = \int_0^\infty \hat{k}(x-y) \left[ e^{-y} \psi(e^y) - 1 \right] e^{-\delta y} dy .$$

No es difícil demostrar, aunque requiere algún esfuerzo, que el valor absoluto de la función  $|f_\delta(b)|$  es  $O(1+b^4)$  y que en el límite tiende a una función  $f$  cuando hacemos  $\delta \rightarrow 0$  (esta última afirmación la podemos encontrar demostrada en la sección siguiente). Si suponemos esto cierto tendremos entonces que

$$\int e^{ibx} k(b) f(b) db = \int_0^\infty \hat{k}(x-y) \left[ e^{-y} \psi(e^y) - 1 \right] dy$$

donde estamos suponiendo cierta uniformidad en el límite para poder introducirlo dentro de la integral. Sabiendo que la función  $k(x)f(x)$  es integrable el lema de Riemann-Lebesgue – véase **A.2** en el **Apéndice 1** – nos da la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_0^\infty \hat{k}(x-y) e^{-y} \psi(e^y) dy \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_0^\infty \hat{k}(x-y) dy \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_{-\infty}^\infty \hat{k}(-y) dy \right) . \end{aligned}$$

Nuestro próximo paso va a ser elegir la transformada de Fourier de  $k(x)$  como en la figura **3.2.3**, en la que los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  cumplen  $0 < \alpha < \beta < \infty$ . Dichos parámetros serán ajustados convenientemente un poco más adelante.

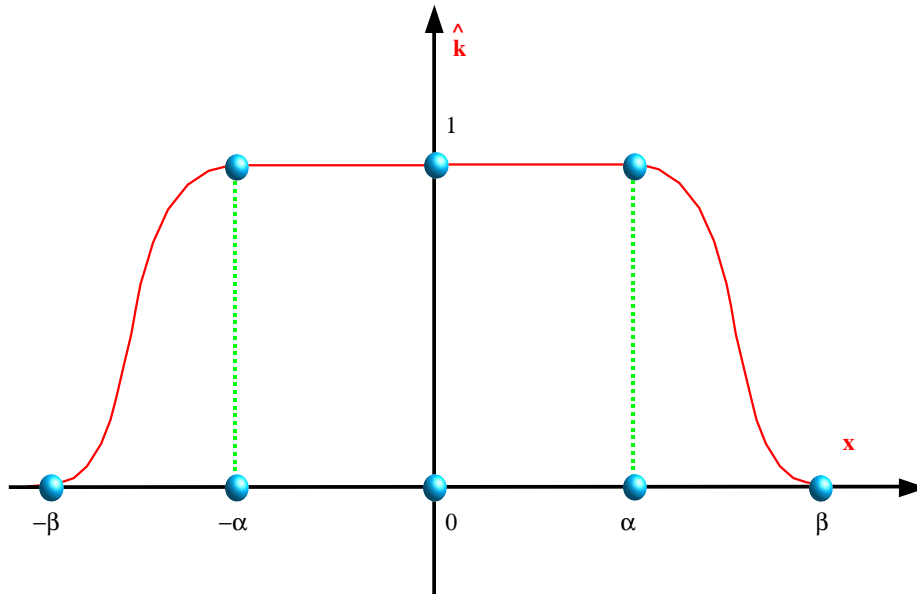


Figura 3.2.3

Tenemos por ahora que

$$\begin{aligned}
 2\alpha &< \int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}(-y) dy = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\infty} \hat{k}(x-y) e^{-y} \psi(e^y) dy \right) \\
 &\leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \left( \int_{x-\beta}^{x+\beta} e^{-y} \psi(e^y) dy \right) \\
 &\leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \left( e^{-x+\beta} \psi(e^{x+\beta}) 2\beta \right) \\
 &= \liminf_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\psi(x)}{x} e^{2\beta} 2\beta \right) .
 \end{aligned}$$

Procediendo de manera completamente análoga

$$2\beta > \int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}(-y) dy = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\infty} \hat{k}(x-y) e^{-y} \psi(e^y) dy \right)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left( \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} e^{-y} \psi(e^y) dy \right) \\
&\geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left( e^{-x-\alpha} \psi(e^{x-\alpha}) 2\alpha \right) \\
&\geq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\psi(x)}{x} e^{-2\alpha} 2\alpha \right) .
\end{aligned}$$

Poniéndolo todo junto finalmente nos queda

$$\frac{\alpha}{\beta} e^{-2\beta} \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\psi(x)}{x} \right) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\psi(x)}{x} \right) \leq \frac{\beta}{\alpha} e^{2\alpha} .$$

Terminamos la demostración haciendo primero  $\beta \rightarrow \alpha$  y luego  $\alpha \rightarrow 0$  .



### 3.3 Segunda Demostración: Variable Compleja

En esta sección damos una demostración completa – alternativa a la que encontramos en la sección anterior – del teorema de los números primos usando únicamente variable compleja. Tiene la ventaja de permitir atisbar la relación entre el término de error y los ceros de la función  $\zeta$  .

En primer lugar observamos que trabajar directamente con la función de distribución  $\pi(x)$  complica técnicamente los cálculos, por lo que se prefiere trabajar con la función  $\psi(x)$  , que ya definimos en **1.5.7**.

Lo que vamos a demostrar ahora es que nos da los mismo trabajar con una función que con la otra. En concreto, si hacemos tender la variable  $x$  a infinito, tendremos que

$$\psi(x) \sim x \text{ si y sólo si } \pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)},$$

con lo que demostrar el teorema de los números primos pasa a ser equivalente a probar que  $\psi(x) \sim x$ . A continuación vamos a hacer notar que para un primo fijo  $p$ , el número de enteros  $n \leq x$  de la forma  $p^i$  es el mayor entero  $j$  tal que  $j \log(p) \leq \log(x)$ , así que tenemos

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} j \log(p) \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log(x)}{\log(p)} \log(p) \leq \pi(x) \log(x).$$

Conseguir una cota inferior no es especialmente complicado: supongamos que se cumple que  $0 < \delta < 1$  y que  $y = x^{1-\delta}$ , entonces tendremos

$$\pi(x) = \pi(y) + \sum_{y < p \leq x} 1 \leq y + \frac{\psi(x)}{\log(y)} \leq x^{1-\delta} + \frac{1}{1-\delta} \frac{\psi(x)}{\log(x)}.$$

Partiendo de esto:

$$1 \leq \frac{y}{\pi(x)} + \frac{\psi(x)}{(1-\delta)\pi(x)\log(x)}$$

de donde

$$1 - \delta \leq \liminf \left( \frac{\psi(x)}{(1-\delta)\pi(x)\log(x)} \right).$$

Terminamos la demostración haciendo tender delta a cero en la siguiente cadena de desigualdades

$$1 - \delta \leq \liminf \left( \frac{\psi(x)}{\pi(x)\log(x)} \right) \leq \limsup \left( \frac{\psi(x)}{\pi(x)\log(x)} \right) \leq 1.$$

En los pasos anteriores hemos demostrado la primera de estas desigualdades, la otra se hace de forma completamente análoga, con lo que damos por finalizada la demostración.





De nuevo ocurre que trabajar directamente con  $\psi(x)$  nos daría algunos problemas de convergencia un poco delicados, así que volvemos a transformar el problema y consideraremos una función relacionada con ella bastante más regular. Para conseguir esta “regularización” trabajaremos con la función “en media”, es decir, usaremos su integral:

$$\psi_1(x) = \int_0^x \psi(t) dt .$$

Lo que vamos a demostrar a continuación es que si  $\psi_1(x) \sim x^2/2$  entonces se tiene que  $\psi(x) \sim x$ . Con esto reducimos la demostración del teorema de los números primos a probar la ley asintótica  $\psi_1(x) \sim x^2/2$ .

Nuestro objetivo inmediato es ver que efectivamente esto es así. Para ello supongamos que tenemos  $0 < \alpha < 1 < \beta$ , como  $\Lambda(n) \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la función  $\psi$  es creciente, así que para todo  $x > 0$  se cumple la desigualdad

$$\psi(x) \leq \frac{1}{\beta x - x} \int_x^{\beta x} \psi(t) dt = \frac{\psi_1(\beta x) - \psi_1(x)}{(\beta - 1)x} .$$

De forma que tenemos

$$(3.3.1) \quad \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\psi_1(\beta x) - \psi_1(x)}{(\beta - 1)x^2} .$$

Vamos a usar ahora el  $\alpha$  para encontrar una desigualdad similar a **3.3.1**, pero en el otro sentido. Para todo  $x > 0$ , de forma análoga, tenemos

$$(3.3.2) \quad \frac{\psi(x)}{x} \geq \frac{1}{x(x-\alpha x)} \int_{\alpha x}^x \psi(t) dt = \frac{\psi_1(x) - \psi_1(\alpha x)}{(1-\alpha)x^2} .$$

Si hacemos tender  $x$  a infinito:

$$(3.3.3) \quad \frac{\psi_1(\beta x) - \psi_1(x)}{(\beta-1)x^2} \sim \frac{1}{\beta-1} \left( \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\beta+1}{2} ,$$

$$(3.3.4) \quad \frac{\psi_1(x) - \psi_1(\alpha x)}{(1-\alpha)x^2} \sim \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \right) = \frac{\alpha+1}{2} .$$

Como  $\alpha$  y  $\beta$  son arbitrarios, combinando **3.3.2**, **3.3.3** y **3.3.4** obtenemos el resultado al hacer tender  $x \rightarrow \infty$  (y aproximando  $\alpha$  y  $\beta$  a uno) con lo que terminamos la demostración.



A partir de ahora – y en lo que resta de sección – vamos a orientarnos a demostrar el teorema de los números primos que a tenor de lo visto hasta el momento toma la forma:  $\psi_1(x) \sim x^2/2$  si  $x \rightarrow \infty$  .

Lo primero que nos va a interesar es establecer una relación entre  $\psi_1(x)$  y la función  $\zeta(s)$  de Riemann. Sea  $s = \sigma + it$  y supongamos además que  $x > 0$  y que  $c > 1$  , entonces

$$(3.3.5) \quad \psi_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1} \zeta'(s)}{s(s+1) \zeta(s)} ds$$

donde el camino de integración es la línea  $\sigma = c$  .

Uno de los pasos más importantes en la demostración de **3.3.5** es el resultado que obtuvimos en la **sección 2.6**, en concreto allí probamos la fórmula **2.6.1** que

vuelve a sernos de utilidad. La escribimos de nuevo adaptando la notación al caso que ahora nos ocupa:

$$(3.3.6) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

A continuación vamos a probar que efectivamente  $\psi_1(x) \sim x^2/2$ . Observemos que para todo  $x \geq 1$  tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \int_0^x \psi(t) dt = \int_1^x \psi(t) dt \\ &= \int_1^x \left( \sum_{n \leq t} \Lambda(n) \right) dt = \sum_{n \leq x} (x-n) \Lambda(n) . \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos intercambiado el orden entre sumatorio e integral. Observemos que lo mismo se deduce de manera trivial caso de que considerásemos  $0 < x < 1$ . Aplicando **3.3.6** para todo  $x > 0$  tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1(x)}{x} &= \sum_{n \leq x} \left( 1 - \frac{n}{x} \right) \Lambda(n) \\ &= \sum_{n \leq x} \left( 1 - \frac{1}{x/n} \right) \Lambda(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds \right] \end{aligned}$$

con  $c > 1$ . Al ser  $c > 1$  podemos intercambiar el orden entre sumatorio e integral ya que tenemos convergencia absoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left| \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds \right| \right] \leq x^c \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\Lambda(n)}{n^c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{c^2+x^2} \right] < \infty .$$

Acabamos por fin con la demostración de **3.3.5**:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1(x)}{x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[ \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \right) \right] ds \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left( \frac{x^s}{s(s+1)} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds . \end{aligned}$$



Estamos interesados en conseguir algunas estimaciones para el valor absoluto de la función zeta de Riemann en el entorno de la línea  $\sigma=1$  (en la propia línea y a su izquierda) para por fin demostrar el teorema de los números primos. Empezamos la recta final encontrando una expresión adecuada para la función zeta donde usamos la fórmula de Abel:

$$\begin{aligned} (3.3.7) \quad \sum_{n \leq x} n^{-s} &= s \int_1^x [t] t^{-s-1} dt + x[x]^{-s} \\ &= s \int_1^x t^{-s} dt - s \int_1^x [t] t^{-s-1} dt - [x] x^{-s} \end{aligned}$$

$$= \frac{s}{s-1} - \frac{s}{(s-1)x^{s-1}} - s \int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt + \frac{1}{x^{s-1}} - \frac{\{x\}}{x^s} .$$

Haciendo tender  $x$  a infinito obtenemos la fórmula que nos interesa:

$$(3.3.8) \quad \zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt .$$

Ya en su momento – véase la **sección 2.2** – estudiamos la extensión analítica de la función zeta de Riemann a todo el plano complejo. Observemos en cualquier caso que la ecuación **3.3.8** nos da una continuación analítica de la función zeta para  $s > 0$  .

Las estimaciones comentadas anteriormente que necesitamos nos dan el orden del inverso de la función zeta de Riemann y de los valores absolutos de la función y su derivada. Son las cuatro que pueden encontrarse a continuación.

Como siempre, sea  $s = \sigma + it$  y supongamos además que  $\sigma \geq 1$  y  $t \geq 2$  . Tenemos entonces que

$$1. \quad |\zeta(s)| = O(\log t) \quad (3.3.9)$$

$$2. \quad |\zeta'(s)| = O(\log^2 t) \quad (3.3.10)$$

3. Si además se tiene que  $0 < \delta < 1$  y  $\sigma \geq \delta$  entonces

$$|\zeta(s)| = O_{\delta}(t^{1-\delta}) \quad (3.3.11)$$

4. Existe además una constante positiva  $A$  tal que si hacemos  $t \rightarrow \infty$  tenemos, para  $\sigma \geq 1$  , que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O(\log^A(t)) \quad (3.3.12)$$

Empezamos demostrando la primera de ellas. Combinando **3.3.7** y **3.3.8** para  $\sigma \geq 0$ ,  $t \geq 1$  y  $x \geq 1$  tenemos que

$$\begin{aligned} (3.3.13) \quad \zeta(s) - \sum_{n \leq x} n^{-s} &= \frac{s}{(s-1)x^{s-1}} - \frac{1}{x^{s-1}} + \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt \\ &= \frac{1}{(s-1)x^{s-1}} + \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt . \end{aligned}$$

Deducimos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} (3.3.14) \quad |\zeta(s)| &\leq \sum_{n \leq x} n^{-\sigma} + \frac{1}{tx^{\sigma-1}} + \frac{1}{x^\sigma} + |s| \int_x^\infty \frac{du}{u^{\sigma+1}} \\ &\leq \sum_{n \leq x} n^{-\sigma} + \frac{1}{tx^{\sigma-1}} + \frac{1}{x^\sigma} + \left(1 + \frac{t}{\sigma}\right) \frac{1}{x^\sigma} \end{aligned}$$

Si tenemos que  $\sigma \geq 1$ ,  $t \geq 1$  y  $x \geq 1$  entonces

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n \leq x} n^{-\sigma} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1+t}{x} \leq (\log(x)+1) + 3 + \frac{t}{x} .$$

Si hacemos  $x=t$  obtenemos  $|\zeta(s)| \leq (\log t + 1) + 4 = O(\log t)$  que demuestra **3.3.9**. La demostración de **3.3.10** podemos encontrarla derivando la ecuación **3.3.13** con respecto a  $s$  y continuando de manera completamente análoga a lo que acabamos de hacer. Para demostrar **3.3.11**, y teniendo en cuenta que

$\sigma \geq \delta$  ,  $t \geq 1$  y  $x \geq 1$  , se sigue entonces de **3.3.14** que

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n \leq x} n^{-\delta} + \frac{1}{t x^{\delta-1}} + \left(2 + \frac{t}{\delta}\right) \frac{1}{x^{\delta}}$$

$$\leq \int_0^{[x]} \frac{du}{u^{\delta}} + \frac{x^{1-\delta}}{t} + \frac{3t}{\delta x^{\delta}} \leq \frac{x^{1-\delta}}{1-\delta} + x^{1-\delta} + \frac{3t}{\delta x^{\delta}} .$$

Escogiendo de nuevo  $x=t$  probamos la estimación **3.3.11** ya que nos quedaría

$$|\zeta(s)| \leq t^{\delta-1} \left( \frac{1}{1-\delta} + 1 + \frac{3}{\delta} \right) .$$

Sólo nos falta por demostrar **3.3.12**. Partimos de una desigualdad y una identidad igualmente simples de probar:

$$(3.3.15) \quad 3 + 4 \cos(\theta) + \cos 2\theta = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0 ,$$

$$\log(\zeta(s)) = \sum_p \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} p^{ms} \right) .$$

Obtenemos las siguientes igualdades:

$$(3.3.16) \quad \log |\zeta(\sigma + it)| = \Re \left( \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma - it} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma} \cos(t \log n)$$

donde el coeficiente viene definido de la siguiente manera:

$$c_n = \begin{cases} 1/m & \text{si } n = p^m, p \text{ primo y } m \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Combinando **3.3.15** y **3.3.16** nos quedará

$$\log |\zeta^3(\sigma) \zeta^4(\sigma + it) \zeta(\sigma + 2it)| = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^{-\sigma} (3 + 4 \cos(t \log n) + \cos(2t \log n)) \geq 0 .$$

Considerando sólo los  $\sigma > 1$  tendremos

$$(3.3.17) \quad |(\sigma - 1) \zeta(\sigma)|^3 \left| \frac{\zeta(\sigma + it)}{\sigma - 1} \right|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq \frac{1}{\sigma - 1} .$$

Gracias a esta última desigualdad podemos ver que la función zeta no tiene ningún cero en la línea vertical  $\sigma = 1$ . Si suponemos que el punto  $s = 1 + it$  es un cero de  $\zeta(s)$  entonces, por la analiticidad de la función zeta de Riemann en las líneas  $s = 1 + it$  y  $s = 1 + 2it$  – salvo el polo que tiene en el punto  $s = 1$  –, la parte izquierda de la ecuación **3.3.17** debe converger a un número finito según hacemos tender  $\sigma \rightarrow +1$ , contradiciendo el hecho de que la parte derecha de la misma ecuación divergería.

Continuamos demostrando la estimación **3.3.12**. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $1 \leq \sigma \leq 2$  ya que para  $\sigma \geq 2$  tendríamos

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| = \left| \prod_p (1 - p^{-s}) \right| \leq \prod_p (1 + p^{-s}) < \zeta(\sigma) \leq \zeta(2) .$$

Suponemos ahora que  $1 < \sigma \leq 2$  y  $t \geq 2$ . Usando la estimación **3.3.9** obtenemos

$$(\sigma - 1)^3 \leq |(\sigma - 1) \zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \leq A_1 |\zeta(\sigma + it)|^4 \log(2t)$$

siendo  $A_1$  una constante absoluta positiva. De  $\log(2t) \leq 2 \log(t)$  se sigue



$$(3.3.18) \quad |\zeta(\sigma + it)| \geq \frac{(\sigma - 1)^{3/4}}{A_2 \log^{1/4}(t)}$$

donde de nuevo  $A_2$  es una constante positiva absoluta. Obsérvese que esta última desigualdad sigue siendo válida incluso cuando, al tomar límites, se llega a tener  $\sigma = 1$ . Supongamos que tenemos  $1 < \eta < 2$  y que  $1 \leq \sigma \leq \eta$ ,  $t \geq 2$ , entonces usando **3.3.10** obtenemos

$$|\zeta(\sigma + it) - \zeta(\eta + it)| = \left| \int_{\sigma}^{\eta} \zeta'(x + it) dx \right| \leq A_3(\eta - 1) \log^2(t),$$

donde una vez más la constante  $A_3$  es positiva y absoluta. Si combinamos esto con **3.3.18** obtenemos las siguientes desigualdades

$$(3.3.19) \quad |\zeta(\sigma + it)| \geq |\zeta(\eta + it)| - A_3(\eta - 1) \log^2(t) \\ \geq \frac{(\eta - 1)^{3/4}}{A_2 \log^{1/4}(t)} - A_3(\eta - 1) \log^2(t).$$

Por otro lado, si  $\eta \leq \sigma \leq 2$  y  $t \geq 2$ , en vista de **3.3.18**, la desigualdad **3.3.19** sigue siendo válida. De aquí se sigue que **3.3.19** es cierta si consideramos las restricciones  $1 \leq \sigma \leq 2$ ,  $t \geq 2$  y  $1 < \eta < 2$ . Lo que haremos ahora será escoger un  $\eta$  tal que

$$\frac{(\eta - 1)^{3/4}}{A_2 \log^{1/4}(t)} = 2A_3(\eta - 1) \log^2(t),$$

o dicho de otra manera, siendo  $t > t_0$  de tal forma que  $\eta < 2$ , escogemos

$$\eta = 1 + (2A_2A_3)^{-4} \log^{-9}(t).$$

En este caso tendremos demostrada la estimación **3.3.12**, ya que

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq A_3(\eta - 1) \log^2 t = A_4 \log^{-7}(t).$$



Estamos por fin dispuestos para demostrar el teorema de los números primos. Gracias a la identidad **3.3.5** podemos expresar

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(s) x^{s-1} ds ,$$

con  $c > 1$  ,  $x > 0$  y  $G(s) = -\frac{1}{s(s+1)} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  .

Sabemos que, exceptuando el polo que tiene en el punto  $s=1$  ,  $G(s)$  es analítica para  $\sigma \geq 1$  y que para alguna constante absoluta positiva  $A$  tenemos la acotación

$$(3.3.20) \quad G(s) = O(|t|^{-2} \log^2(|t|) \log^A(|t|)) < |t|^{-3/2}$$

para todo  $|t| > t_0$  . Sea  $\epsilon > 0$  y consideremos el contorno que delimita el siguiente conjunto de segmentos (véase la figura **3.3.21**)

$$\left( \begin{array}{l} L_1 = [1-iU, 1-iT] \\ L_2 = [1-iT, \alpha-iT] \\ L_3 = [\alpha-iT, \alpha+iT] \\ L_4 = [\alpha+iT, 1+iT] \\ L_5 = [1+iT, 1+iU] \\ M_1 = [c-iU, 1-iU] \\ M_2 = [1+iU, c+iU] \end{array} \right)$$

Representados en la siguiente figura

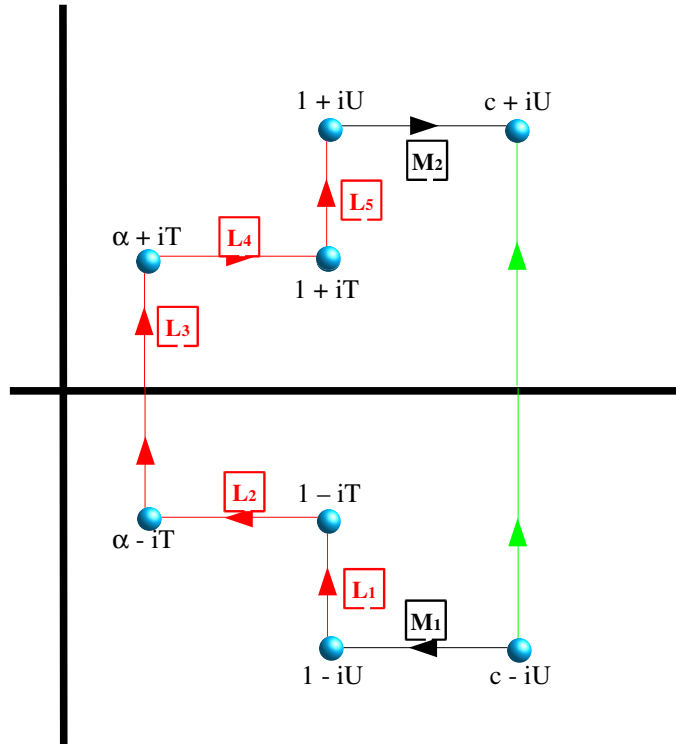


Figura 3.3.21

donde  $T = T(\epsilon) > \max\{t_0, 2\}$ ,  $\alpha = \alpha(T) = \alpha(\epsilon) \in (0, 1)$  y  $U$  los escogemos de forma que satisfagan las siguientes condiciones:

1.  $\int_T^\infty |G(1+it)| dt < \epsilon$ .
2. El rectángulo  $[\alpha, 1] \times [-T, T]$  no contiene ceros de la función zeta de Riemann. Esto es posible ya que la función no tiene ceros en la línea  $\sigma = 1$  y al ser analítica puede tener como mucho un número finito de ceros en la región  $[1/2, 1] \times [-T, T]$ .
3. Debe ser  $U > T$ .

Por el teorema de los residuos de Cauchy – **sección A.6** en el **apéndice 1** – tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iU}^{c+iU} G(s)x^{s-1} ds &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^2 \left( \int_{M_j} G(s)x^{s-1} ds \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^5 \left( \int_{L_j} G(s)x^{s-1} ds \right) \\ &+ \text{Res}(G(s)x^{s-1}, 1) \end{aligned}$$

donde para cada  $x > 1$  tenemos que  $\text{Res}(G(s)x^{s-1}, 1) = 1/2$ . Ahora vamos a ir acotando las integrales en cada uno de los segmentos.

$$\left| \int_{L_1} G(s)x^{s-1} ds \right| = \left| \int_{L_5} G(s)x^{s-1} ds \right| \leq \int_T^\infty |G(1+it)| dt < \epsilon ,$$

$$\left| \int_{L_2} G(s)x^{s-1} ds \right| = \left| \int_{L_4} G(s)x^{s-1} ds \right| \leq M \int_\alpha^1 x^{\sigma-1} d\sigma \leq \frac{M}{\log(x)} ,$$

$$\left| \int_{L_3} G(s)x^{s-1} ds \right| \leq 2TMx^{\alpha-1} ,$$

donde

$$M = M(\alpha, T) = M(\epsilon) = \sup_{L_2 \cup L_3 \cup L_4} |G(s)| .$$

Aplicando **3.3.20** a los segmentos  $M$  tenemos las siguientes acotaciones

$$\left| \int_{M_j} G(s)x^{s-1} ds \right| \leq \int_1^c |U|^{-3/2} |x^{s-1}| d|s| \leq \frac{x^{c-1}}{\log(x)} |U|^{-3/2} .$$

Combinando todas estas desigualdades obtenemos la siguiente acotación

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iU}^{c+iU} G(s) x^{s-1} ds - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\epsilon}{\pi} + \frac{M}{\pi \log(x)} + \frac{TM}{\pi x^{1-\alpha}} + \frac{x^{c-1} |U|^{-3/2}}{\pi \log(x)} .$$

Haciendo  $U \rightarrow \infty$  nos queda

$$\left| \frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\epsilon}{\pi} + \frac{M}{\pi \log(x)} + \frac{TM}{\pi x^{1-\alpha}} .$$

Y, finalmente, haciendo  $x \rightarrow \infty$  obtenemos la demostración del teorema de los números primos:

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} .$$



### 3.4 Demostraciones alternativas

Siguiendo el esquema de demostración que hemos usado en la sección anterior se pueden dar muchas pruebas alternativas del teorema de los números primos. A continuación vamos a describir por encima algunas de estas demostraciones, que pueden ser ampliadas en el **capítulo 10** de la referencia **[P3]**.

En todas ellas vamos a hacer uso del siguiente teorema tauberiano: supongamos que tenemos una función  $f$  definida en el intervalo  $[2, \infty)$ , donde  $f$  es monótona y no decreciente. Sean  $m$  y  $n$  números reales y supongamos además que  $n \neq 1$ . Si

$$\int_2^x f(t) dt \approx \frac{x^{n+1}}{\log^m(x)} , \quad x \rightarrow \infty ,$$

entonces

$$(3.4.1) \quad f(x) \approx \frac{(n+1)x^n}{\log^m(x)}, \quad x \rightarrow \infty .$$

Basándonos en el trabajo de Chebyshev y las funciones que él introdujo podríamos dar las cuatro demostraciones siguientes:

## 1. Chebyshev 1

Como

$$\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_0^{\infty} \psi(x) x^{-s-1} dx$$

entonces tenemos

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} x^s dx .$$

Siguiendo los pasos que hemos detallado en la **sección 3.2** llegamos a una expresión para  $\psi(x)$ , a partir de la que deducimos

$$(3.4.2) \quad \int_1^x \psi(t) dt \approx \frac{x^2}{2} .$$

Esta es la manera que hemos elegido para demostrar el teorema de los números primos. Podríamos concluir aplicando **3.4.1** a **3.4.2** para ver que  $\psi(x) \approx x$ .

Los primeros trabajos en los que se consiguió demostrar el teorema de los números primos usaron:

- Hadamard:  $\int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt$

- de la Vallée Poussin:  $\int_1^x \frac{\psi(t)}{t} dt$  .

Hay muchas pruebas similares a ésta que utilizan el mismo esquema de demostración y que pueden ser consultadas en el **capítulo 10** de la referencia **[P3]**, como ya se comentó previamente.

## 2. Riemann 1

Ya hemos comentado a lo largo del **capítulo 1** que Riemann no demostró el teorema de los números primos (tampoco Chebyshev), pero, al igual que éste último, tenía todos los ingredientes. Empezamos recordando que como

$$\frac{\log(\zeta(s))}{s} = \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{x(x^s - 1)} dx$$

tendremos

$$\frac{\log(\zeta(s))}{s} = \int_0^{\infty} f(x)x^{-s-1} dx$$

donde se define, al igual que en el **capítulo 1**,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\sqrt[n]{x})}{n}$$

siendo  $F(x)$  la cantidad de números primos que hay antes del número  $x$  . Entonces:

$$(3.4.4) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\log(\zeta(s))}{s} x^s dx .$$

La integral **3.4.4** es condicionalmente convergente, así que tendremos que estimarla cuidadosamente para deducir

$$f(x) \approx \frac{x}{\log(x)} .$$

De esta forma obtenemos

$$\pi(x) = f(x) + O(\sqrt{x} \log(x)) = \frac{x}{\log(x)} + o\left(\frac{x}{\log(x)}\right)$$

### 3. Riemann 2

Si definimos **REVISAR ESTA FÓRMULA. He de bajarme el artículo de Internet primero...**

$$J_1(x) = \int_1^x \frac{J(t)}{t} dt$$

entonces

$$J_1(x) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\log(\zeta(s))}{s^2} x^s dx .$$

El paso siguiente consiste en estimar la integral para obtener

$$J_1(x) \approx \frac{x}{\log(x)} .$$

Como anteriormente se aplica la identidad **3.4.1** que nos permite concluir que



$$\frac{J(x)}{x} \approx \frac{1}{\log(x)}$$

Este método para la demostración del teorema de los números primos es el que podemos encontrar en las referencias **[P3]** y **[G1]**.

#### 4. Littlewood

La prueba del teorema de los números primos que Littlewood nos muestra en **[L3]** la lleva a cabo estudiando la transformada inversa de Mellin de  $\Gamma(s)\zeta'(s)/\zeta(s)$ . Recordemos que la transformada de Mellin se define formalmente como

$$H(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} h(x) dx .$$

Littlewood relaciona esta transformada inversa con la función  $\psi$  de Chebyshev, que como ya vimos en la **sección 1.5** viene definida por la identidad

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) ,$$

siendo  $\Lambda(n)$  el símbolo de von Mangoldt.

He de bajarme el artículo de Petersen de Internet antes de comentar lo de el teorema tauberiano

# Capítulo 4: Distribución de Ceros para la Función Zeta de Riemann

## 4.1 Introducción

Este capítulo consta de cinco secciones en las que básicamente estudiaremos cómo se distribuyen los ceros de la función zeta de Riemann en la banda crítica.

La primera distribución que trataremos – **secciones 4.2 y 4.3** – es en horizontal, es decir, vamos a estudiar cuántos ceros hay en función de la altura a medida que nos acercamos o nos alejamos de la línea crítica. Lo que nos dice la hipótesis de Riemann a este respecto es que todas las raíces están en dicha línea, con lo que la densidad debiera ser cero fuera de ella.

En segundo lugar – **sección 4.4** – nos preocuparemos de la cantidad de ceros que la función zeta tiene en la línea crítica. El resultado que aquí demostramos, debido a Hardy, prueba que existen infinitas raíces en dicha línea, que es diferente de lo que hemos probado en la **sección 2.5**. El resultado de Hardy ha sido mejorado consecutivamente por Hardy y Littlewood, Selberg, Levinson y otros.

La última sección, **sección 4.5** titulada “hipótesis de los primos consecutivos”, nos muestra cómo el tener información sobre la distribución de los ceros de la función zeta nos permite conocer cómo se distribuyen los primos dentro de los enteros y el espaciado máximo que podemos esperar entre primos consecutivos.

Las demostraciones que se reproducen en este capítulo no son tan detalladas como las que pueden encontrarse en los anteriores. Se han dejado algunas lagunas que no revisten especial dificultad, dándose siempre indicaciones de

uno de los posibles caminos a seguir para finalizar las demostraciones. En cualquier caso, por si surge algún obstáculo que pudiese parecer insalvable, se proponen referencias en las que se detallan dichas pruebas.

Salpicaremos el presente capítulo con algunas notas históricas. El lector interesado en conocer más en profundidad el desarrollo de estos resultados puede consultar la bibliografía propuesta.

## 4.2 Estimaciones Horizontales de Densidad de Ceros

En esta sección vamos a estudiar la distribución horizontal de los ceros de la función zeta de Riemann  $\zeta(s)$  en la banda crítica, es decir, vamos a estimar el orden de la cantidad de ceros que la función zeta tiene según nos movemos en horizontal al acercarnos o alejarnos de la línea crítica.

Para simplificar la exposición e intentar evitar en la medida de lo posible que nos perdamos en los detalles técnicos y dejemos de ver las ideas que rigen las demostraciones, incluimos ciertos resultados que consideramos auxiliares en la **sección 4.3**, haciendo las referencias oportunas. Algo similar a lo que hicimos en el capítulo 1 y el 2.

Empezamos definiendo de forma precisa la función que nos dará la distribución de los ceros. Sea  $s = \sigma + it$ , entonces llamaremos  $N(\phi, T)$  al número de ceros de la función zeta con abcisa mayor o igual que  $\phi$  hasta altura  $T$ , es decir, el conjunto:

$$N(\phi, T) = \text{Card}\{s \mid \zeta(s) = 0 \text{ con } \phi \leq \sigma \leq 1 \text{ y } 0 < t \leq T\} .$$

Observar que como tenemos simetrías con respecto a la línea crítica y al eje de abcisas, el número total de ceros en la banda crítica será  $4N(\phi, T)$ .

Con lo que llevamos estudiado hasta el momento tenemos ya cierta información sobre esta distribución. Por un lado demostramos en los **capítulos 1 y 2** que la

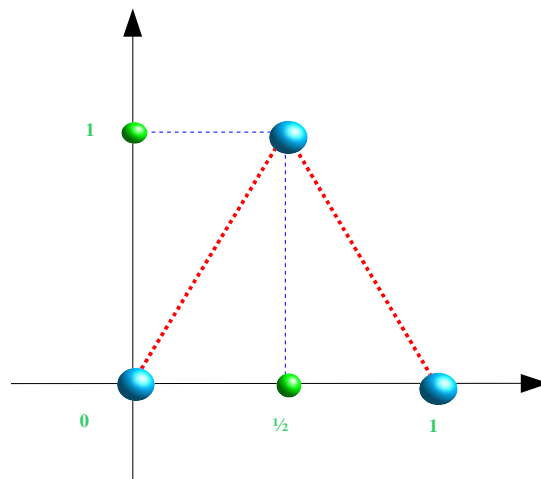
función  $N(1/2, T)$  en la banda crítica es como  $T \log(T)$  multiplicada por una constante mientras por otro, el teorema de los números primos nos viene a decir que  $N(1, T) = O(T)$ . Por último, si nos movemos al mundo de las conjeturas, lo que afirma la hipótesis de Riemann con esta notación es que  $N(\sigma, T) = O(T^{2-2\sigma})$  para todo valor de la variable  $\sigma$  mayor que  $1/2$ .

Esto último (nos referimos a la hipótesis de Riemann) se ha revelado como un problema realmente complejo, de forma que esperamos poder obtener estimaciones del tipo  $O(T^{f(\sigma)+\epsilon})$ , donde el  $\epsilon$  juega un papel parecido al logaritmo que multiplica a la  $T$  en la estimación  $T \log(T)$  comentada anteriormente.

La primera tentativa en esta dirección consiste en interpolar linealmente ambos valores de manera que  $f(1/2) = 1$  y  $f(1) = 0$ . Expresado en un fórmula:

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{2-2\sigma+\epsilon}\right) \quad \forall \epsilon > 0,$$

que es lo que se conoce como **hipótesis de densidad**. Dicha interpolación lineal puede verse en la **figura 4.2.1**, en la que la simetría con respecto a la línea vertical – la línea crítica – se explica por la ecuación funcional.



### figura 4.2.1

En la literatura siempre que se estudia la hipótesis de densidad se menciona, aunque sea de pasada, la **hipótesis de Lindelöf**: para todo  $\epsilon > 0$  se tiene que

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^\epsilon) .$$

En realidad Lindelöf conjeturó que  $|\zeta(s)|$  estaba acotada para todo  $\sigma > 1/2$  , cosa que no es cierta. Se puede demostrar que la hipótesis de Riemann implica a la de Lindelöf y ésta a la de densidad, de forma que tenemos la siguiente cadena:

$$HR \Rightarrow HL \Rightarrow HD .$$

Con la hipótesis de densidad estamos diciendo que, caso de no cumplirse la hipótesis de Riemann, el número de ceros aumenta en las cercanías de la línea crítica. La importancia y lo sorprendente de esta conjetura – de la hipótesis de densidad – es que, tratando de estimar la distancia que hay entre primos consecutivos, parece tener las mismas implicaciones que la hipótesis de Riemann, es decir, parecen ser igualmente fuertes.

Las estimaciones relativas a  $N(\sigma, T)$  se obtienen habitualmente a partir de valores en media de la función zeta. Los progresos en esta dirección – especialmente para  $\sigma$  cercanas a  $1/2$  – se topan con la gran dificultad que supone estimar los momentos de la función zeta en la línea crítica y sus cercanías.

Después de esta pequeña introducción vamos a centrar nuestra atención en enunciar y demostrar resultados concretos. Desafortunadamente hoy por hoy no se sabe demostrar la hipótesis de densidad, pero sí algunos resultados que van en esta misma dirección, aunque son algo más débiles, y que se conocen genéricamente como **teoremas de densidad**. A partir de ahora, y en lo que resta de sección, vamos a demostrar dos de estos teoremas: el primero de ellos

es un poco débil en cuanto a la conclusión, pero nos servirá para probar el segundo, que es bastante más fuerte.

El primer teorema de densidad que vamos a probar dice que que dado un  $\sigma$  fijo comprendido en el intervalo  $1/2 < \sigma < 1$ , se cumple la estimación

$$(4.2.2) \quad N(\sigma, T) = O(T) .$$

Para demostrar esto partimos de la identidad

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma})$$

a la que hemos asignado el identificador **4.3.1** en la **sección 4.3**. En dicha sección podemos encontrar una indicación de cómo probarla. A partir de ella se puede demostrar la igualdad

$$\int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt = \zeta(2\sigma)T + O(T^{2-2\sigma} \log(T))$$

que es una estimación del momento de orden dos de la función zeta de Riemann, a la que en la **sección 4.3** hemos denominado **4.3.4**. De nuevo referimos al lector a dicha sección para ver una demostración completa.

Nos queda poco para terminar la prueba de **4.2.2**. Para ello usaremos la desigualdad de Jensen (véase la **sección A.8** en el **apéndice 1**), que nos da la cota:

$$(4.2.3) \quad \int_0^T \log |\zeta(\sigma + it)| dt = \frac{T}{2} \left( \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt \right) \\ = O(T \log(T)) .$$

Usamos **4.3.4** en la última identidad de **4.2.3**. Combinando esta estimación con **4.3.8** deducimos que

$$\int_{\sigma_0}^1 N(\sigma, T) d\sigma = O(T) .$$

Para concluir la prueba elegimos  $\sigma_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \sigma_0 - \frac{1}{2} \right)$ , de forma que

$$\begin{aligned} (4.2.4) \quad N(\sigma_0, T) &\leq \frac{1}{\sigma_0 - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} N(\sigma, T) d\sigma . \\ &\leq \left( \frac{2}{\sigma_0 - 1/2} \right) \int_{\sigma_1}^1 N(\sigma, T) d\sigma = O(T) . \end{aligned}$$

■

Esta primera estimación está muy lejos de la hipótesis de densidad, como habíamos comentado anteriormente. Su interés radica en que usando las mismas ideas que aparecen en su demostración vamos a mejorar este resultado considerablemente, que es a lo que nos vamos a dedicar en lo que nos resta de sección.

Para llegar a esta mejora procederemos de la siguiente manera: en lugar de relacionar  $N(\sigma, T)$  con la función  $\zeta(s)$  directamente, multiplicaremos a ésta por otra función  $M_x(s)$  que nos “suavice” su comportamiento “errático”, manteniendo los ceros intactos. Para ello partimos de la inversa de la identidad de Euler **1.2.1**, es decir, de

$$\zeta(s) = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} ,$$

donde los coeficientes  $\mu(n)$  vienen definidos por la fórmula

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \\ 0 & \text{si } \exists \text{ tal que } p^2 | n \end{cases}$$

con  $\mu(1)=1$ . Nosotros vamos a elegir esta función “estupenda” regularizadora como la que define las sumas parciales de la anterior:

$$M_X(s) = \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

de forma que cuando  $X$  sea grande esperamos que el producto de ambas esté cerca de 1. A partir de estas funciones podemos definir una tercera, a la que denominaremos  $f_X(s)$ , que actuará como un “contador” de ceros de la función  $\zeta(s)$  en el dominio que consideremos. La definición es

$$f_X(s) = 1 - \zeta(s) M_X(s).$$

Intuitivamente podemos pensar que  $f_X(s)$  estará cerca de cero normalmente, excepto para los ceros de la función  $\zeta(s)$  que estará cerca de uno. Nuestro objetivo es comparar dicha función con  $N(\sigma, T)$  para lo que recomendamos revisar brevemente las fórmulas **4.3.6** y **4.3.7** enunciadas y demostradas en la próxima sección. En concreto vamos a demostrar que para  $1/2 \leq \sigma \leq 1$  fijo tenemos

$$(4.2.5) \quad N(\sigma, T) = O\left(T^{4\sigma(1-\sigma)+\epsilon}\right).$$

En la **figura 4.2.6** mostramos en azul la distribución correspondiente a la hipótesis de densidad y en verde la de **4.2.5**.



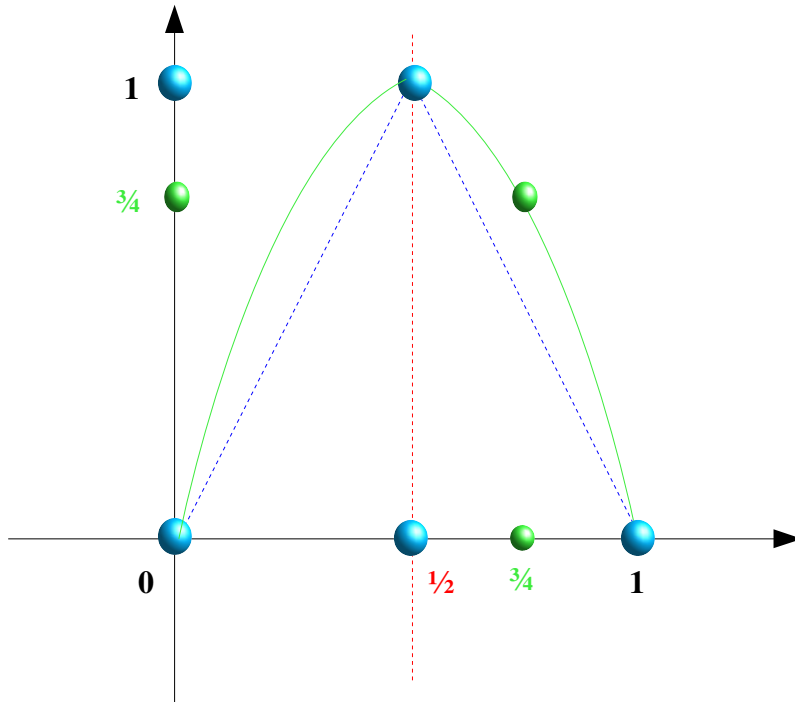


figura 4.2.6

Para probar **4.2.5** lo primero que hemos de ver es que

$$(4.2.7) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq T} \frac{1}{n^s} + O(T^{-\sigma}) ,$$

cuya demostración puede consultarse en la argumentación inmediatamente posterior a la fórmula **4.3.4**.

A partir de **4.2.7** y aplicando **4.3.7** obtenemos una estimación del orden para la función que a nosotros nos interesa, es decir,

$$f_x(s) = \sum_n \frac{b_n}{n^s} + O(T^{-\sigma} |M_x(s)|)$$

$$= \sum_n \frac{b_n}{n^\sigma} + O(T^{-\sigma} X^{1-\sigma}) ,$$

con  $b_n = 0$  si  $n \leq X$  ó  $n > XT$  , y  $b_n \leq |d(n)|$  para cualquier  $n$  , donde hemos representado por  $d(n)$  a la función divisor.

A partir de lo visto hasta ahora, tenemos la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned}
 (4.2.8) \quad & \int_{\frac{T}{2}}^T \left| \sum_n \frac{b_n}{n^\sigma} \right|^2 dt = \frac{T}{2} \sum_{X < n \leq XT} \left[ \frac{|b_n|^2}{n^{2\sigma}} \right] \\
 & + \sum_{n \neq m} \left[ \frac{b_n b_m}{n^\sigma m^\sigma} \int_{\frac{T}{2}}^T \left( \frac{m}{n} \right)^{it} dt \right] \\
 & = O \left( T \sum_{n > X} \frac{1}{n^{2\sigma-\epsilon}} \right) \\
 & + O \left( \sum_{0 < n < m \leq XT} \frac{1}{n^{\sigma-\epsilon} m^{\sigma-\epsilon} \log(m/n)} \right) \\
 & = O(TX^{1-2\sigma+\epsilon}) + O((TX)^{2-2\sigma+\epsilon}) .
 \end{aligned}$$

Para terminar la demostración nos queda básicamente por probar **4.2.9** que es lo que hemos usado para la última igualdad en la cadena anterior de identidades.

$$(4.2.9) \quad \sum_{0 < n < m \leq T} \left( \frac{1}{n^\sigma m^\sigma \log(m/n)} \right) = O\left(T^{2-2\sigma \log(T)}\right) .$$

Dividimos la suma en dos trozos: el primero de ellos, al que llamaremos  $S_1$ , será aquél en el que los términos cumplan  $n < m/2$ ; en este caso, para el logaritmo, se cumplirá  $\log(m/n) > C$  y, por tanto,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{0 < n \leq T} \left[ \sum_{2n < m \leq T} \frac{1}{n^\sigma m^\sigma \log(m/n)} \right] \\ &= O\left(\sum_{0 < n \leq T} n^{-\sigma}\right)^2 = O\left(T^{2-2\sigma}\right) . \end{aligned}$$

En el segundo,  $S_2$ , escribimos  $n = m - k$ , con lo que

$$\log\left(\frac{m}{n}\right) = -\log\left(\frac{k}{m-k}\right) > \frac{k}{m}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{0 < m \leq T} \left[ \sum_{T \geq m \geq m/2} \frac{1}{n^\sigma m^\sigma \log(m/n)} \right] \\ &< \sum_{0 < m \leq T} \left[ \sum_{k \geq m/2} \frac{1}{(m-k)^\sigma m^{\sigma-1} k} \right] \\ &= O\left(\sum_{0 < m \leq T} m^{1-2\sigma} \sum_{k \leq m/2} \frac{1}{k}\right) \\ &= O\left(T^{2-2\sigma} \log(T)\right) . \end{aligned}$$

Juntando las acotaciones para  $S_1$  y  $S_2$  tenemos lo que queríamos.

Si hacemos  $X = T^{2\sigma-1}$  en **4.2.8** nos quedan los dos sumandos del mismo orden, con lo que se tiene

$$\int_{\frac{T}{2}}^T \left| \sum_n \frac{b_n}{n^s} \right|^2 dt = O\left(T^{4\sigma(1-\sigma)+\epsilon}\right).$$



### 4.3 Resultados Auxiliares

En esta sección de resultados auxiliares vamos a probar cuatro teoremas necesarios para la demostración de **4.2.2** y **4.2.5**. En primer lugar tenemos la identidad **4.3.1** que nos da una aproximación a la función zeta y una estimación del orden del error que cometemos. Veremos una indicación de la demostración con referencias donde encontrar pruebas detalladas. Relacionada con esta igualdad tenemos a **4.3.4**, que es una estimación del momento de orden dos para la función zeta de Riemann. Como generalización de esta estimación daremos otra, **4.3.7**, que nos será útil para **4.2.5** (nuestro segundo teorema de densidad enunciado y demostrado en la sección anterior). Finalizaremos con la fórmula **4.3.8** que nos relaciona la función de densidad de ceros  $N(\sigma, T)$  y la zeta de Riemann.

Para finalizar esta pequeña introducción comentaremos que es fácil probar que la media

$$\frac{1}{T-1} \int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt$$

para  $\Re(s) = \sigma$  se aproxima de manera uniforme – para  $\sigma \geq \sigma_0 \geq 1$  según hacemos tender  $T \rightarrow \infty$  – al valor  $\zeta(2\sigma)$ . Dicha demostración puede encontrarse al comienzo de la **sección 9.7** de la referencia **[E]**. Parece natural

preguntarse si el valor medio de  $|\zeta(s)|^2$  en  $\Re(s)=\sigma$  será precisamente éste para todo  $\sigma > 1/2$  : Landau demostró en 1908 que efectivamente esto es así. En la referencia **[E]** anteriormente mencionada podemos encontrar una demostración diferente – debida a Hardy y a Littlewood – a la que nosotros incluimos aquí.

Empezamos con la primera de ellas. Sea  $s = \sigma + it$  y supongamos que tenemos un  $x$  que cumple

$$x \geq \frac{|t|}{\pi} ,$$

entonces es cierto uniformemente en  $0 < \sigma_0 \leq \sigma$  que

$$(4.3.1) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma}) .$$

Como ya hemos comentado anteriormente daremos solamente la idea de la demostración. Para empezar tendríamos que probar que dada  $f(x)$  función de variable real en el intervalo  $[a, b]$  , con derivada continua y monótona en dicho intervalo y que cumple  $|f'(x)| \leq \delta < 1$  , ocurre que

$$(4.3.2) \quad \sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx + O\left(\frac{1}{1-\delta}\right) .$$

La demostración de esta identidad es esencialmente la fórmula de sumación de Poisson, que podemos encontrar detallada en la página 70 de la referencia **[J2]**. Llamamos la atención sobre el orden del error: el correcto es el que hemos escrito en **4.3.2**. **Incluir referencia libro Titchmarsh**

Suponiendo  $N > x$  un entero, podemos terminar la prueba de **4.3.1** aplicando **4.3.2** a la siguiente representación de la función zeta:

$$\begin{aligned}
(4.3.3) \quad \zeta(s) &= \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \\
&= \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2} + s \int_N^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \{x\}}{x^{s+1}} dx .
\end{aligned}$$

Vemos que el último sumando es  $O(|t|N^{-\sigma})$ . Aplicamos ahora **4.3.2** al sumatorio de la última igualdad de **4.3.3** con  $\delta=1/2$  y con

$$f(x) = -\frac{t}{2\pi} \log(x) ,$$

llegando tras una serie de manipulaciones a

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(xN^{-\sigma}) + O(x^{-\sigma}) .$$

Sustituyendo todo esto en la segunda identidad de **4.3.3** terminamos la prueba de **4.3.1**.



Lo siguiente que vamos a tratar en esta sección de resultados previos es de estimar el momento de orden dos para la función zeta de Riemann, que es para lo que vamos a usar la **identidad 4.3.1**.

Supongamos  $1/2 < \sigma < 1$  fijo, entonces se tiene que

$$(4.3.4) \quad \int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt = \zeta(2\sigma)T + O(T^{2-2\sigma} \log(T)) .$$

Si en 4.3.1 hacemos  $x=t$  nos queda

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq t} n^{-\sigma-it} + O(t^{-\sigma}) = S + O(t^{-\sigma})$$

donde hemos definido de manera implícita

$$S = \sum_{x < n \leq N} n^{-s}$$

siendo  $N$  entero estrictamente mayor que  $x$ . Definimos  $T_1 = \max(m, n)$ , tenemos la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned} (4.3.5) \quad \int_1^T |S|^2 dt &= \int_1^T \left( \sum_{n \leq t} n^{-\sigma-it} \sum_{m \leq t} m^{-\sigma+it} dt \right) \\ &= \sum_{n \leq T} \left\{ \sum_{m \leq T} n^{-\sigma} m^{-\sigma} \left[ \int_{T_1}^T \left( \frac{m}{n} \right)^{it} dt \right] \right\} \\ &= \sum_{n \leq T} n^{-2\sigma} (T-n) + \sum_{m \neq n} \sum \left[ \frac{\left( \frac{m}{n} \right)^{iT} - \left( \frac{m}{n} \right)^{iT_1}}{n^\sigma m^\sigma i \log \left( \frac{m}{n} \right)} \right] \\ &= T \sum_{n \leq T} n^{-2\sigma} - \sum_{n \leq T} n^{1-2\sigma} + O \left( \sum_{0 < n < m \leq T} \sum \left[ \frac{1}{n^\sigma m^\sigma \log \left( \frac{m}{n} \right)} \right] \right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las estimaciones

$$\sum_{n \leq T} n^{-2\sigma} = \zeta(2\sigma) + O\left(T^{1-2\sigma}\right),$$

$$\sum_{n \leq T} n^{1-2\sigma} = O\left(T^{2-2\sigma}\right),$$

terminamos la demostración haciendo las correspondientes sustituciones en **4.3.4** y en la última identidad de **4.3.5**, en la que también hemos usado **4.2.9**.



En tercer lugar vamos a enunciar y demostrar un teorema que nos permitirá en la **sección 4.2** mejorar **4.2.4**. Recordamos la Definición que dimos en la sección anterior de la aplicación  $f_X(s) = 1 - \zeta(s)M_X(s)$  donde

$$M_X(s) = \sum_{n \leq X} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

El teorema en el que estamos interesados dice que si para algún  $X = X(\sigma, T)$  tal que  $T^{1-l(\sigma)} \leq X < T^A$  se cumple que cuando  $T \rightarrow \infty$

$$(4.3.6) \quad \int_{T/2}^T |f_X(s)|^2 dt = O\left(T^{l(\sigma)} \log^{m+1}(T)\right)$$

uniformemente en  $\sigma \geq \alpha \geq 1/2$ , con  $l(\sigma)$  positiva, no creciente y con derivada acotada, y donde  $m \geq 0$  es una constante, entonces

$$(4.3.7) \quad N(\sigma, T) = O\left(T^{l(\sigma)} \log^{m+1}(T)\right)$$

uniformemente en  $\sigma \geq \alpha + \frac{1}{\log(T)}$ .



No vamos a incluir la demostración de este resultado ya que es esencialmente igual a la prueba que daremos nosotros de la igualdad **4.3.8** a continuación. Si se prefiere consultar una demostración explícita, puede encontrarse en las páginas 112-114 de la referencia **[J2]**.



Para demostrar nuestro primer resultado de densidad en la **sección 4.2** necesitamos la fórmula **4.3.8** que podemos encontrar a continuación. Lo que hacemos en ella es relacionar explícitamente la función  $\zeta(s)$  con el número de ceros que tiene hasta altura  $T$ . En concreto se tiene que si  $1/2 \leq \sigma_0 \leq 1$  y hacemos  $T \rightarrow \infty$ , entonces

$$(4.3.8) \quad 2\pi \int_{\sigma_0}^1 N(\sigma, T) d\sigma = \int_0^T \log |\zeta(\sigma_0 + it)| dt + O(\log T) .$$

Para demostrar la identidad **4.3.8** definimos en primer lugar el rectángulo donde integraremos la función zeta,  $R = \{\sigma_0 \leq \sigma \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ . Tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \int_R \log \zeta(s) ds &= \int_{\sigma_0}^1 \log \zeta(\sigma) d\sigma - \int_{\sigma_0}^1 \log \zeta(\sigma + iT) d\sigma \\ &\quad + i \int_0^T [\log \zeta(1 + it) - \log \zeta(\sigma_0 + it)] dt . \end{aligned}$$

Este último sumando se puede reescribir de la siguiente manera

$$\int_0^T i \int_{\sigma_0}^1 \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma dt = \int_{\sigma_0}^1 \int_{\sigma}^{\sigma + iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds d\sigma .$$

Aplicando el teorema de los residuos

$$\int_{\sigma}^{\sigma+iT} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \left[ \left( \int_{\sigma}^1 + \int_1^{1+iT} - \int_{\sigma+iT}^{1+iT} \right) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right] - 2\pi i N(\sigma, T)$$

$$= \log \zeta(\sigma+iT) - \log \zeta(\sigma) - 2\pi i N(\sigma, T) .$$

Una vez lo ponemos todo junto y nos quedamos sólo con la parte imaginaria obtenemos algo que se parece mucho a **4.3.8**:

$$2\pi \int_{\sigma_0}^1 N(\sigma, T) d\sigma = \int_0^T \log |\zeta(\sigma_0 + it)| dt + 2\pi \int_{\sigma_0}^2 \arg[\zeta(\sigma + iT)] d\sigma$$

$$- \int_0^T \log |\zeta(2 + it)| dt + K(\sigma_0)$$

donde  $K(\sigma_0)$  es independiente de  $T$ . Sólo hemos de estimar el orden de los dos sumandos restantes y habremos concluido la demostración de **4.3.8**. Para el último de ellos tenemos que

$$\int_0^T \log |\zeta(2 + it)| dt = \Re \left( \sum \frac{\Lambda(n)}{n^2} \frac{n^{-iT} - 1}{-i \log^2(n)} \right) = O(1) ,$$

donde  $\Lambda(n)$  es el símbolo o función de von Mangoldt que ya definimos en **1.5.7**. Para el primero se puede probar (véanse páginas 58, 59, 110 y 111 de **[J2]**) que

$$\int_{\sigma_0}^2 \arg[\zeta(\sigma + iT)] d\sigma = O(\log(T)) .$$

Algo muy parecido a esto está demostrado hacia el final de la prueba de la fórmula de Riemann-von Mangoldt – el párrafo anterior a la **figura 2.5.2** – en la **sección 2.5**. Juntando todas estas estimaciones obtenemos el resultado cuando

$T$  no es la ordenada de un cero y argumentando por continuidad, para el caso general.



## 4.4 Teorema de Hardy

Como ya hemos comentado en la sección anterior los resultados sobre densidades de ceros nos aportan información sobre la posible distribución horizontal de los ceros de la función zeta en la banda crítica (“posible” porque de ser cierta la hipótesis de Riemann no habría ningún cero fuera de la línea crítica, es decir, la distribución concentraría todos los ceros en dicha línea). El primero en aportar información sobre lo que ocurre con los ceros en la línea crítica fue Hardy en **[H1]** en donde demuestra que la función zeta tiene infinitos ceros. Posteriormente Hardy y Littlewood en **[H2]** demuestran que hay al menos  $KT$  ceros en el intervalo

$$\left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + iT \right],$$

resultado mejorado posteriormente por Selberg en **[S]** a  $KT \log T$ , es decir que al menos una porción positiva de los ceros está en la línea. Hacia finales del siglo veinte N. Levinson probó que como mínimo una tercera parte de los ceros están en la línea crítica, resultado mejorado posteriormente hasta un cuarenta por ciento (que es el mejor conocido hasta la fecha). Una referencia interesante es **[C2]**.

En esta sección daremos una demostración completa del resultado de Hardy: la función  $\zeta(s)$  tiene infinitos ceros en la recta  $\sigma = 1/2$ . Hoy en día se conocen diferentes pruebas de este hecho; la que nosotros presentamos aquí está cogida del libro de H. M. Edwards y la memoria de J. Jiménez Urroz, referencias **[E]** y **[J2]** respectivamente, y se basa en la fórmula de inversión de Fourier aplicada a la función  $\xi(1/2 + it)$ : recordamos que en la **sección 1.4** probamos que los ceros de ambas funciones coinciden.

Si en **2.3.3** hacemos el cambio  $t \rightarrow t^2$  obtenemos

$$(4.4.1) \quad \frac{2\xi(s)}{s(s-1)} = \int_0^{\infty} u^{s-1}(G(u)-1) du$$

que es válida para  $\Re(s) > 1$  y donde  $G(u) = \omega(u^2)$ , siendo  $\omega(t)$  la función que allí se define. Para poder extender la fórmula a  $0 < \sigma < 1$  tendremos que eliminar de alguna manera la singularidad que la función  $G(u)-1$  tiene en el cero. La siguiente "identidad" de Euler nos da una pista de cómo podríamos proceder

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x^n = (1+x+x^2+\dots) + (x^{-1}+x^{-2}+\dots) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-1} = 0$$

cuyo análogo en el caso continuo es

$$\int_0^{\infty} x^{s-2} dx = \int_0^1 x^{s-2} dx + \int_1^{\infty} x^{s-2} dx = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1} = 0 .$$

Es claro que ambas fórmulas carecen de sentido ya que las regiones de convergencia son disjuntas –  $\Re(s) > 1$  y  $\Re(s) < 1$  respectivamente –. Nuestra esperanza es que en  $0 < \sigma < 1$  la siguiente identidad sí sea cierta:

$$(4.4.2) \quad \frac{2\xi(s)}{s(s-1)} = \int_0^{\infty} u^{s-1} \left( G(u) - 1 - \frac{1}{u} \right) du .$$

Observemos en primer lugar que en este caso tenemos convergencia absoluta. Para comprobar **4.4.2** definimos una función que sea su continuación analítica en la región anteriormente comentada. En concreto consideramos

$$\int_1^{\infty} v^{s-1} (G(v)-1) dv + \int_1^{\infty} v^{s-1} \left( G(v)-1-\frac{1}{v} \right) dv = \frac{1}{1-s} ,$$

que es analítica en  $\Re(s) > 0$  y coincide con las funciones que nos interesan en los intervalos deseados:

$$1. \text{ con } \int_1^{\infty} v^{s-1} (G(v)-1) dv \text{ en } \Re(s) > 1 \text{ y}$$

$$2. \text{ con } \int_1^{\infty} v^{s-1} \left( G(v)-1-\frac{1}{v} \right) dv \text{ en } 0 < \Re(s) < 1 .$$

Luego la identidad **4.4.3** que aparece a continuación es cierta siempre que  $a$  se encuentre en el intervalo  $0 < a < 1$  .

$$\begin{aligned} (4.4.3) \quad G(x)-1-\frac{1}{x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{2\xi(s)}{s(s-1)} x^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{2\xi(s)}{s(s-1)} x^{s-1} ds . \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado la ecuación funcional de la función  $\xi(s)$  .

La idea que Hardy usa en su demostración es esencialmente obtener conclusiones para el integrando a partir de lo que ya conocemos sobre  $G(x)$  y en especial ciertas singularidades. Vamos a ver a continuación que esta función y todas sus derivadas tienden a cero cuando  $x \rightarrow \sqrt{i} = e^{\pi i/4}$  pero no de cualquier manera: la  $x$  no puede salir de la banda  $B$  que definimos un poco

más adelante, por ejemplo, sea  $x = \sqrt{i - \epsilon}$  ; si hacemos tender  $\epsilon$  a cero convendremos que  $x \rightarrow \sqrt{i}$  , pero la serie que define a  $G(x)$  sería divergente.

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 i} e^{-\pi n^2 (x^2 - i)} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2 (x^2 - i)} = -G(\sqrt{x^2 - i}) + 2G(2\sqrt{x^2 - i}) . \end{aligned}$$

Aplicamos ahora la ecuación funcional  $G(x) = x^{-1} G(x^{-1})$  de forma que continuamos la cadena de identidades anteriores con

$$\begin{aligned} G(x) &= -G(\sqrt{x^2 - i}) + 2G(2\sqrt{x^2 - i}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^2 - i}} G\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - i}}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2 - i}} G\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 - i}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - i}} \left( \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{4(x^2 - i)}} - \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x^2 - i}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - i}} \sum_{n \text{ impar}} e^{-\frac{\pi n^2}{4(x^2 - i)}} . \end{aligned}$$

Como  $e^{-1/u}$  tiende a cero cuando  $u \rightarrow 0$  más rápidamente que cualquier potencia de  $u$  , vemos que  $G(x)$  y todas sus derivadas tienden a cero a medida que  $x$  se aproxima a  $\sqrt{i}$  desde el interior de la banda  $B$  (véase un poco más adelante).

Lo siguiente que hemos de observar es que  $G(x)$  no sólo está definida para valores reales de  $x$  , sino que es también analítica en toda la banda

$$B = \left\{ -\frac{\pi}{4} < \Im(\log x) < \frac{\pi}{4} \right\}$$

salvo en la frontera, donde la función tiene algunas singularidades. Diremos de pasada, ampliando un comentario previo, que son precisamente estas singularidades las que usaremos en la demostración del teorema de Hardy.

Para demostrar la anterior afirmación consideramos **4.4.3** para valores complejos de la variable  $x$ . De esta manera, en la banda  $B$ , podemos acotar el integrando usando para el primer factor la fórmula de Stirling:

$$\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} = O\left(|t|^A e^{-\frac{\pi}{4}|t|}\right),$$

mientras que para el segundo tendremos que

$$x^{s-1} = x^{a-1} x^{it} = K e^{\pm |t| \Im(\log(x))}.$$

Así, la integral define una función analítica y por continuación analítica la igualdad **4.4.3** seguirá siendo cierta en  $B$ . En dicha igualdad nos va a interesar deshacernos del denominador, cosa que conseguimos aplicando el operador a ambos lados de la identidad

$$x \frac{d}{dx^2} x,$$

obteniendo de esta manera:

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} 2\xi(s) x^{s-1} ds.$$

Es claro, al igual que la función  $G(x)$  anterior, que también  $H(x)$  y todas sus derivadas tienden a cero cuando  $x$  se aproxima a  $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$ . Si hacemos el cambio de variable  $u = \log x$  y tomamos  $a = 1/2$  nos queda:

$$H(e^u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) e^{-\frac{u}{2}} e^{itu} dt$$

o equivalentemente

$$e^{\frac{u}{2}} H(e^u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itu)^n}{n!} \right) dt .$$

Al tener convergencia absoluta en el integrando podemos intercambiar el sumatorio con la integral, de forma que podemos integrar término a término. Una vez hecho esto nos queda la identidad

$$e^{\frac{u}{2}} H(e^u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (iu)^n$$

donde

$$c_n = \frac{1}{\pi n!} \int_{-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) t^n dt .$$

Vamos a terminar por fin la demostración del teorema de Hardy usando reducción al absurdo. Supongamos que  $\xi\left(\frac{1}{2} + it\right)$  – que recordemos es real – tuviera sólo un número finito de ceros, entonces a partir de un cierto  $T$  la función tendría signo constante (que sin pérdida de generalidad suponemos positivo) entonces

$$\begin{aligned} (2n)! c_{2n} \pi &= 2 \int_0^{\infty} \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) t^{2n} dt \\ &\geq 2 \int_{T+1}^{T+2} \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) t^{2n} dt - 2 \int_0^T \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) t^{2n} dt \end{aligned}$$



$$\geq K_1(T+1)^{2n} - K_2T^{2n}$$

de donde vemos que  $c_{2n}$  sería positivo para todo  $n \geq n_0$ , tomando un  $n_0$  suficientemente grande. Aquí es donde se llega a la contradicción puesto que por un lado todas las derivadas de la función  $e^{u/2}H(e^u)$  tienden a cero cuando se aproxima  $u \rightarrow i\pi/4$  a lo largo del eje imaginario, mientras que por otro lado esto no es posible ya que es suma de cosas positivas.



## 4.5 Hipótesis de los Primos Consecutivos

El problema del que nos vamos a ocupar en esta sección es el de encontrar el menor  $h=h(x)$  de tal manera que, dado un  $x$  suficientemente grande, el intervalo  $[x, x+h]$  contenga al menos un primo. Expresándolo en términos de la función de distribución de los números primos el problema se enuncia diciendo que queremos encontrar el menor  $h$  para el que se cumple la desigualdad

$$(4.5.1) \quad \pi(x+h) - \pi(x) > 0 \quad ,$$

o, de forma equivalente,

$$(4.5.2) \quad \psi(x+h) - \psi(x) > 0 \quad .$$

En la **sección 5** del **capítulo 1** podemos encontrar la definición y algunas propiedades de la función  $\psi(x)$ . Si tenemos un  $h$  suficientemente grande – por ejemplo del orden de  $x$  – y como  $\psi(x) - x = o(x)$ , se tendrá que

$$(4.5.3) \quad \psi(x+h) - \psi(x) = h(1 + o(1)) \quad .$$

Nos interesa encontrar el  $h$  más pequeño para el que se siga manteniendo esta relación asintótica.

Si representamos por  $p_n$  al  $n$ -ésimo número primo, reformulamos el problema de los primos consecutivos como aquél consistente en determinar los menores valores  $\theta$  y  $\theta'$  tales que se cumpla la desigualdad

$$(4.5.4) \quad p_{n+1} - p_n \ll p_n^\theta \log^{\theta'}(p_n) .$$

Sin hacer un análisis exhaustivo podemos anticipar que el estudio de la diferencia  $\psi(x+h) - \psi(x)$  va a ser bastante complicado porque se puede interpretar como el análisis de la “derivada” de una función que está al borde de la no convergencia – véase la fórmula explícita 4.5.5 para la función  $\psi(x)$  un poco más adelante –.

Ya demostramos en la **sección X** una fórmula explícita para la función  $\psi(x)$  . Tomando un  $T \ll x$  y representando por  $\gamma$  a la parte imaginaria de los ceros de la función zeta, tenemos que

$$(4.5.5) \quad \psi(x) = x - \sum_{\rho: |\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right) .$$

Si en dicha fórmula hacemos un buen estudio de la ubicación de los ceros de la función zeta, obtendremos resultados no triviales para el problema de los primos consecutivos. Lo que vamos a demostrar es que la hipótesis de densidad – suponiéndola cierta – implica  $p_{n+1} - p_n \ll p_n^{1/2+\epsilon}$  , que es lo que se conoce como **hipótesis de los primos consecutivos**.

Nuestro proceder será empezar probando un resultado algo más general para, posteriormente, deducir el nuestro como corolario. En concreto vamos a ver que si

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{b(1-\sigma)+\epsilon}\right)$$

para  $1/2 \leq \sigma \leq 1$  y con  $b > 0$  , entonces 4.5.4 es cierta para cualquier  $\theta$  fijo, siempre que  $\theta > 1 - 1/b$  .

Si para  $h \gg x^\sigma$  se cumple 4.5.3 y suponemos que en el intervalo  $(x, x+h)$

no hay primos, entonces tenemos por un lado que

$$\begin{aligned}
 \psi(x+h) - \psi(x) &= \sum_{x < p^m \leq x+h} \log p \\
 &= \left( \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m} \right) \left( \sum_{x^{1/m} < p \leq (x+h)^{1/m}} \log p \right) \\
 &\ll \log x \left( \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m} \right) \left( \sum_{x^{1/m} < p \leq (x+h)^{1/m}} 1 \right) \\
 &\ll \log x \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m} \left\{ (x+h)^{1/m} - x^{1/m} + 1 \right\} \\
 &\ll \log^2 x \left\{ 1 + \sqrt{x+h} - \sqrt{x} \right\} \\
 &\ll \log^2 x \left( 1 + \frac{h}{\sqrt{x}} \right) = o(h) .
 \end{aligned}$$

Con esto llegamos a una contradicción, ya que por **4.5.3** sabemos que

$$\psi(x+h) - \psi(x) > \frac{h}{2} .$$

Terminaremos si conseguimos demostrar que esto se cumple para todo  $h$  tal que  $h \gg x^{1-1/b+\epsilon}$ . A partir de la fórmula **4.5.5** tenemos

$$(4.5.6) \quad \psi(x+h) - \psi(x) = h - \sum_{|y| < T} \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2(x)}{T}\right) .$$

Llamaremos  $S$  al segundo sumando de la anterior igualdad. Cada uno de los sumandos de  $S$  se pueden acotar de la siguiente manera:

$$\left| \frac{(x+h)^\rho - x^\rho}{\rho} \right| = \left| \int_x^{x+h} y^{\rho-1} dy \right| \leq h x^{\beta-1} .$$

Para aprovechar la información que tenemos sobre los ceros dividimos la suma según su parte real. De esta forma y teniendo en cuenta la anterior acotación

$$\begin{aligned} \frac{x}{h} |S| &\leq \sum_{|y| \leq T} x^\beta = \sum_{|y| \leq T} \left( 1 + \log(x) \int_0^\beta x^u du \right) \\ &= N(T) + \log(x) \sum_{|y| \leq T} \left( 1 + \log(x) \int_0^1 x^u X_{(0,\beta)}(u) du \right) , \end{aligned}$$

donde  $X_{(a,b)}(u)$  es la función característica del intervalo  $(a, b)$  .

Metiendo la suma dentro de la integral y teniendo en cuenta que

$$N(u, T) = \sum_{|y| \leq T} X_{(0,\beta)}(u)$$

nos queda

$$\frac{x}{h} |S| \leq N(T) + \log(x) \int_0^1 x^u N(u, T) du .$$

Ahora usaremos el hecho de que la función zeta (referirse a la **sección X**) no tiene ceros en la región definida por

$$\sigma \geq 1 - A \frac{\log(\log(T))}{\log(T)} .$$

Si definimos la función *eta* como el cociente anterior, es decir, mediante la fórmula

$$\eta(T) = A \frac{\log(\log(T))}{\log(T)} ,$$

entonces

$$N(u, T) = \begin{cases} 0 & u \geq 1 - \eta(T) \\ O\left(T^{b(1-u)+\epsilon}\right) & u < 1 - \eta(T) \end{cases} .$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Riemann–von Mangoldt – identidad 1.4.4 – obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{x}{h}|S| &\leq N(T) + O\left(\log(x) T^{b+\epsilon} \left(\frac{x}{T^b}\right)^{1-\eta(T)}\right) \\ &= O(T \log T) + O\left(\log(x) T^{b+\epsilon} \left(\frac{x}{T^b}\right)^{1-\eta(T)}\right) . \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en 4.5.6 resulta

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h + O\left(\frac{hT \log T}{x}\right) + O\left\{h \log x \left(\frac{T^b}{x}\right)^{\eta(T)}\right\} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right) .$$

Eligiendo  $T = x^{1-\theta}$  con  $\theta > 1 - 1/t$ , los dos primeros términos son  $o(1)$  con lo que  $\psi(x+h) - \psi(x) = h + o(h)$  si  $h = x^\theta$ .



Para terminar mencionaremos que Cramer, basándose en argumentos probabilísticos, conjeturó algo mucho más fuerte: en concreto  $\theta=0$  y  $\theta'=2$ . El propio Cramer demostró que, asumiendo la hipótesis de Riemann, se llega a probar  $\theta=1/2$ ,  $\theta'=1$  y parece ser que no se puede ir más allá. A partir de este punto la historia se complica con aportaciones de Selberg (¡cómo no!), Hoheisel, Heilbronn, Iwaniec y otros.

# APÉNDICE 1

Comparar con el apéndice que tiene [J2]

## A.1 Introducción

En este apéndice, para comodidad del lector, presentamos una serie de resultados auxiliares que se usan en el presente trabajo y que hemos considerado adecuado incluir como referencia rápida. Para exposiciones detalladas, demostraciones completas o ampliación de detalles, se incluyen algunas referencias bibliográficas.

El orden en el que se exponen los temas en este primer apéndice es en el que pueden ser necesitados si seguimos un orden lineal en la lectura del trabajo. Pero tampoco sería desaconsejable empezar leyendo el presente trabajo por este apéndice para refrescar algunos teoremas e ir acostumbrándonos a la notación.

Los temas tratados son algo dispares, pero fundamentalmente tratamos teoría de variable compleja, teoría de Fourier, algunas fórmulas de sumación y algunos teoremas relativos a órdenes de funciones y acotaciones.

## A.2 Transformada de Fourier y Sumación de Poisson

Hemos usado a lo largo de este trabajo la teoría de transformación de Fourier y la fórmula de sumación de Poisson. Recordaremos brevemente algunas de las fórmulas y teoremas que se han usado y recomendando al lector la referencia **Dym y McKean** para una exposición completa de estos resultados

Dada una función integrable,  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , su transformada de Fourier se define mediante la fórmula

$$(A.2.1) \quad \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y} dx .$$

y la inversa de dicha transformación, se decir, la inversa de la transformada de Fourier es

$$(A.2.2) \quad \check{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i x y} dx .$$

Con respecto al comportamiento en el infinito tenemos el teorema de Riemann-Lebesgue, que nos dice que la transformada tiende a cero. Más concretamente tenemos que si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  entonces

$$(A.2.3) \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} \hat{f}(y) = 0 .$$

Una de las identidades que con más frecuencia se utilizan en el análisis de Fourier es la que nos relaciona cómo cambia la norma de una función al hacer su transformada. Cuando se trata de funciones suficientemente regulares – por ejemplo pertenecientes al espacio  $L^2$  – la norma  $L^2$  no varía. Esto es lo que afirma la identidad de Plancherel:

$$(A.2.4) \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2 dy .$$

Otra identidad de este tipo, pero de naturaleza completamente diferente, es la conocida como fórmula de sumación de Poisson:

$$(A.2.5) \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) .$$

Hay que observar que todas estas igualdades no son válidas para cualquier función, sino que están limitadas a sus respectivos conjuntos, que dicho sea de paso no es en general nada sencillo encontrar cuáles son y cómo se definen.

Además, estas identidades admiten generalizaciones a espacios de dimensión superior. La demostración de la fórmula de sumación de Poisson es sencilla e ingeniosa y no nos resistimos a no incluir aquí los pasos esenciales.

Dada una función  $f$  suficientemente regular, es decir, tan regular como necesitemos para que los pasos que hagamos a continuación sean correctos, hay dos formas inmediatas de asociarle una función periódica de período 1:

$$(A.2.6) \quad F(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) \quad \text{y} \quad G(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{2\pi i m x} .$$

La fórmula de sumación de Poisson es consecuencia de la identidad  $F=G$  . Para ver esta última igualdad tendríamos que usar la unicidad del desarrollo de una función periódica en una serie trigonométrica. Tenemos por definición (comparar con **A.2.1**) que el  $m$ -ésimo coeficiente de Fourier, si consideramos el intervalo  $[0,1]$  , es

$$(A.2.7) \quad \hat{f}(m) = \int_{[0,1]} f(x) e^{-2\pi i m x} dx .$$

Sustituyendo en las identidades **A.2.6**, usando **A.2.7**, que  $F=G$  y haciendo la variable  $x=0$  obtenemos el resultado.

Una excelente referencia para estos temas, en la que además podemos encontrar una demostración del teorema de los números primos, es el libro de **Dym y McKean [X]**.

### A.3 Sumación de Abel

La fórmula de sumación de Abel nos permite representar – relacionar – series e integrales y se muestra como una herramienta muy útil debido al hecho de que en general nos será más sencillo tratar con integrales que con sumas.

Empezaremos esta sección definiendo las denominadas funciones aritméticas,



que son las que nos van a interesar para la fórmula de Abel: son aquellas que están definidas sobre los enteros con valores en los reales o en los complejos.

Sea  $a(n)$  una función aritmética y  $\varphi$  una función con derivada continua definida en  $[1, \infty[$ . Definimos la suma de  $a(n)$  hasta el punto  $x$  mediante la fórmula:

$$(A.3.1) \quad A(x) = \sum_{n \leq x} a(n) .$$

La fórmula de Abel la encontramos a continuación:

$$(A.3.2) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} a(n)\varphi(n) = A(x)\varphi(x) - \int_1^x A(t)\varphi'(t) dt .$$

Si no somos especialmente quisquillosos podemos afirmar que lo que tenemos es esencialmente una fórmula de integración por partes. La demostración es bastante sencilla y no la incluimos únicamente por motivos de brevedad. Puede consultarse una prueba completa junto con algunas aplicaciones y aclaraciones adicionales en la referencia **[C1]**.

## A.4 Fórmula de Inversión de Möbius

En los siguientes párrafos enunciamos y demostramos la fórmula de inversión de Möbius; daremos también algunas explicaciones e interpretaciones adicionales. Esencialmente el contenido que presentamos está tomado de la **sección 9 del capítulo 10** de la referencia **[E]**.

La fórmula de inversión de Möbius es sencillamente la transformada inversa de la fórmula del producto de Euler

$$(A.4.1) \quad \zeta(s) \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 1$$

en el sentido que explicamos a continuación. El operador suma – que asigna a cada función  $f(x)$  la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$$

y que tuviese como salida  $\zeta(s)$  – puede ser invertido al componerlo con el operador que asigna a la función  $f(x)$  la imagen  $f(x) - f(px)$  y que tuviese como salida  $1 - p^{-s}$ . Por otro lado, la fórmula

$$(A.4.2) \quad \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

nos muestra que la composición de los operadores  $f(x) \rightarrow f(x) - f(px)$  puede ser escrito en la forma

$$f(x) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) f(nx) .$$

donde  $\mu(m)$  es la función de Möbius que viene definida por la fórmula:

$$\mu(m) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } m \text{ es el producto de } k \text{ primos distintos} \\ 0 & \text{cuando tenga algún divisor cuadrado} \end{cases}$$

siendo  $\mu(1)=1$ . Podemos escribir la fórmula de inversión de Möbius de la siguiente forma, que es la que hemos usado para la función zeta de Riemann

$$(A.4.3) \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nx) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) g(nx) .$$

## A.5 Propiedades de la Función Gamma

Para completar este apéndice de referencia y hacer el trabajo lo más autocontenido posible, incluimos en esta sección algunas propiedades básicas de la función Gamma.

La definición usual, que es la que dimos en el capítulo primero, es a partir de la integral de Euler

$$(A.5.1) \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

que es válida únicamente para  $\Re(s) > 0$ . La fórmula de Weierstrass

$$(A.5.2) \quad \frac{1}{s \Gamma(s)} = e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left( 1 + \frac{s}{n} \right) e^{-\frac{s}{n}} \right]$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler, nos permite extender la definición a todo el plano complejo. Además, vemos en **A.5.2** que la función gamma no se anula nunca y tiene polos simples para  $s = 0, 1, 2, \dots$ .

La función gamma ha sido estudiada ampliamente y se conocen hoy en día una gran cantidad de ecuaciones funcionales que son válidas para ella. Entre estas ecuaciones destacamos las siguiente:

$$(A.5.3) \quad \Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$$

$$(A.5.4) \quad \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

$$(A.5.5) \quad \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s} \sqrt{\pi} \Gamma(2s)$$

Esta última se conoce como fórmula de duplicación de Legendre. Combinando estas tres últimas identidades nos queda

$$(A.5.6) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \frac{2^{1-s}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(2s)$$

Con esta última igualdad se obtiene la forma antisimétrica de la ecuación funcional para la función zeta de Riemann:

$$(A.5.7) \quad \zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \Gamma(s) .$$

Una fórmula asintótica interesante es la debida a Stirling, válida según  $|s| \rightarrow \infty$ , para los ángulos  $-\pi + \delta < \arg(s) < \pi - \delta$ , para todo  $\delta > 0$  fijo:

$$(A.5.8) \quad \log(\Gamma(s)) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log(s) - s + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \tau(s) .$$

donde

$$\tau(s) = 1 + \frac{1}{12s} + \dots ,$$

es decir que el orden en la aproximación es  $O(|s|^{-1})$ . De forma trivial, y en las mismas hipótesis, se verifica también que:

$$(A.5.9) \quad \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log(s) + O(|s|^{-1}) .$$

## A.6 Tres Teoremas de Cauchy

El nombre de Cauchy está asociado a tres teoremas fundamentales dentro de la variable compleja. El primero de ellos, conocido simplemente como **teorema de Cauchy**, afirma que si tenemos una función analítica  $f(z)$  en un dominio  $D$  simplemente conexo y una curva cerrada  $C$  totalmente contenida en el

dominio, entonces

$$(A.6.1) \quad \int_C f(z) dz = 0 .$$

El segundo es la llamada **fórmula integral de Cauchy**. Es una fórmula muy notable que muestra que los valores que toma una función analítica en el contorno de un disco determinan por completo los valores de la función en el interior del disco. En concreto, si tenemos una función analítica  $f(z)$  en el disco  $|z-\alpha|=R$  y llamamos  $C$  a la circunferencia  $|z-\alpha|=\rho < R$ , siendo  $z$  un punto cualquiera tal que  $|z-\alpha|<\rho$ , entonces

$$(A.6.2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\eta)}{\eta-z} d\eta .$$

A continuación enunciamos el **teorema de Morera**, que es un recurso extraordinariamente útil para demostrar la analiticidad de una función ya que, normalmente, es más sencillo demostrar la existencia de una integral que la de una derivada. Supongamos que tenemos una función  $f(z)$  continua en un dominio  $D$  y que además verifica

$$\int_C f(z) dz = 0$$

para todo triángulo  $C$  que esté contenido en dicho dominio  $D$ , entonces la función  $f(z)$  es analítica en dicho dominio. Destacamos el hecho de que no le estamos imponiendo ningún tipo de restricción al dominio.

Incluir Ppio del módulo máximo. Págs. 149 y 150 del libro Levinson-Redheffer. Después del tercer teorema de Cauchy...

El tercero de los teoremas de Cauchy a los que nos referíamos anteriormente es el conocido como **teorema de los residuos de Cauchy**. En cierto sentido es una generalización del teorema de Cauchy enunciado en primer lugar, ya que

nos da el resultado del cálculo de la integral **A.6.1** para el caso especial en el que la curva cerrada que consideremos contenga alguna singularidad, es decir, siempre que la función deje de ser analítica – con singularidad de tipo polo – en el dominio delimitado por la curva cerrada que consideremos. El teorema dice que si tenemos una función analítica  $f(z)$  en un dominio  $D$  que sea simplemente conexo excepto en un número finito de puntos  $\alpha_j$  en los que  $f$  puede tener singularidades aisladas, y si  $C$  es un contorno de Jordan – curva cerrada y simple – que no pasa por ninguna de las singularidades, entonces

$$(A.6.3) \quad \int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}(f(z), \alpha_j) .$$

La notación  $\text{Res}(f(z), \alpha_j)$  representa el residuo de la función  $f(z)$  en el punto  $z = \alpha_j$  .

Vamos a repasar brevemente a continuación dos maneras de calcular los residuos de una función dada,  $f(z)$  , en un punto  $z = \alpha$  . Para ampliar esta sección – no sólo la parte de residuos, sino los resultados de variable compleja en general – recomendamos la referencia **[L2]**.

En primer lugar tenemos la propia definición: coincide con el primer coeficiente de la parte principal (esto es, la parte singular, la que aporta polos, la que tiene potencias de exponente negativo) del desarrollo en serie de Laurent de la función. Es decir, que tendríamos que calcular el desarrollo en serie de Laurent de la función y quedarnos con el primer coeficiente. Se ha convertido en notación estándar, por similitud con los desarrollos en serie de Taylor, el representar a este coeficiente por  $a_{-1}$  .

Como segundo método para el cálculo de residuos, caso de que la función se puede representar como el cociente de otras dos que sean analíticas, es decir,

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} ,$$

y el polo sea simple, podemos calcularlo directamente usando la fórmula

$$(A.6.4) \quad a_{-1} = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)} .$$

Si el orden del polo es  $m$ , existe una fórmula que generaliza a la anterior:

$$(A.6.5) \quad a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z-\alpha_j)^m f(z) \right]_{z=\alpha} .$$

Estas fórmulas son suficientes para la mayoría de los casos que se nos presentan a lo largo del presente trabajo.

Un aspecto muy interesante del teorema de los residuos de Cauchy es la posibilidad de utilizarlo para obtener información acerca del número de ceros que una función analítica puede tener en el interior de un cierto dominio. Si en lugar de una función analítica consideramos una función **meromorfa** – analítica salvo en una cantidad finita de puntos donde puede tener polos, pero no singularidades esenciales – obtendremos información acerca del número de ceros menos el de polos, es decir, podríamos interpretar los polos como ceros de multiplicidad “negativa”.

Las intenciones comentadas en el párrafo anterior las llevamos a cabo en el siguiente teorema: empecemos considerando una función meromorfa  $f(z)$  en un dominio simplemente conexo  $D$  que contiene a un contorno de Jordan  $C$ , y supongamos que ninguno de los polos ni de los ceros de la función se encuentran sobre el contorno de Jordan. Sea  $N$  el número de ceros y  $P$  el número de polos que la función tiene en el interior del contorno, contándose cada uno de acuerdo a su multiplicidad, entonces

$$(A.6.6) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P .$$

El teorema que acabamos de comentar, enunciado en la forma que encontramos

más adelante **A.6.7**, es lo que se conoce como **principio de variación del argumento**: si consideramos la imagen por  $f(z)$  del contorno  $C$ , nos queda que la integral anterior podemos interpretarla como el número de vueltas que dicha curva (la transformada) da alrededor del origen de coordenadas del plano complejo transformado (esencialmente obtenemos que la integral anterior es el “logaritmo” sobre una curva cerrada). Expresado en una fórmula:

$$(A.6.7) \quad N - P = \frac{1}{2\pi} \{ \arg f(z) \}_C .$$

## A.7 Funciones Enteras de Orden Finito

Dada una función entera  $f(z)$  diremos que es de orden finito si crece menos rápidamente que la exponencial de una potencia, es decir, si existen dos constantes positivas  $C$  y  $\rho$  tales que

$$|f(z)| \leq C e^{|z|^\rho} .$$

En este caso definimos el orden de la función por la siguiente fórmula:

$$(A.7.1) \quad \rho f(z) = \inf \left\{ \rho \mid \exists C \text{ con } |f(z)| \leq C e^{|z|^\rho} \right\} .$$

El teorema en el que estamos interesados es el denominado **teorema de factorización de Hadamard**. Esencialmente viene a decir que toda función entera de orden finito  $\rho$  puede ser expresada como producto de sus raíces añadiendo, quizá, una exponencial, es decir que podemos escribirla de la siguiente manera

$$(A.7.2) \quad f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_n \left\{ \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\left( \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{k} \left( \frac{z}{a_n} \right)^k \right)} \right\} ,$$

donde  $g(z)$  es un polinomio de grado menor o igual a  $k = [\rho]$ .



Lo que a nosotros nos interesa en este trabajo es ver cómo aplicar este teorema a la función zeta de Riemann. Empezamos por enunciar sin demostración la siguiente fórmula, debida a Stirling,

$$(A.7.3) \quad n! = \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

directamente deducimos a partir de ella, sin más que tomar logaritmos:

$$(A.7.4) \quad \log((N-1)!) = \left(N - \frac{1}{2}\right) \log(N) - N + \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Se puede consultar la demostración en el **capítulo 2** de la referencia [C1]. A partir de A.7.4 es sencillo ver que

$$(A.7.5) \quad \log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log s - s + \log \sqrt{2\pi} + \int_0^{\infty} \frac{[u] - u + 1/2}{u+s} du,$$

integral que acotamos para  $\Re(s) > \frac{1}{2}$  de la siguiente manera:

$$(A.7.6) \quad \left| \int_0^{\infty} \frac{[u] - u + 1/2}{u+s} du \right| = \left| \int_0^{\infty} \frac{\left( \int_0^u [v] - v + 1/2 \right) dv}{u+s} du \right|$$

$$\leq \int_0^{\infty} \frac{du}{|u+s|^2} \ll \frac{1}{|s|}.$$

Tenemos pues que la función  $\xi(s)$  es entera de orden 1, así que aplicando el teorema de factorización de Hadamard nos queda

$$\xi(s) = e^{a+bs} \prod_{\rho} \left( \left( 1 - \frac{s}{\rho} \right) e^{\frac{s}{\rho}} \right) .$$

donde hemos llamado  $\rho$  a los ceros de la función  $\xi(s)$  .

Hay varias demostraciones del teorema de Hadamard, la que encontramos en **[C1]** se debe a Landau y hace uso de los teoremas de Borel-Caratheodory y Lindelöf, además de la fórmula de Stirling.

## A.8 Fórmula de Jensen

La fórmula de Jensen nos relaciona el número de ceros de una aplicación analítica contenidos en un círculo con la propia función. En esta sección vamos a ver tres enunciados que no son equivalentes entre sí – aunque sí están relacionados – de la fórmula de Jensen.

En primer lugar supongamos una función holomorfa  $f$  que esté acotada en el disco  $|z| \leq R$  , es decir,  $|f(z)| \leq M < \infty$  . Supongamos además que tiene  $n$  ceros en la corona  $|z| \leq r < R$  y que  $f(0) \neq 0$  , entonces

$$(A.8.1) \quad \left( \frac{R}{r} \right)^n \leq \frac{M}{|f(0)|} .$$

Aunque está claro por las hipótesis, observamos que  $M$  es el máximo de la función en el disco considerado.

Por el principio del módulo máximo (podemos encontrar un enunciado en la **sección A.6** de este mismo apéndice) sabemos que éste se alcanza en la frontera, de forma que podemos enunciar el teorema de Jensen de la siguiente manera: sea  $f$  una función analítica en  $|z - z_0| \leq R$  y  $f(z_0) \neq 0$  . Si  $m$  es el número de ceros de  $f$  en el círculo  $|z - z_0| \leq r$  ,  $r \leq R$  , entonces tenemos la

estimación

$$(A.8.2) \quad \left(\frac{R}{r}\right)^m \leq \frac{\max_{|z-z_0| \leq R} (|f(z)|)}{|f(0)|}$$

que es la que hemos aplicado en la sección **2.2.3**.

Otra forma útil de enunciar el teorema de Jensen es la siguiente: supongamos, como antes, una función  $f$  analítica en el disco  $|z| \leq R$ , sin ceros en la circunferencia  $|z|=R$  y con los ceros  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  dentro del disco que dicha circunferencia delimita (donde cada cero está incluido tantas veces como indique su multiplicidad). Supongamos también, como antes, que la función no se anula en el cero, entonces

$$(A.8.3) \quad \log \left| f(0) \frac{R}{z_1} \frac{R}{z_2} \dots \frac{R}{z_n} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\theta})| d\theta$$

Las demostraciones completas de las dos primeras formas del teorema de Jensen se pueden encontrar en **[C1]**, mientras que esta última se puede consultar en **[E]**.

## APÉNDICE 2

Aquí viene el original de Riemann

# BIBLIOGRAFÍA

La bibliografía necesito revisarla entera...

- [A] American Institute of Mathematics, "The Riemann Hypothesis". Existe una copia disponible en la dirección de Internet [X](#).
- [C1] J. Cilleruelo y A. Córdoba "La teoría de los Números" Mondadori 1992.
- [C2] Conrey, J. B., The Riemann Hypothesis. Existe una copia disponible en la dirección de Internet [X](#) buscar "Notices of the AMS".
- [E] H. M. Edwards, H.M., *Riemann's Zeta Function*, .
- [G1] Grosswald, Emil, *Topics from the Theory of Numbers*, 2 ed., Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1984.
- [H1] Hardy, G.H., Sur les Zéros de la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann. C. R. Acad. Sci. Paris 158, 1012-1014 (1914).
- [H2] Hardy, G.H. y Littlewood, J.E., The zeros of Riemann's zeta function on the critical line. Math. Z. 10, 283-317 (1921).
- [H3] Heins, M. Complex Function Theory, Academic Press, New York and London, 1968.
- [J1] Jacobi, C.G.J., Suite de Notices sur les fonctions elliptiques, J. Reine Angew. Math 3, 303-310 (1828). También en "Werke", Vol. 1, pp. 255-263
- [J2] Jorge Jiménez Urroz "La Función Zeta de Riemann; Conjeturas" Memoria [U.A.M.](#)
- [L1] Lehmer, D.N., List of prime numbers from 1 to 10.006.721. Publ. N° 165,

Carnegie Inst. of Washington, Washington, D.C., 1913 (hay una reimpresión por Hafner, New York, 1956).

- [L2] Levinson, N., Redheffer, R. M., *Curso de Variable Compleja*, Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1990.
- [L3] Littlewood, J.E., *The Quickest Proof of the Prime number Theorem*, Acta Arithmetica 18 (1971), 83-86, (en "Collected Papers", Vol. 2).
- 
- 
- 
- [M] Baker, M., Clark, D., *The Prime Number Theorem*. Se puede descargar del sitio de Internet
- ...
- [P1] Perry, J., "Riemann's Hypothesis". Puede ser descargado desde la dirección de Internet <http://www.users.globalnet.co.uk/~perry/maths/riemannshypothesis/riemannshypothe...>
- [P2] Petersen, B.E., "Prime Number Theorem". Versión parcialmente revisada en 2002 de [P3]. Puede descargarse en formato PDF desde el sitio de Internet <http://www....>
- [P3] Petersen, B.E., "Prime Number Theorem". Versión 1996. Puede descargarse en formato PDF desde el sitio de Internet <http://www....>
- [R1] Rademacher, H., *Topics in Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
- [S] Selberg, A., On the zeros of Riemann's zeta-function. Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo No. 10 (1942).

-

Hay que meter un buen libro de referencia sobre teoría de Fourier: Dym y McKean....

Meter el libro de Titchmarsh.