Criba de Eratostenes - Legendre

Germán Bernardo Sacristán

septiembre de 2006

1. Introducción

Dado un conjunto $\mathcal{A}$ de enteros positivos nos planteamos la inocente pregunta: ¿Cuántos primos hay en el conjunto $\mathcal{A}$?

$$\{\text{primos de } \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}$$

Para estimar el nº de primos de $\mathcal{A}$ lo que haremos será ir quitando elementos a $\mathcal{A}$ que no sean primos, para así obtener un conjunto B que siga conteniendo a los primos de $\mathcal{A}$. Y así tendremos que $\#\{\text{primos de } \mathcal{A}\} \leq \#B$.
Bien pues, si al conjunto $\mathcal{A}$ le quitamos los multiplos de 2 distintos de 2 entonces no le habremos quitado ningún primo. Esto dicho de otra manera: Si a $\mathcal{A}$ le quitamos los multiplos de 2 y le devolvemos el 2 en el caso de habérsele quitado, entonces no le habramos quitado ningún primo. Esto usando la siguiente notación:

$$\mathcal{A}_d = \{a \in \mathcal{A} \,:\, d|a\}$$

se puede expresar de la siguiente manera:

$$\{\text{primos } \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}/\mathcal{A}_2 \,\cup\, \{2\} \cap \mathcal{A}$$

Lo mismo pasa si también le quitamos los multiplos de 3 y le devolvemos el 3 en el caso de habersele quitado:

$$\{\text{primos } \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}/(\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3) \,\cup\, \{2,3\} \cap \mathcal{A}$$

En general, si al conjunto $\mathcal{A}$ le quitamos los multiplos de los primos menores que z, excepto los primos menores que z, no le quitaremos ningún primo:

$$\{\text{primos } \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A}/\cup_{p<z}\mathcal{A}_p \,\cup\, \{\text{primos } < z \in \mathcal{A}\}$$

Observamos que si $z \geq \sqrt{N}$, $(N = \max_{a\in\mathcal{A}} a)$ podríamos decir que 'casi' se tiene la igualdad, ya que el 1 es el único no primo que no quitamos.
Tomando cardinales llegamos a que:

$$\#\{\text{primos} \in \mathcal{A}\} \leq \#(A/\cup_{p<z}\mathcal{A}_p) + \#\{\text{primos} \in \mathcal{A} < z\}$$

Usaremos la notación: $S(\mathcal{A}, z) = \#(A/\cup_{p<z}\mathcal{A}_p)$
Luego:

$$\#\{\text{primos} \in \mathcal{A}\} \leq S(\mathcal{A}, z) + \#\{\text{primos } \in \mathcal{A} < z\} \tag{1}$$

Podemos dar una formula para $S(\mathcal{A}, z)$ usando el principio de inclusión exclusión. Observando que:

$$\mathcal{A}_{p_1} \cap \mathcal{A}_{p_2} \cap \ldots \cap \mathcal{A}_{p_r} = \mathcal{A}_{p_1 p_2 \cdots p_r}$$

y denotando

$$P(z) = \prod_{p<z} p$$

obtenemos: (Ver Apendice)

$$S(\mathcal{A}, z) = \#(\mathcal{A}/ \cup_{p<z} \mathcal{A}_p) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\mathcal{A}_d$$

Ahora se nos plantea el siguiente problema: Si tomamos z muy pequeño la estimación es muy burda, y si lo tomamos muy grande $S(\mathcal{A}, z)$ es muy difícil de calcular (ya que tendremos muchos sumandos). Así que lo que haremos será estimar $S(\mathcal{A}, z)$ lo mejor que podamos.

2. Distintas formas de estimar $S(\mathcal{A}, z)$

Hay numerosas maneras de abordar el problema (de cómo estimar $S(\mathcal{A}, z)$). Simplemente como curiosidad citamos el punto de partida de algunas cribas:

1. La criba de Eratóstenes - Legendre: Para estimar $S(\mathcal{A}, z)$ lo que hace es escribir

$$\#\mathcal{A}_d = X\frac{\omega(d)}{d} + r_d \quad \text{donde } \omega \text{ es multiplicativa}$$

2. La criba de Brun: Para estimar $\sum \mu(d)\#\mathcal{A}_d$ no considera todos los sumandos, ya que $\forall k$ par y $\forall i$ impar se tiene que

$$\sum_{d|P(z);\,\nu(d)\leq i} \mu(d)\#\mathcal{A}_d \leq \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\mathcal{A}_d \leq \sum_{d|P(z);\,\nu(d)\leq k} \mu(d)\#\mathcal{A}_d$$

(para ver la justificación de esta formula ver Apéndice)

3. La criba de Selberg: Esta es una criba no combinatoria, ya que para estimar $S(\mathcal{A}, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#A_d$ no omite ningún término. Lo que hace es remplazar $\mu(d)$ por otra función, λ_d tal que:

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\mathcal{A}_d \leq \sum_{d|P(z)} \lambda_d\#\mathcal{A}_d \tag{2}$$

Veamos con un ejemplo, cómo se consiguen estas funciones:

$$S(\mathcal{A}, 4) = \sum_{a\in\mathcal{A};\,(a,6)=1} 1$$

Luego $\forall\alpha\,\beta$ se tiene

$$S(\mathcal{A}, 4) \leq \sum_{a\in\mathcal{A};\,(a,6)=1} 1 + \sum_{a\in\mathcal{A};\,(a,6)=2} (1+\alpha)^2 + \sum_{a\in\mathcal{A};\,(a,6)=3} (1+\beta)^2 + \sum_{a\in\mathcal{A};\,(a,6)=6} (1+\alpha+\beta)^2 =$$

$= \#\mathcal{A}/(\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3) + (1+\alpha)^2 \#\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_6 + (1+\beta)^2 \#\mathcal{A}_3/\mathcal{A}_6 + (1+\alpha+\beta)^2 \#\mathcal{A}_6$

Por tanto $\forall \alpha,\ \beta$

$$S(\mathcal{A}, 4) \leq \#\mathcal{A}_1 + (\alpha^2 + 2\alpha)\#\mathcal{A}_2 + (\beta^2 + 2\beta)\#\mathcal{A}_3 + 2\alpha\beta\#\mathcal{A}_6$$

lo que nos da toda una familia de funciones λ_d que satisfacen (2). De manera parecida se hace para el caso general, obteniendo una famila de estimaciones para $S(\mathcal{A}, z)$. El siguiente paso de la criba de Selberg es buscar la estimación óptima, que dependerá de cada problema.

Nosotros nos vamos a ocupar de estudiar la criba de Eratóstenes - Legendre para el caso en que ω admite unas ciertas hipotesis. Pero antes empecemos entendiendo bien como funciona dicha criba para un caso sencillo:

3. La criba de Eratostenes-Legrende para el caso en que $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, n\}$

Recordamos que $\pi(N) = \#\{\text{primos } \leq N\}$. Así para este caso (1) nos queda:

$$\pi(N) \leq S(\mathcal{A}, z) + \pi(z-1)$$

Observamos que

$$\mathcal{A}_d = \{kd:\ kd \leq N\} = \{kd:\ k \leq [\frac{N}{d}]\}$$

luego $\#\mathcal{A}_d = [\frac{N}{d}]$ de este modo si escribimos:

$$\#\mathcal{A}_d = \left[\frac{N}{d}\right] = \frac{N}{d} + \underbrace{\left[\frac{N}{d}\right] - \frac{N}{d}}_{r_d} \qquad |r_d| \leq 1$$

$S(\mathcal{A}, z)$ nos queda:

$$S(\mathcal{A}, z) = N \sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)}{d} + \sum_{d|P(z)} \mu(d) r_d$$

Vamos a estimar primero $\sum_{d|P(z)} \mu(d) r_d$ y luego $\sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)}{d}$ para así luego estimar $S(\mathcal{A}, z)$.
Como $|r_d| \leq 1$ tenemos que:

$$|\sum_{d|P(z)} \mu(d) r_d| \leq \sum_{d|P(z)} |r_d| \leq \sum_{d|P(z)} 1 = \#\{\text{divisores de } P(z)\} = 2^{\pi(z-1)} << 2^z$$

Vayamos ahora con el otro sumando:

$$\sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{n \text{ con factores primos } \leq z} \frac{\mu(n)}{n} = \prod_{p<z} (1 - \frac{1}{p}) \tag{3}$$

Tomando logaritmos podemos hacer más asequible este último producto:

$$\log \prod_{p<z}(1-\frac{1}{p}) = \sum_{p<z} \log(1-\frac{1}{p}) = -\sum_{p<z}\frac{1}{p} + \overbrace{\sum_{p<z} O(\frac{1}{p^2})}^{O(1)}$$

Veamos cuánto vale $\sum 1/p$ ayudándonos de la sumación por partes[1] y de la formula de Mertens:

$$\sum_{p\leq z}\frac{1}{p} = \sum_{p\leq z}\frac{\log p}{p}\frac{1}{\log p} = \sum_{p\leq z} c(n)g(n) = C(z)g(z) - \int_2^z C(t)g'(t)dt$$

$$c(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\log n}{n} & \text{si } n \text{ es primo} \\ 0 & \text{si no} \end{array} \right\} \qquad C(t) = \sum_{n\leq t} c(t) = \underbrace{\sum_{p\leq t}\frac{\log p}{p} = \log t + O(1)}_{\text{formula de Mertens}}$$

$$g(n) = \frac{1}{\log n} \qquad g'(n) = -\frac{1}{n(\log n)^2}$$

Así:

$$\sum_{p\leq z}\frac{1}{p} = 1 + \frac{O(1)}{\log z} + \underbrace{\int_2^z \frac{1}{t\log t}dt}_{\log\log z - \log\log 2} + \underbrace{\int_2^z \frac{O(1)}{t(\log t)^2}dt}_{O(1)} = \log\log z + O(1)$$

Todo esto implica que $\log \prod_{p<z}(1-\frac{1}{p}) = -\log\log z + O(1)$. Así que tomando exponenciales:

$$\prod_{p<z}(1-\frac{1}{p}) = e^{-\log\log z}e^{O(1)} = O((\log z)^{-1})$$

Por tanto (3) nos queda:

$$\sum_{d|P(z)}\frac{\mu(d)}{d} << (\log z)^{-1}$$

Luego

$$S(\mathcal{A}, z) = N\overbrace{\sum_{d|P(z)}\frac{\mu(d)}{d}}^{<<(\log z)^{-1}} + \overbrace{\sum_{d|P(z)} r_d}^{<<2^z} << \frac{N}{\log z} + 2^z \qquad (4)$$

Por tanto

$$\pi(N) \leq S(\mathcal{A}, z) + \overbrace{\pi(z-1)}^{<<z} << \frac{N}{\log z} + 2^z$$

[1]En el apendice enunciamos y demostramos el lema de Abel de sumación por partes

Esta estimación tomando $z = \frac{\log N - \log\log N}{\log 2}$ queda:

$$\pi(N) << \frac{N}{\log\log N}$$

Visto este caso particular, reflexionemos un momento y centrémonos en el caso que nos interesa:

4. Criba de Eratostenes-Legrende en el caso en que ω satisface unas ciertas hipotesis

4.1. El resultado

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de enteros positivos. Nuestro objetivo es dar una fórmula asintótica para

$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\mathcal{A}_d$$

suponiendo que se satisfacen las siguientes hipotesis:

$$\#\mathcal{A}_d = X\frac{\omega(d)}{d} + r_d \qquad \omega \text{ es una funcion multiplicativa} \tag{5}$$

y además ω satisface:

$$0 \leq \frac{\omega(p)}{p} \leq 1 - 1/A_1 \tag{6}$$

$$-L \leq \sum_{p<z} \frac{\omega(p) - \chi}{p} \log p \leq A_2 \tag{7}$$

Donde A_1, A_2 y L son constantes ≥ 1. Al parametro χ le llamaremos dimensión de la criba y supondremos que verifica

$$0 \leq \chi < 1/2$$

Observemos que esta hipótesis combinada con la formula de Mertens nos dice que:

$$\sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} \log p = \chi \log z + O(1) \tag{8}$$

También supondremos que el conjunto $\mathcal{A}$ no tiene elementos demasiado grandes:

$$\kappa = \max_{a\in\mathcal{A}} a \leq A_3 X \qquad \text{donde } A_3 \text{ es una constante} \geq 1 \tag{9}$$

y que los restos r_d no son muy grandes:

$$|r_d| \leq A_4\omega(d) \qquad \text{donde } A_4 \geq 1 \tag{10}$$

Bajo estas hipotesis se tiene el siguiente resultado.
Se define f como la solución continua, de

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(s) = s^{-\chi} & \text{para } 0 < s \leq 1 \\ sf'(s) = \chi f(s-1) - \chi f(s) & \text{para } s > 1 \end{array} \right\}$$

En el apendice se demuestra que para $s \to \infty$: $\quad f(s) = e^{-\chi\gamma}\Gamma(1-\chi) + O(e^{-s})$
Entonces:

Teorema 1.

$$S(\mathcal{A}, z) = \frac{e^{\gamma\chi}}{\Gamma(1-\chi)} W(z) X\{f(\varsigma) + O(\frac{(\varsigma+1)L}{1-2\chi}(\log z)^{2\chi-1})\}$$

donde $\gamma = 0{,}577\ldots$ es la constante de Euler,

$$\varsigma = \frac{\log \kappa}{\log z}, \qquad W(z) = \prod_{p|P(z)} (1 - \frac{\omega(p)}{p})$$

y la constante de la O depende solo de A_1, A_2, A_3, A_4

4.2. Estrucura de la demostración

Proposición 2.

$$S(\mathcal{A}, z) = XCf(\varsigma)(\log z)^{-\chi} + O(X\frac{(\varsigma+1)L}{1-2\chi}(\log \kappa)^{\chi-1})$$

donde

$$C = \frac{1}{\Gamma(1-\chi)} \prod_p (1 - \frac{\omega(p)}{p})(1 - \frac{1}{p})^{-\chi} \quad \varsigma = \frac{\log \kappa}{\log z}$$

y la constante del símbolo O depende solo de A_1, A_2 A_3, A_4

Observamos que el teorema 1 se deduce fácilmente de esta proposición: Basta ver que

$$\frac{e^{\gamma\chi}}{\Gamma(1-\chi)} W(z) = C(\log z)^{-\chi}\{1 + O(\frac{L}{\log z})\}$$

Pero esto es una simple consecuencia de la fórmula de Mertens

$$\prod_{p<z} (1 - \frac{1}{p}) = \frac{e^{-\gamma}}{\log z}(1 + O(\frac{1}{\log z}))$$

y de la estimación

$$\Gamma(1-\chi)C = \prod_{p<z} (1 - \frac{\omega(p)}{p})(1 - \frac{1}{p})^{-\chi}\{1 + O(\frac{L}{\log z})\}$$

Nuestra tarea ahora va a ser demostrar la proposicion 2. ¿Cómo lo vamos a hacer?
Recordamos

$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#\mathcal{A}_d$$

Observamos que para $d > \kappa$ se tiene que $\#\mathcal{A}_d = 0$, por tanto:

$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_{d|P(z);\, d\leq\kappa} \mu(d)\#A_d$$

Así por (5), tenemos que:

$$S(\mathcal{A}, z) = \underbrace{X \sum_{d|P(z);\, d\leq\kappa} \frac{\mu(d)\omega(d)}{d}}_{\text{termino principal}} + \underbrace{\sum_{d|P(z);\, d\leq\kappa} \mu(d)r_d}_{\text{término de error}}$$

Para probar la proposición haremos lo siguiente:
Primero estimaremos el término de error y comprobaremos que

$$\text{termino de error} = O(X(\log\kappa)^{\chi-1}) \tag{11}$$

y después estudiaremos el termino principal, y demostraremos que satisface la siguiente fórmula asintótica:

$$\text{termino principal} = XCf(\varsigma)(\log z)^{-\chi} + O(X\frac{(\varsigma+1)L}{1-2\chi}(\log\kappa)^{\chi-1}) \tag{12}$$

y veremos además que los simbolos de las O's solo dependen de las constantes A_1, A_2, A_3, A_4. Así una vez hecho todo esto quedará demostrada la proposicion 2, y por tanto también el teorema 1.

4.3. Una estimación para el término de error

Lema 3.

$$\sum_{d|P(z);\, d\leq x} |r_d| = O(x(\log x)^{\chi-1})$$

y el símbolo de la O solo depende de A_2 y A_4

Veamos como a partir de este lema se demuestra (11): Poniendo $x = \kappa$ obtenemos:

$$|\sum_{d|P(z)} \mu(d)r_d| \leq \sum_{d|P(z);\, d\leq\kappa} |r_d| << \kappa(\log\kappa)^{\chi-1} \underbrace{\leq}_{(6)} A_3X(\log\kappa)^{\chi-1}$$

Por tanto el término de error es una $O(X(\log\kappa)^{\chi-1})$ donde la constante de O solo depende de A_2,A_3 y A_4.

Demostración (Lema 3): Por la hipótesis (10) tenemos que:

$$\sum_{d\le x, d|P(z)} |r_d| \le A_4 \sum_{d\le x, d|P(z)} \omega(d)$$

Ahora, vamos a estimar $\sum\omega(d)\log d$ para luego poder obtener una estimación para $\sum\omega(d)$ utilizando sumación por partes:
Sea λ la función de von Mangoldt asociada a ω (Ver Apéndice):

$$\omega(d)\log d = \sum_{n|d}\omega(n)\lambda(d/n)$$

Como ω es multiplicativa, el soporte de λ esta contenido en el conjunto de las potencias de primos, y además $\lambda(p) = \omega(p)\log p$. De este modo:

$$\sum_{\substack{d\le x\\ d|P(z)}} \omega(d)\log d = \sum_{\substack{d\le x\\ d|P(z)}} \sum_{n|d}\omega(n)\lambda(d/n) \underbrace{=}_{d=mn} \sum_{\substack{n|P(z)\\ n\le x}} \omega(n) \sum_{\substack{m\le x/n\\ nm|P(z)}} \lambda(m) =$$

$$= \sum_{\substack{n|P(z)\\ n\le x}} \omega(n) \sum_{\substack{p\le x/n\\ pn|P(z)}} \omega(p)\log p \le \sum_{\substack{n|P(z)\\ n\le x}} \omega(n) \sum_{p\le x/n} \omega(p)\log p \quad (13)$$

A partir de (8), usando sumación por partes vamos a demostrar que $\sum_{p\le z}\omega(p)\log p << z$.

$$\sum_{p\le z}\omega(p)\log(p) = \sum_{p\le z}\frac{\omega(p)\log p}{p}p = \sum_{n\le z}c(n)g(n) = C(z)g(z) - \int_2^z C(t)g'(t)dt$$

$$\text{Donde} : c(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\omega(n)\log n}{n} & \text{si } n \text{ es primo} \\ 0 \quad \text{si no} & \end{array} \right\} \quad g(n) = n$$

$$C(N) := \sum_{n\le N} c(n) = \sum_{p\le N}\frac{\omega(p)\log(p)}{p} \underbrace{=}_{(8)} \chi\log N + O(1)$$

Por tanto:

$$\sum_{p\le z}\omega(p)\log p = \chi z\log z + \underbrace{zO(1)}_{O(z)} - \underbrace{\chi\int_2^z \log t dt}_{\chi z\log z - \chi 2\log 2 + O(z)} - \underbrace{\int_2^z O(1)dt}_{O(z)} = O(z)$$

Luego (13) nos queda:

$$\sum_{\substack{d\le x\\ d|P(z)}} \omega(d)\log d << x \sum_{\substack{n\le x\\ n|P(z)}} \frac{\omega(n)}{n} \le x\prod_{p\le x}(1 + \frac{\omega(p)}{p}) \le$$

$$\leq x\prod_{p\leq x}(1+\omega(p)/p+\frac{(\omega(p)/p)^2}{2!}+\ldots)=x\prod_{p\leq x}\exp(\omega(p)/p)=x\exp(\sum_{p\leq x}\omega(p)/p) \tag{14}$$

Demostremos ahora que $\sum_{p\leq x}\omega(p)/p < \chi\log\log z+O(1)$ usando (8) y sumación por partes:

$$\sum_{p\leq z}\frac{\omega(p)}{p}=\sum_{p\leq z}\frac{\omega(p)\log p}{p}\frac{1}{\log p}=\sum_{n\leq z}c(n)g(n)=C(z)g(z)-\int_2^z C(t)g'(t)dt$$

$$\text{Donde: } c(n)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{\omega(n)\log n}{n} & \text{si } n \text{ es primo}\\ 0 \quad \text{si no} & \end{array}\right\} \quad g(n)=1/\log n$$

$$C(N):=\sum_{n\leq N}c(n)=\sum_{p\leq N}\frac{\omega(p)\log(p)}{p}\underbrace{=}_{(8)}\chi\log N+O(1) \quad g'(n)=-\frac{1}{n(\log n)^2}$$

Por tanto:

$$\sum_{p\leq z}\frac{\omega(p)}{p}=\chi+\frac{O(1)}{\log z}+\underbrace{\chi\int_2^z\frac{1}{t\log t}dt}_{\chi\log\log z-\chi\log\log 2}-\underbrace{\int_2^z\frac{O(1)}{t(\log t)^2}dt}_{O(1)}=\chi\log\log z+O(1) \tag{15}$$

Luego (14) queda:

$$\sum_{\substack{d\leq x\\ d|P(z)}}\omega(d)\log d << x\exp(\chi\log\log x+O(1)) << x(\log x)^{\chi} \tag{16}$$

Gracias a la estimacion anterior, podemos usando sumación por partes obtener una estimación para $\sum_{d|P(z),d\leq x}\omega(d)$, y por tanto también para $\sum_{d|P(z),d\leq x}|r_d|$:

$$\sum_{d|P(z);\,d\leq x}\omega(d)=\sum_{d|P(z);\,d\leq x}\omega(d)\log d\frac{1}{\log d}=\sum_{n\leq x}c(n)g(n)=C(x)g(x)-\int_1^x C(t)g'(t)$$

$$\text{Donde: } c(n)=\left\{\begin{array}{ll}\omega(d)\log d & \text{si } d|P(z)\\ 0 \text{ si no} & \end{array}\right\} \quad g(n)=\frac{1}{\log n}$$

$$C(N)=\sum_{n\leq N}c(n)=\sum_{d|P(z);\,d\leq N}\omega(d)\log d\underbrace{<<}_{(16)}x\log^{\chi}x \qquad g'(n)=-\frac{1}{n\log^2 n}$$

Por tanto:

$$\sum_{d|P(z);\,d\leq x}\omega(d) << x(\log x)^{\chi-1}+\int_1^x\frac{1}{(\log t)^{2-\chi}}dt << x(\log x)^{\chi-1}$$

Luego:

$$\sum_{d|P(z);d\leq x} |r_d| << x(\log x)^{\chi-1} \quad \Box \tag{17}$$

4.4. Fórmula asintótica para la parte principal

Definiremos $g(d) = \frac{\mu(d)\omega(d)}{d}$ y

$$G(x,z) := \sum_{d<x\, d|P(z)} g(d) = \sum_{d<x\, d|P(z)} \frac{\mu(d)\omega(d)}{d}$$

y denotaremos

$$s(x,z) = \frac{\log x}{\log z} = \log_z x$$

Cuando se sobreentienda escribiremos s en lugar de $s(x,z)$. Observamos que con esta notación: $\varsigma = s(\kappa, z)$

De este modo, tenemos la siguiente fórmula asintótica para G:

Proposición 4. *Para $x \geq 2, z \geq 2$ tenemos:*

$$G(x,z) = Cf(s)(\log z)^{-\chi} + O(\frac{(s+1)L}{1-2\chi}(\log x)^{\chi-1})$$

donde

$$C = \frac{1}{\Gamma(1-\chi)} \prod_p (1 - \frac{\omega(p)}{p})(1 - \frac{1}{p})^{-\chi}$$

y la constante del símbolo O depende solo de A_1 y A_2

Veamos como a partir de esta proposición se demuestra (12), y por tanto se completa la demostración de la proposición 2:

$$|\text{término principal}| = X \sum_{d|P(z);\, d\leq\kappa} \frac{\mu(d)\omega(d)}{d} = XG(\kappa,z) =$$

$$= XCf(\varsigma)(\log z)^{-\chi} + O(\frac{(\varsigma+1)L}{1-2\chi}(\log x)^{\chi-1})$$

y la constante de la O depende sólo de A_1 y A_2.

Para probar la proposición 4, vamos a necesitar la ayuda de algunos lemas:

Definimos:

$$T(x,z) := \int_1^x \frac{G(t,z)}{t} dt \quad \text{si } x \geq 1 \qquad 0 \quad \text{si no}$$

Observemos que para $x \geq 1$:

$$T(x,z) = \int_1^x \frac{G(t,z)}{t} dt = \sum_{i=2}^{[x]} \int_{i-1}^{i} \frac{G(t,z)}{t} dt + \int_{[x]}^{x} \frac{G(t,z)}{t} dt =$$

Como G es constante en los intervalos $(k, k+1]$ podemos sacar las G fuera de las integrales y así queda:

$$T(x,z) = \sum_{i=2}^{[x]} \sum_{d|P(z)\, d<i} g(d) \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t} dt + \sum_{d<x\, d|P(z)} g(d) \int_{[x]}^{x} \frac{1}{t} dt =$$

$$\sum_{d|P(z)\, d<x} g(d) \int_d^x \frac{1}{t} dt = \sum_{d|P(z)\, d<x} g(d) \log \frac{x}{d}$$

Luego si $x \geq 1$:

$$T(x,z) = \int_1^x \frac{G(t,z)}{t} dt = \sum_{d|P(z)\, d<x} g(d) \log \frac{x}{d}$$

Entre T y G hay la siguiente relación:

Lema 5. *Para $x \geq 2$ y $z \geq 2$ se tiene que:*

$$G(x,z) \log x = (1-\chi) T(x,z) + \chi T(\frac{x}{z}, z) + O(L \log^{\chi} x) \tag{18}$$

Gracias a este lema, cuando tengamos una fórmula asintótica para T, fácilmente podremos obtener una fórmula asintótica para G.

Demostración: Sea λ la función generalizada de von Mangoldt asociada a g:

$$g(d) \log d = \sum_{n|d} g(n) \lambda(d/n)$$

Sabemos que como g es multiplicativa, el soporte de λ es el conjunto de las potencias de los primos. Y además $\lambda(p) = g(p) \log p = -\frac{\omega(p)}{p} \log p$. Así que:

$$\sum_{\substack{d<x \\ d|P(z)}} g(d) \log d = \sum_{\substack{d<x \\ d|P(z)}} \sum_{n|d} g(n) \lambda(d/n) = \sum_{\substack{n|P(z) \\ n<x}} g(n) \sum_{\substack{m<x/n \\ mn|P(z)}} \lambda(m) =$$

$$= - \sum_{\substack{n|P(z)\\ n<x}} g(n) \sum_{\substack{p<\frac{x}{n}\\ p<z;\; p\nmid n}} \frac{\omega(p)}{p}\log p =$$

$$= - \sum_{\substack{n|P(z)\\ n<x}} g(n) \underbrace{\sum_{p<\text{mín}\{\frac{x}{n},z\}} \frac{\omega(p)}{p}\log p}_{(8)\quad \chi\log \text{mín}\{\frac{x}{d},z\}+O(1)} + \overbrace{\sum_{\substack{n|P(z)\\ n<x}} g(n) \sum_{\substack{p<\text{mín}\{\frac{x}{n},z\}\\ p|n}} \frac{\omega(p)}{p}\log p}^{\text{error}_1} =$$

$$= -\chi \sum_{n|P(z)\, n<x} g(n)\log(\text{mín}\{\frac{x}{d},z\}) + \overbrace{\sum_{n|P(z)\, n<x} g(n)O(1)}^{\text{error}_2} + \text{error}_1$$

Así que:

$$\sum_{d<x\, d|P(z)} g(d)\log d = -\chi \sum_{n|P(z)\, n<x} g(n)\log(\text{mín}\{\frac{x}{d},z\}) + \text{error}_2 + \text{error}_1$$

Vamos a ver de qué orden son los errores:

$$|\text{error}_2| << \sum_{d<x}|g(d)| \leq \sum_{d \text{ con factores primos } <x} |g(d)| = \prod_{p<x}(1+\frac{\omega(p)}{p}) \leq$$

$$\leq \prod_{p<x}\exp(\omega(p)/p) = \exp(\sum_{p<x}\frac{\omega(p)}{p}) \underbrace{<<}_{\text{por (15)}} \log^{\chi} x$$

$$|\text{error}_1| \leq \sum_{d<x}|g(d)|\sum_{p|d}\frac{\omega(p)}{p}\log p \leq \sum_{d<x}\frac{\omega(d)}{d}\sum_{p<x}(\frac{\omega(p)}{p})^2\log p << \sum_{d<x}\frac{\omega(d)}{d} << (\log x)^{\chi}$$

Por tanto:

$$\sum_{d<x;\, d|P(z)} g(d)\log d = -\chi \sum_{d|P(z)\, d<x} g(d)\log(\text{mín}\{\frac{x}{d},z\}) + O((\log x)^{\chi})$$

Sumando $\sum_{d|P(z)\, d<x} g(d)\log\frac{x}{d}$ a ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$\log x \overbrace{\sum_{d<x\, d|P(z)} g(d)}^{G(x,z)} =$$

$$= \chi \sum_{d|P(z)\, d<x} \overbrace{g(d)(\log\frac{x}{d} - \log(\text{mín}\{\frac{x}{d},z\}))}^{\text{si } \frac{x}{d}\leq z \text{ es } =0} + (1-\chi) \overbrace{\sum_{d|P(z)\, d<x} g(d)\log\frac{x}{d}}^{T(x,z)} + O((\log x)^{\chi}) =$$

$$= \chi \sum_{d|P(z)\, d<x/z} g(d) \log \frac{x/z}{d} + (1-\chi)T(x,z) + O((\log x)^{\chi}) \quad \square$$

Se tiene la siguiente formula asintótica para T:

Proposición 6. *Para $x \geq 2$ y $z \geq 2$ tenemos que:*

$$T(x,z) = CF(s)(\log z)^{1-\chi} + O(\frac{(s+1)L}{1-2\chi} \log^{\chi} x)$$

Donde

$$C = \frac{1}{\Gamma(1-\chi)} \prod_p (1 - \frac{\omega(p)}{p})(1-\frac{1}{p})^{-\chi}; \quad F(s) := \int_0^s f(u)du$$

y la constante de la O depende solo de A_1 y A_2.

Vamos a posponer esta demostración , y vamos a ver como se demuestra la proposicion 4, a apartir de esta proposición y del lema 5.
Demostración (proposición 4):
Es fácil ver[2] que la función $F(s)$ es de clase C^1 y satisface las siguientes ecuaciones:

$$F(s) = \frac{1}{1-\chi} s^{1-\chi} \qquad \text{para } 0 < s \leq 1 \tag{19}$$

$$sF'(s) = (1-\chi)F(s) + \chi F(s-1) \qquad \text{para } s > 1 \tag{20}$$

$$\frac{d}{ds}(\frac{F(s)}{s^{1-\chi}}) = \chi \frac{F(s-1)}{s^{2-\chi}} \qquad \text{para } s > 1 \tag{21}$$

Por el lema 5 sabemos que $\forall x \geq 2$, $z \geq 2$ se tiene que:

$$G(x,z) = (1-\chi)\frac{T(x,z)}{\log x} + \chi \frac{T(\frac{x}{z}, z)}{\log x} + O(L \log^{\chi - 1})$$

Y por la proposición 6 sabemos que:

$$\frac{T(x,z)}{\log x} = CF(s)s^{-1}(\log z)^{-\chi} + O(\frac{(s+1)L}{1-2\chi} \log^{\chi-1} x)$$

y que:

$$\frac{T(\frac{x}{z}, z)}{\log x} = CF(s-1)s^{-1}(\log z)^{-\chi} + O(\frac{sL}{1-2\chi} \frac{\log^{\chi} x/z}{\log x})$$

Por tanto:

$$G(x,z) = Cs^{-1}\{(1-\chi)F(s) + \chi F(s-1)\}(\log z)^{-\chi} + O(\frac{(s+1)L}{1-2\chi}(\log x)^{\chi-1} + L(\log x)^{\chi-1})$$

[2] en el apéndice lo demostramos

Y por la propiedad (20) de F, junto con el hecho de que $F' = f$, tenemos que:

$$G(x,z) = Cf(s)(\log z)^{-\chi} + O(\frac{(s+1)L}{1-2\chi}(\log x)^{\chi-1}) \quad \square$$

Para que quede completa la demostración de la proposición 4, nos falta demostrar la proposicion 6:

¿Cómo probaremos dicha proposición?

Lo probaremos por inducción sobre s: El siguiente lema, por decirlo de alguna manera demuestra la proposición pero solo para el principio. Así que nos es ideal para poner en marcha la inducción:

Lema 7. *Para $z \geq x \geq 2$ se tiene:*

$$T(x,z) = \frac{C}{1-\chi}(\log x)^{1-\chi} + O(\frac{L}{1-2\chi}\log^{\chi} x)$$

y la constante del símbolo O depende solo de A_1, A_2.

Demostración: Observamos que si $z \geq t$ entonces:

$$\left\{ \begin{array}{c} d<t \\ d|P(z) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} d<t \text{ libres de cuadrados} \\ \text{con todos los factores primos} < z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} d<t \\ \text{libres de cuadrados} \end{array} \right\}$$

Por tanto, para $z \geq t$:

$$G(t,z) = \sum_{d<t\, d|P(z)} g(d) = \sum_{d<t \text{ libre de cuadrados}} g(d) = \sum_{d<t} g(d) = G(t,t) =: G(t)$$

Analogamente:

$$T(t,z) = \sum_{d<t} g(d)\log\frac{t}{d} = T(t,t) =: T(t)$$

Si en el lema 5 sustituimos x y z por t obtenemos:

$$\underbrace{G(t,t)}_{G(t)}\log t = (1-\chi)\underbrace{T(t,t)}_{T(t)} + \chi\underbrace{T(1,t)}_{0} + O(L\log^{\chi} t)$$

Por tanto:

$$G(t)\log t - (1-\chi)T(t) << L\log^{\chi} t \qquad (22)$$

Si dividimos en la relación anterior por $t(\log t)^{2-\chi}$ obtenemos:

$$\frac{G(t)}{t(\log t)^{1-\chi}} - (1-\chi)\frac{T(t)}{t(\log t)^{2-\chi}} << \frac{L}{t(\log t)^{2-2\chi}}$$

Integrando respecto a t desde 2 hasta x:

$$\int_2^x \frac{G(t)}{t(\log t)^{1-\chi}}dt - (1-\chi)\int_2^x \frac{T(t)}{t(\log t)^{2-\chi}}dt = c_1 + O(\frac{L}{1-2\chi}(\log x)^{2\chi-1}) \tag{23}$$

Por otro lado como $\frac{\partial}{\partial t}T(t) = \frac{G(t)}{t}$ se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{T(t)}{(\log t)^{1-\chi}}) = \frac{G(t)}{t(\log t)^{1-\chi}} - (1-\chi)\frac{T(t)}{t(\log t)^{2-\chi}}$$

Integrando respecto a t desde 2 hasta x obtenemos:

$$\frac{T(x)}{(\log x)^{1-\chi}} - \frac{T(2)}{(\log 2)^{1-\chi}} = \int_2^x \frac{G(t)}{t(\log t)^{1-\chi}}dt - (1-\chi)\int_2^x \frac{T(t)}{t(\log t)^{2-\chi}}dt$$

Por tanto, usando (23), llegamos a:

$$\frac{T(x)}{(\log x)^{1-\chi}} - \log^{\chi} 2 = c_1 + O(\frac{L}{1-2\chi}(\log x)^{2\chi-1})$$

Multiplicando por $(\log x)^{1-\chi}$ obtenemos:

$$T(x) = (\log x)^{1-\chi}c_2 + O(\frac{L}{1-2\chi}\log^{\chi} x)$$

Donde $c_2 = c_1 + \log^{\chi} 2$
Calculemos la contante c_2. Si en (22) cambiamos la t por la x, dividimos por $\log x$ y sustituimos $T(x)$ por $c_2(\log x)^{1-\chi} + O(\frac{L}{1-2\chi}\log^{\chi} x)$ obtenemos:

$$G(x) = (1-\chi)c_2(\log x)^{-\chi} + O(\frac{L}{1-2\chi}(\log x)^{\chi-1}) \qquad \text{para } x \geq 2 \tag{24}$$

Por otro lado, al ser g multiplicativa, para $s > 0$ se tiene:

$$\prod_p (1 + \frac{g(p)}{p^s} + \frac{g(p^2)}{p^{2s}} + \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

Así:

$$\prod_p (1 - \frac{\omega(p)}{p^{s+1}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)[-x^{-s}]_{x=n}^{\infty} = s\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\int_n^{\infty} \frac{1}{x^{s+1}}dx =$$

$$= s\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{s+1}}\sum_{n<x} g(n) = s\int_1^{\infty} \frac{G(x)}{x^{s+1}}dx = s\int_1^2 \frac{G(x)}{x^{s+1}}dx + s\int_2^{\infty} \frac{G(x)}{x^{s+1}}dx$$

estimando la segunda integral usando (24) obtenemos:

$$\prod_p (1 - \frac{\omega(p)}{p^{s+1}}) = O(s) + (1-\chi)c_2 s\int_2^{\infty} \frac{\log^{-\chi} x}{x^{s+1}}dx + O(\frac{Ls}{1-2\chi}\int_2^x \frac{(\log x)^{\chi-1}}{x^{s+1}}dx) =$$

$$= (1-\chi)c_2 s^\chi \Gamma(1-\chi) + O(\frac{L}{1-2\chi}s^{1-\chi})$$

Por tanto:

$$(1-\chi)c_2\Gamma(1-\chi) = s^{-\chi}\prod(1-\frac{\omega(p)}{p^{s+1}}) + O(\frac{L}{1-2\chi}s^{1-2\chi})$$

Ya que $\text{lím}_{s\to 0^+} s\zeta(s+1) = 1$, si hacemos tender s a 0 llegamos a:

$$(1-\chi)c_2\Gamma(1-\chi) = \prod_p(1-\frac{\omega(p)}{p})(1-\frac{1}{p})^{-\chi}$$

y esto completa la prueba del lema. □

El siguiente lema nos da una fórmula de recurrencia para las T, por tanto nos será muy util para nuestra inducción:

Lema 8. *Para $x \geq y \geq 2$ y $z \geq 2$ tenemos:*

$$\frac{T(x,z)}{(\log x)^{1-\chi}} = \frac{T(y,z)}{(logy)^{1-\chi}} + \chi\int_y^x \frac{T(t/z,z)}{t(\log t)^{2-\chi}}dt + O(\frac{L(\log y)^{2\chi-1}}{1-2\chi}) \tag{25}$$

y la constante del simbolo O depende solo de A_1, A_2.

Escribimos (18) cambiando x por t y dividiendo por $t(\log t)^{2-\chi}$.

$$\frac{G(t,z)}{t(\log t)^{1-\chi}} = (1-\chi)\frac{T(t,z)}{t(\log t)^{2-\chi}} + \frac{\chi T(t/z,z)}{t(\log t)^{2-\chi}} + \frac{O(L\log^\chi t)}{t(\log t)^{2-\chi}}$$

Si integramos respecto a t desde y hasta x obtenemos:

$$\int_y^x \frac{G(t,z)}{t(\log t)^{1-\chi}}dt = (1-\chi)\int_y^x \frac{T(t,z)}{t(\log t)^{2-\chi}}dt + \chi\int_y^x \frac{T(t/z,z)}{t(\log t)^{2-\chi}}dt + O(\frac{L(\log y)^{2\chi-1}}{1-2\chi}) \tag{26}$$

Ya que:

$$|\int_y^x \frac{O(L(\log t)^\chi)}{t(\log t)^{2-\chi}}dt| << \int_y^\infty \frac{L}{t}(\log t)^{2\chi-2}dt = [\frac{L}{2\chi-1}(\log t)^{2\chi-1}]_{t=y}^\infty = \frac{L}{1-2\chi}(\log y)^{2\chi-1}$$

Por otro lado como $\frac{\partial}{\partial t}T(t,z) = \frac{G(t,z)}{t}$ se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{T(t,z)}{(\log t)^{1-\chi}}\right) = \frac{G(t,z)}{t(\log t)^{1-\chi}} - (1-\chi)\frac{T(t,z)}{t(\log t)^{2-\chi}}$$

Integrando respecto a t, desde y hasta x obtenemos:

$$\frac{T(x,z)}{(\log x)^{1-\chi}} - \frac{T(y,z)}{(logy)^{1-\chi}} = \int_y^x \frac{G(t,z)}{t(\log t)^{1-\chi}}dt - (1-\chi)\int_y^x \frac{T(t,z)}{t(\log t)^{2-\chi}}dt$$

Y sumando esta relación a (26) se completa la prueba del lema. □.

Vayamos ya con la demostración de la proposición 6:
Escribiendo:

$$T(x,z) = CF(s)(\log z)^{1-\chi} + R(x,z) \tag{27}$$

lo que hay que probar es:

$$R(x,z) << \frac{(s+1)L}{(1-2\chi)} \log^{\chi} x$$

para todo $x \geq 2$ y $z \geq 2$. Esto ya lo hemos probado para $z \geq x \geq 2$.(ed. $\forall (x,z)$ con $s \leq 1$).
Si introducimos (27) en (25), observamos que los terminos principales, $M(x,z) := F(\frac{\log x}{\log z})(\log z)^{1-\chi}$, se cancelan ya que:

$$\frac{M(x,z)}{(\log x)^{1-\chi}} = \frac{M(y,z)}{(\log y)^{1-\chi}} + \chi \int_y^x \frac{M(t/z,z)}{t(\log t)^{2-\chi}} dt$$

Veámoslo: Distinguiremos varios casos.
Si $x, y \geq z$, observamos que si definimos $g(s) = \frac{F(s)}{s^{1-\chi}}$ entonces:

$$\frac{M(x,z)}{(\log x)^{1-\chi}} - \frac{M(y,z)}{(\log y)^{1-\chi}} = [g(\frac{\log t}{\log z})]_{t=y}^{x} = \int_y^x g'(\frac{\log t}{\log z}) \frac{1}{t \log z} dt =$$

por la propiedad (21) de F sabemos que $g'(s) = \chi \frac{F(s-1)}{s^{2-\chi}}$, luego lo anterior es:

$$= \chi \int_y^x \frac{F(\frac{\log t}{\log z} - 1)}{(\frac{\log t}{\log z})^{2-\chi} t \log z} dt = \chi \int_y^x \frac{F(\frac{\log(t/z)}{\log z})}{(\frac{\log t}{\log z})^{1-\chi}} \frac{dt}{t \log t} = \chi \int_y^x \frac{M(t/z,z)}{t(\log t)^{2-\chi}} dt$$

Si $x, y \leq z$ se comprueba fácilmente ya que para este caso el integrando es 0, y por (19):

$$\frac{M(x,z)}{(\log x)^{1-\chi}} = \frac{1}{(1-\chi)} = \frac{M(y,z)}{(\log y)^{1-\chi}}$$

El caso que nos queda, $y \leq z \leq x$, se deduce fácilmente de los casos anteriores sumando estas dos relaciones:

$$\frac{M(z,z)}{(\log z)^{1-\chi}} = \frac{M(y,z)}{(\log y)^{1-\chi}} + \chi \int_y^z \frac{M(t/z,z)}{t(\log t)^{2-\chi}} dt$$

$$\frac{M(x,z)}{(\log x)^{1-\chi}} = \frac{M(z,z)}{(\log z)^{1-\chi}} + \chi \int_z^x \frac{M(t/z,z)}{t(\log t)^{2-\chi}} dt$$

Por tanto al introducir (27) en (25) obtenemos que:

$$\frac{R(x,z)}{(\log x)^{1-\chi}} = \frac{R(y,z)}{(\log y)^{1-\chi}} + \chi \int_y^x \frac{R(t/z,z)}{t(\log t)^{2-\chi}} dt + O(\frac{L(\log y)^{2\chi-1}}{1-2\chi}) \tag{28}$$

Observamos que si consiguieramos probar:

$$\begin{array}{c} R(x,z) < \frac{BL}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \\ \forall x,z \quad \text{con } s \leq u \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} R(x,z) < \frac{BL}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \\ \forall x,z \quad \text{con } u < s \leq u+1 \end{array} \tag{29}$$

entonces fácilmente por inducción podríamos demostrar la proposición. Pero mala y buena noticia: Vamos a intentar probar (29) , pero no lo vamos a lograr aunque vamos a conseguir probar algo más débil que también nos va a servir:
Supongamos que:

$$R(x,z) < \frac{BL}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \quad \forall x,z \quad \text{con } s \leq u \tag{30}$$

Sea (x,z) con $u < s(x,z) \leq u+1$ ed $x = z^{\lambda}$ con $u < \lambda \leq u+1$.
Sea $y = x^u$ (entonces $s(y,z) = u$)
Observamos que así en (28) podemos aplicar nuestra hipotesis a los R de la derecha de la desigualdad. Ademas $\exists K$ tal que el O de la formula es $\leq \frac{KL}{1-2\chi}(\log y)^{2\chi-1}$ Por tanto:

$$\frac{R(x,z)}{(\log x)^{1-\chi}} \leq \frac{BL}{1-2\chi}[\frac{u+1}{(\log y)^{1-2\chi}} + \chi\int_y^x \frac{\log^{\chi}(t/z)}{t\log z(\log t)^{1-\chi}} + \frac{K}{B(\log y)^{1-2\chi}}] \tag{31}$$

Queremos sacar 'factor común' a $(\log x)^{2\chi-1}$, para ello tengamos en cuenta que:

$$\log y = \frac{u}{u+1}\log z^{u+1} \geq \frac{u}{u+1}\log x$$

y observamos que en el dominio de la integral ($t \in [y,x]$) tenemos:

$$\log t \geq \log y \geq (\log x)(\frac{u}{u+1}) \quad \Rightarrow \quad \log^{\chi-1} t \leq \log^{\chi-1} x(\frac{u}{u+1})^{\chi-1}$$

$$(\log\frac{t}{z})^{\chi} \leq \log^{\chi} x$$

Esto nos permite estimar la integral por:

$$\leq \frac{1}{\log z} \underbrace{\int_y^x \frac{1}{t}dt}_{\log x - \log y \leq \log z} \quad (\log x)^{2\chi-1}(\frac{u+1}{u})^{1-\chi} \leq (\log x)^{2\chi-1}(\frac{u+1}{u})^{1-\chi}$$

Teniendo en cuenta todo esto podemos pasar sin problemas de (31) a:

$$\frac{R(x,z)}{(\log x)^{1-\chi}} \leq \frac{BL}{1-2\chi}(\log x)^{2\chi-1}[(u+1)(\frac{u+1}{u})^{1-2\chi}+\chi(\frac{u+1}{u})^{1-\chi}+\frac{K}{B}(\frac{u+1}{u})^{1-2\chi}] \tag{32}$$

Con todo esto hemos demostrado (30) $\Rightarrow$ (32), es decir:

$$\begin{array}{c} R(x,z) < \frac{BL}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \\ \forall x,z \quad \text{con } s \leq u \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} R(x,z) \leq \frac{BL}{1-2\chi}\log^{\chi} x\,[\quad \ldots \quad] \\ \forall x,z \quad \text{con } u < s \leq u+1 \end{array} \tag{33}$$

Que como ya habíamos anticipado no nos permite demostrar (29). Pero para U y B suficientemente grandes la parte entre corchetes es $< u+2$ (luego probaremos esta afirmación). Por tanto para el caso en que $s = u+1$ dicha parte entre corchetes es menor que $s+1$. Así que

$\exists u_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $u \geq u_0$ y B suficientemente grande:

$$\begin{array}{c} R(x,z) < \frac{BL}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \\ \forall x,z \quad \text{con } s \leq u \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} R(x,z) < \frac{BL}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \\ \forall x,z \quad \text{con } s = u+1 \end{array} \tag{34}$$

Nos faltaba ver que para u y B suficientemente grande:

$$[(u+1)(\frac{u+1}{u})^{1-2\chi} + \chi(\frac{u+1}{u})^{1-\chi} + \frac{K}{B}(\frac{u+1}{u})^{1-2\chi}] < u+2$$

bien, veámoslo:

1. Para u suficientemente grande se tiene que:

   $$(u+1)(\frac{u+1}{u})^{1-2\chi} < u+2-\frac{7}{4}\chi$$

   Veámoslo. ¿Cómo tiene que ser k para que

   $$(u+1)(\frac{u+1}{u})^{1-2\chi} < u+k \qquad \text{para } u \text{ grandes?}$$

   Escribiendo $1/n = 1-2\chi$ y elevando lo anterior a la potencia n vemos que es equivalente a

   $$u^{n+1} + u^n(1+n) + \ldots < u^{n+1} + u^n kn + \ldots \qquad \text{para } u \text{ grandes}$$

   Luego si $k > 1+1/n = 2-2\chi$ entonces $(u+1)(\frac{u+1}{u})^{1-2\chi} < u+k$ para u grandes. Por tanto tomando $k = 2-\frac{7}{4}\chi$ tenemos lo que queríamos.

2. Para u suficientemente grande

   $$\chi(\frac{u+1}{u})^{1-2\chi} < \chi 3/2$$

   (ya que si $u \to \infty$ el primer miembro tiende a χ)

3. Para B suficientemente grandes:

   $$K/B(\frac{u+1}{u})^{1-2\chi} < \chi 1/4$$

   (ya que si $B \to \infty$ entonces $\frac{1}{B} \to 0$)

Sumando estas tres desigualdades obtenemos que para u, y B suficientemente grandes:

$$[\quad \ldots \quad] < u + 2 - \frac{7}{4}\chi + \frac{3}{2}\chi + \frac{1}{4}\chi = u + 2$$

¿Y qué pasa para los u pequeños? A partir de (33) es fácil obtener que:

$$\begin{array}{c} R(x,z) < \frac{BL}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \\ \forall x, z \quad \text{con } s \leq u \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} R(x,z) < \frac{c_u BL}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \\ \forall x, z \quad \text{con } u < s \leq u+1 \end{array} \tag{35}$$

donde c_u son constantes mayores que 1 que dependen de u

Y ahora ya tenemos todo listo para probar por inducción la proposición: Por el lema 7 tenemos que:

$$R(x,z) \leq \frac{BL}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \quad \forall (x,z): \ s \leq 1$$

y ponemos B suficientemente grande, en el sentido de (34) y (35).
Así utilizando (34) llegamos a:

$$R(x,z) \leq \frac{c_1 BL}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \quad \forall (x,z): \ s \leq 2$$

Haciendo esto repetidas veces, llegamos a:

$$R(x,z) \leq \frac{\overbrace{c_1 c_2 \cdots c_{u_0} B}^{C} L}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \quad \forall (x,z): \ s \leq u_0 + 1$$

Y ahora hemos llegado al punto donde podemos usar (34), y así no es difícil probar que:

$$R(x,z) \leq \frac{CL}{1-2\chi}(s+1)\log^{\chi} x \quad \forall (x,z)$$

Por tanto:

$$R(x,z) << \frac{(s+1)L}{1-2\chi}\log^{\chi} x \quad \Box$$

5. Apéndice

5.1. sumación por partes

Lema 9. *(Abel, sumación por partes) Sea $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de números complejos y sea $C(t) = \sum_{n\leq t} c_n$. Dado $x \geq 1$, para cualquier $g : [1,\infty) \to \mathbb{C}$, $g \in C^1$, se verifica:*

$$\sum_{n\leq x} c(n)g(n) = C(x)g(x) - \int_1^x C(t)g'(t)dt$$

Demostración:

$$\sum_{n\leq x} c(n)g(n) = c(1)g(1) + c(2)g(2) + \ldots + c([x])g([x]) =$$

$$g(1)C(1)+g(2)(C(2)-C(1))+g(3)(C(3)-C(2))+\ldots+g([x])(C([x])-C([x]-1)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{[x]-1} C(i)[g(i) - g(i+1)] + \underbrace{g([x])C([x])}_{C([x])[g([x])-g(x)]+g(x)C(x)}$$

Por el teorema fundamental del calculo:

$$= -\sum_{i=1}^{[x]-1} \int_i^{i+1} \underbrace{C(i)}_{C(t)} g'(t)dt - \int_{[x]}^x \underbrace{C([x])}_{C(t)} g'(t)dt + g(x)C(x) =$$

$$= g(x)C(x) - \int_1^x C(t)g'(t)dt \quad \square$$

Observación: Es fácil ver que si $c(1) = 0$ se tiene:

$$\sum_{n\leq x} c(n)g(n) = C(x)g(x) - \int_2^x C(t)g'(t)dt$$

5.2. La funcion de von Mangoldt

Se define la función de von Mangoldt Λ de la siguiente manera:

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(n) \qquad \log = \Lambda * 1$$

Es fácil combrobar que: $\Lambda(p^r) = \log p$ y 0 en otro caso. Pero esto se puede generalizar: La función de von Mangoldt λ asociada a ω se define como la función que satisface:

$$\omega(n)\log n = \sum_{d|n} \omega(d)\lambda(n/d) \qquad \omega \log = \omega * \lambda$$

Si ω es multiplicativa entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\lambda(1) = 0$
2. $\lambda(p) = \omega(p) \log p$
3. Si c no es potencia de primo entonces $\lambda(c) = 0$.

Demostración:

$$0 = \omega(1)\log(1) = \lambda(1)\omega(1) \underbrace{\Rightarrow}_{\omega(1)\neq 0} \lambda(1) = 0$$

$$\omega(p)\log(p) = \lambda(p)\underbrace{\omega(1)}_{1} + \underbrace{\lambda(1)\omega(p)}_{0} \Rightarrow \lambda(p) = \omega(p)\log p$$

Vamos a demostrar que si c no es potencia de primo entonces $\lambda(c) = 0$ por inducción:
Supongamos que para los $k < p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s} = c$ que no son potencias de primo $\lambda(c) = 0$, y veamos que $\lambda(c) = 0$.

$$\omega(c)\log c = \lambda(c) + \sum_{d|c\, d<c} \lambda(d)\omega(c/d)$$

Por nuestra hipótesis de inducción, en el sumatorio sólo hay que tener en cuenta a los d que son potencias de primos. Así que:

$$\lambda(c) = \omega(c)\log c - \left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{d|p^{r_i}} \lambda(d)\omega(c/d)\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} \omega(c)\log p^{r_i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{s} \underbrace{\omega\left(\frac{c}{p^{r_i}}\right) \overbrace{\sum_{d|p^{r_i}} \lambda(d)\omega\left(\frac{p^{r_i}}{d}\right)}^{\lambda*\omega(p^{r_i})=\omega(p^{r_i})\log p^{r_i}}}_{\omega(c)\log p^{r_i}}\right) = 0 \quad \square$$

5.3. La funcion f

Lema 10. *Sea $0 \leq \chi < \frac{1}{2}$ y $f(s)$ la solución continua de :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(s) = s^{-\chi} & para\ 0 < s \leq 1 \\ sf'(s) = \chi f(s-1) - \chi f(s) & para\ s > 1 \end{array} \right\}$$

Entonces tenemos para $s \to \infty$

$$f(s) = e^{\chi\gamma}\Gamma(1-\chi) + O(e^{-s})$$

Demostración:
La derivada f' satisface la ecuación:

$$sf'(s) = -\chi \int_{s-1}^{s} f'(u)du \qquad \text{para } s > 1$$

Sea $g(s) = |f'(s)|$, si tomamos valores absolutos en lo anterior se tiene:

$$g(s) \leq \chi \frac{\int_{s-1}^{s} g(u)du}{s} \qquad \text{para } s > 1$$

Y como además $g(s) = s^{-\chi}$ para $0 < s \leq 1$, se deduce fácilmente que g es decreciente, y de esto se sigue:

$$g(2) \leq \frac{\chi \int_1^2 g(u)du}{2} \leq \frac{\chi g(1)}{2}$$

$$g(3) \leq \frac{\chi \int_2^3 g(u)du}{3} \leq \frac{\chi g(2)}{3} \leq \frac{\chi^2}{3!} g(1)$$

Y asi se prueba por inducción que

$$g(n) \leq \frac{\chi^n}{n!} g(1) \qquad \text{y por tanto:} \quad g(s) \leq \frac{\chi^{[s]}}{[s]!} g(1) << e^{-s}$$

De este modo hemos probado que f' es una $O(e^{-s})$.
Por el teorema fundamental del calculo $f(s) = 1 + \int_1^s f'(u)du$. Así que teniendo en cuenta lo anterior tenemos que:

$$f(s) = c + O(e^{-s})$$

Calculemos la constante c. Para ello consideramos la transformada de Laplace

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}(c + O(e^{-t}))dt = cs^{-1} + O(1)$$

Se comprueba fácilmente que

$$\frac{d}{ds}(sL(s)) = \chi(1 - e^{-s})L(s)$$

y así

$$sL(s) = c \exp(\chi \int_0^s (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t})$$

Ahora vamos a calcular $\lim_{s\to\infty} s^{1-\chi} L(s)$ de dos maneras distintas. Por un lado tenemos:

$$\lim_{s\to\infty} s^{1-\chi} L(s) = c \lim_{s\to\infty} s^{-\chi} \exp(\chi \int_0^s (1 - e^{-t}) \frac{dt}{t}) = ce^{\chi\gamma}$$

Por otro lado

$$\lim_{s\to\infty} s^{1-\chi}L(s) = \lim_{s\to\infty} s^{1-\chi}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \lim_{s\to\infty} s^{1-\chi}\int_0^1 e^{-st}t^{-\chi}dt =$$

$$= \lim_{s\to\infty}\int_0^s e^{-u}u^{-\chi}du = \Gamma(1-\chi)$$

Por tanto $c = e^{-\chi\gamma}\Gamma(1-\chi)$ y así se completa la prueba del lema $\square$

Lema 11. *La función* $F(s) = \int_0^s f(u)du$ *es de clase* C^1 *y satisface las siguientes ecuaciones:*

$$F(s) = \frac{1}{1-\chi}s^{1-\chi} \qquad \textit{para } 0 < s \leq 1$$

$$sF'(s) = (1-\chi)F(s) + \chi F(s-1) \qquad \textit{para } s > 1 \tag{36}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{F(s)}{s^{1-\chi}}\right) = \chi\frac{F(s-1)}{s^{2-\chi}} \qquad \textit{para } s > 1$$

Demostración:
Para $s \leq 1$:

$$F(s) = \int_0^s u^{-\chi}du = \left[\frac{1}{1-\chi}u^{1-\chi}\right]_{u=0}^s = \frac{1}{1-\chi}s^{1-\chi}$$

Observamos que $F'(s) = f(s)$, luego:

$$sF''(s) = \chi F'(s-1) - \chi F'(s) \qquad \text{para } s > 1$$

Y por tanto:

$$\frac{d}{ds}(sF'(s) - F(s)) = \frac{d}{ds}(\chi F(s-1) - \chi F(s)) \qquad \text{para } s > 1$$

Luego

$$sF'(s) - F(s) = \chi F(s-1) - \chi F(s) + k \qquad \text{para } s > 1$$

Es muy fácil ver que la constante es 0 y de ese modo probar (36)

$$\frac{d}{ds}(F(s)s^{\chi-1}) = F'(s)s^{\chi-1} + (\chi-1)F(s)s^{\chi-2} =$$

$$s^{\chi-2}(\underbrace{F'(s)s - (1-\chi)F(s)}_{\chi F(s-1) \quad (36)}) = \chi\frac{F(s-1)}{s^{2-\chi}} \quad \square$$

5.4. Principio de Inclusión Exclusión

Lema 12. *(Principio de Inclusión Exclusión) Sea C un conjunto finito, y sean $C_1, \dots, C_m$ subconjuntos de C entonces:*

$$\#(C/\cup_{i=1}^m C_i) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \sum_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_l\leq m} \#(C_{j_1}\cap\ldots\cap C_{j_l})$$

y además

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \sum_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_l\leq m} \#(C_{j_1}\cap\ldots\cap C_{j_l})$$

es una cota superior de $\#(C/\cup_{i=1}^m C_i)$ si n es par e inferior si n es impar.

Si indexamos a los subconjuntos de C mediante números primos, y denotamos

$$C_{p_1\cdots p_r} = C_{p_1}\cap\ldots\cap C_{p_r}$$

entonces podemos reescribir el P.I.E. de la siguiente manera:

Lema 13. *Sea C un conjunto finito, y sean $\{C_p\}_{p<z}$ subconjuntos de C, si denotamos*

$$C_{p_1p_2\cdots p_r} = C_{p_1}\cap C_{p_2}\cap\ldots\cap C_{p_r} \qquad y\ P(z) = \prod_{p<z} p$$

entonces tenemos que:

$$\#(C/\cup_{p<z} C_p) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\#C_d \tag{37}$$

y $\forall m$ par y $\forall i$ impar se tiene que:

$$\sum_{\substack{d|P(z)\\ \nu(d)\leq i}} \mu(d)\#C_d \leq \#(C/\cup_{p<z} C_p) \leq \sum_{\substack{d|P(z)\\ \nu(d)\leq m}} \mu(d)\#C_d \tag{38}$$

Demostración: Obsservamos que (37) es equivalente a:

$$\sum_{a\in C} 1_{C/\cup_{p<z}}(a) = \sum_{a\in C}\sum_{d|P(z)} \mu(d)1_{C_d}(a)$$

Luego para probarlo basta ver que para cada $a\in C$:

$$1_{C/\cup_{p<z}}(a) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)1_{C_d}(a)$$

Bien, veámoslo: Sea

$$k := \#\{C_p \quad p<z \text{ tales que } a\in C_p\}$$

así:
$$\#\{C_d \quad \nu(d) = i \text{ tales que } a \in C_d\} = \binom{k}{i}$$
Luego:

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d) 1_{C_d}(a) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{d|P(z);\, \nu(d)=i} \overbrace{\mu(d)}^{(-1)^i} 1_{C_d}(a) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sum_{d|P(z);\, \nu(d)=i} 1_{C_d}(a) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{array} \right\} = 1_{C/\cup_{p<z} C_p}(a)$$

De (38) probemos la desigualdad de la derecha, la otra se prueba análogamente. De la misma manera que antes vemos que basta probar que para cada $a \in C$:
$$1_{C/\cup_{p<z} C_p}(a) \leq \sum_{d|P(z);\, \nu(d)\leq m} \mu(d) 1_{C_d}(a)$$
Probemoslo.Para $k = 0$ es trivial, y para el resto de los casos observamos que lo de la izquierda de la desigualdad es 0 y:

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d) 1_{C_d}(a) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{d|P(z);\, \nu(d)=i} \overbrace{\mu(d)}^{(-1)^i} 1_{C_d}(a) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \sum_{d|P(z);\, \nu(d)=i} 1_{C_d}(a) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{k}{i} = \binom{k-1}{m} \geq 0 \quad \square$$

Si aplicamos el P.I.E. para calcular $S(\mathcal{A}, z) = \#\mathcal{A}/ \cup_{p<z} A_p$ obtenemos:
$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d) \#\mathcal{A}_d$$

y para todo m par e i impar:
$$\sum_{d|P(z);\, \nu(d)\leq i} \mu(d) \#\mathcal{A}_d \leq S(\mathcal{A}, z) \leq \sum_{d|P(z);\, \nu(d)\leq m} \mu(d) \#\mathcal{A}_d.$$