Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Series de Dirichlet

Trabajo de fin de grado

Grado en Matemáticas

Autor: Marta Castillo Galán
Tutor: Fernando Chamizo

Curso 2022-2023

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar las series de Dirichlet, prestando especial atención a sus aplicaciones en la teoría de números. El primer capítulo se dedica a la convergencia de dichas series, llegando a ver que la convergencia siempre tiene lugar en semiplanos del plano complejo. Una de la series de Dirichlet más importantes es la función ζ de Riemann, por su relación con la teoría de números que se verá en los siguientes capítulos, por ello se estudia más en profundidad. En particular, se extiende esta función a una región más amplia del plano complejo, es decir, se obtiene su extensión meromorfa al semiplano derecho, y se calculan sus dos primeros términos del desarrollo de Laurent alrededor de 1. El segundo capítulo analiza cómo las características de las funciones aritméticas multiplicativas se reflejan en las series de Dirichlet asociadas con la secuencia de valores que estas funciones toman. Se presta especial atención a la función de von Mangoldt, a pesar de no ser multiplicativa, pero es relevante debido a su relación con la función ζ y con la factorización, al igual que las funciones multiplicativas. El tercer capítulo se estudia la transformada de Mellin y sus propiedades, con ella se quiere deducir un teorema tauberiano sobre series de Dirichlet a partir del Teorema de Wiener-Ikehara. Por último, en el cuarto capítulo se usa el teorema tauberiano obtenido previamente para deducir el teorema de los números primos. También se estudian algunas propiedades adicionales de la función ζ, como el término de error y la hipótesis de Riemann.

Abstract

The aim of this project is to study Dirichlet series, paying special attention to their application in number theory. The first chapter studies the convergence of these series, showing that convergences always takes place in semi-planes of the complex plane. One of the most important Dirichlet series is the Riemann ζ function, due to its relation with number theory which will be seen in the following chapters, thus it is studied in more depth. In particular, this function is extended to a wider region of the complex plane, meaning, its meromorphic extension to the right half-plane is obtained, and its first two terms of the Laurent series around 1 are calculated. The second chapter analyzes how the properties of multiplicative arithmetic functions are reflected in the Dirichlet series associated with the sequence of values that these functions take. Special attention is paid to the von Mangoldt function, despite not being multiplicative, but relevant due to its relation with the ζ function and factorization, like multiplicative functions. The third chapter studies the Mellin transform and its properties, aiming to deduce a tauberian theorem on Dirichlet series from the Wiener-Ikehara theorem. Finally, in the fourth chapter, the tauberian theorem obtained previously is used to deduce the prime number theorem. Additional properties of the ζ function are also studied, such as the error term and the Riemann hypothesis.

Índice general

CAPÍTULO 1

Resultados básicos de convergencia

En este primer capítulo estudiaremos las propiedades de convergencia de las series de Dirichlet llegando hasta un teorema donde obtenemos que la convergencia de estas series siempre tiene lugar en semiplanos del plano complejo, toda esta primera parte lo podremos encontrar en [9]. Ampliaremos sobre un ejemplo destacado de estas, como es la función ζ de Riemann, que se podrá encontrar en [7].

1.1. Convergencia

Lo primero que haremos será definir qué es una *serie de Dirichlet*, es una serie que tiene la siguiente forma

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \text{con } s \in \mathbb{C}.$$

Tenemos que tener en cuenta que s es un parámetro complejo, tal que $s = \sigma + it$, siendo σ su parte real y t su parte imaginaria ($\sigma, t \in \mathbb{R}$).

A continuación, como ya hemos explicado, vamos a estudiar la convergencia de las series que convergerá o divergerá para un valor de s, dependiendo de la sucesión de a_n.

Por ejemplo, si tenemos $a_n = e^{-n}$ se obtiene la serie $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}/n^s = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Utilizando el criterio del cociente $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}/b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n-1}n^s}{e^{-n}(n+1)^s} = \frac{1}{e}0 = 0$, al ser menor que 1 sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, con lo cual podemos decir que $D(s)$ converge para todo s.

Por otro lado, si $a_n = e^n$ la serie no converge para ningún $s \in \mathbb{C}$, ya que $\lim |e^n/n^s| = \infty$.

En la mayoría de casos la serie solo converge para ciertos s, para poder trabajar con ellos definimos la *abscisa de convergencia absoluta* de una serie de Dirichlet $D(s)$ como

$$\sigma_a = \inf \big\{ \sigma \in \mathbb{R} \, : \, D(\sigma) \text{ converge absolutamente} \big\}.$$

Si $D(s)$ no converge absolutamente para ningún $s \in \mathbb{R}$, el convenio que hay en análisis es que el $\inf \emptyset = \infty$, con lo cual escribimos $\sigma_a = \infty$. Para entender esta definición bien haremos unos ejemplos a continuación.

Observación 1. *Recordamos que cuando una serie de números complejos* $\sum c_n$ converge absolutamente, *es lo mismo que decir que* $\sum |c_n|$ *converge.*

Ejemplo 1. *Buscamos las* σ_a *para las siguientes series de Dirichlet:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi n/3)}{n^s}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big|\frac{\operatorname{sen}(\pi n/3)}{n^s}\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(\pi n/3)|}{|n|^\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(\pi n/3)|}{n^\sigma}$$

ya que $|\operatorname{sen}(\pi n/3)| \leq 1$ *esta acotado, por el criterio de comparación esta serie converge para los mismos términos que para los que converge* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\sigma$*.*

Es trivial que para $\sigma \leq 0$ *diverge, y observamos que para el resto de términos* $1/n^\sigma$ *decrece, entonces por el criterio de condensación* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\sigma$ *converge si y solo si* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n/2^{n\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-\sigma})^n$ *converge, y esto es una serie geométrica. Que convergerá cuando* $2^{1-\sigma} < 1 \Rightarrow \sigma > 1$*.*

Con lo cual, podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi n/3)}{n^s}$ *converge absolutamente si* $\sigma > 1$ *y diverge si* $\sigma \leq 1$*, es decir,* $\sigma_a = 1$*.*

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+e^n)+i\sqrt{n}}{n^s}$,

por el criterio de comparación y por $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|\log(1+e^n)+i\sqrt{n}|}{n^\sigma}}{\frac{n}{n^\sigma}} = 1$*, sabemos que nuestra serie converge para los mismos* σ *que para los que converge* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\sigma-1}$*. Por ello sabemos que converge absolutamente si* $\sigma - 1 > 1 \Rightarrow \sigma > 2$*, con lo cual* $\sigma_a = 2$*.*

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\log^2 n}}{n^s}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|e^{\log^2 n}|}{|n^s|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\log^2 n}}{n^\sigma}.$$

Teniendo esto, vamos a ver a que tiende $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\log^2 n}}{n^\sigma}$*:*

$$e^{\log^2 n} < n^\sigma \Rightarrow \log^2 n < \log n^\sigma \Rightarrow \log n < \sigma \Rightarrow \infty < \sigma,$$

entonces no existe el límite ya que $\infty < \sigma$ *es imposible, con lo cual esta serie diverge para todo* $s \Rightarrow \sigma_a = \infty$*.*

Definimos $\sigma > K$ como un semiplano a la derecha y $\sigma < K$ un semiplano a la izquierda, con esta descripción (de los semiplanos) estamos haciendo caso omiso de lo que ocurre en la frontera. Gracias a estos ejemplos podemos observar que la convergencia absoluta de las series de Dirichlet solo se da en semiplanos (o en todo plano complejo, si $\sigma_a = -\infty$). Vamos a demostrar esto mismo con la siguiente proposición.

Proposición 1. *Una serie de Dirichlet* $D(s)$ *converge absolutamente para los* s *con* $\sigma > \sigma_a$ *y no converge absolutamente para ningún* s *con* $\sigma < \sigma_a$*.*

Demostración. Si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n/n^s|$ no converge para ningún $s \in \mathbb{C}$, entonces $\sigma_a = \infty$. En otro caso, existe un $s_0 = \sigma_0 + it_0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n/n^{s_0}| = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|/n^{\sigma_0} < \infty \Rightarrow$ para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\sigma > \sigma_0$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n/n^s| = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|/n^{\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|/n^{\sigma_0} < \infty$. El ínfimo de tales σ_0 (que es no vacío ya que en s_0 la serie converge) es el σ_a del enunciado, entonces tenemos $\sigma_0 \in \sigma > \sigma_a$. □

Ya hemos visto el comportamiento de la convergencia absoluta, y ahora vamos a ver el comportamiento de la convergencia, para ello introducimos la *abscisa de convergencia*, que es

$$\sigma_c = \text{ínf}\,\big\{\sigma \in \mathbb{R} \,:\, D(\sigma) \text{ converge}\big\}.$$

Si $a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, claramente $\sigma_a = \sigma_c$, en otro caso podrían ser diferentes.

Por ejemplo, en un caso donde son distintas es en $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n^s$. Ya que para σ_a, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}/n^s| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\sigma}$ (*función ζ de Riemann*) que es $\sigma_a = 1$ (como está demostrado en el ejemplo). Y para σ_c usamos el criterio de Leibiniz, cogiendo $a_n = 1/n^s$, vemos que para $s > 0$ es decreciente y $\text{lím}\, a_n = 0$, con lo cual sabemos que $D(s)$ converge para $s > 0$. Y es trivial ver que para $s \leq 0$ diverge. Con lo cual, tenemos que $\sigma_c = 0$.

Antes de continuar y ver la relación entre ambas abscisas vamos a explicar una notación que usaremos tanto en la demostración de dicha relación como en el resto del trabajo, llamada *notación O de Landau*, que está explicada en [12]. Con ella, se escribe $f = O(g)$ para indicar que

$$\text{lím sup}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty.$$

Esto es como decir $|f| < K|g|$ para cierta constante K en la región en la que nos movemos. Se suele sobrenteder a qué tiende la x, que normalmente es a 0 o a ∞, pero si hay dudas se indica. Por ejemplo,

$$x \to \infty: \quad \frac{1}{x-2023} = O(x^{-1}), \quad \log x = O(x), \quad \frac{2x+1}{x+4} = O(1);$$
$$x \to 0: \quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5).$$

Teniendo en mente el Teorema de Taylor, muchas veces se sobrentiende que $x \to a$ cuando se escribe $O\big((x-a)^n\big)$. Hay otras dos notaciones, son $f = o(g)$ y $f \sim g$ para indicar, respectivamente, $\text{lím}\, f/g = 0$ y $\text{lím}\, f/g = 1$. Por supuesto, $f = o(g)$ implica $f = O(g)$, pero no al revés.

Una vez explicada esta notación, volvamos a nuestro estudio y veamos la relación entre las abscisas con el siguiente lema.

Lema 1. *$\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$.*

Demostración.

$\sigma_c \leq \sigma_a$: sabemos que cuando una serie converge absolutamente entonces esa serie también converge (cierto para toda serie). Pero el recíproco es falso, es decir, una serie convergente no tiene por qué ser convergente absolutamente. Con lo cual vemos que si definimos dos conjuntos $\sigma_A = \{\sigma \in \mathbb{R} : D(\sigma) \text{ converge absolutamente}\}$ y $\sigma_C = \{\sigma \in \mathbb{R} : D(\sigma) \text{ converge}\}$, implica que $\sigma_A \subset \sigma_C$. Si $\sigma_a = \text{ínf}\,\sigma_A$ y $\sigma_c = \text{ínf}\,\sigma_C$ tenemos que por ser ínfimos $\sigma_c \leq \sigma_a$.

$\sigma_a \leq \sigma_c + 1$: Por la definición de σ_c, $D(\sigma_c+\epsilon)$ converge para cualquier $\epsilon > 0$, por tanto $a_n = o\big(n^{\sigma_c+\epsilon}\big)$. Reescribimos $\tau = \sigma_c + \epsilon/2$, con lo cual sabemos que $|a_n|/n^\tau \leq K$ (K =cte positiva ya que sabemos por la definición que $\tau > \sigma_c$) ya que $\sum a_n/n^\tau$ converge, y por consiguiente

$$\text{lím}\,|a_n|/n^\tau = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\tau+1+\epsilon/2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\tau}\frac{1}{n^{1+\epsilon/2}},$$

esta serie es absolutamente convergente ya que por el criterio de comparación al ser $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\epsilon}$ absolutamente convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\tau}\frac{1}{n^{1+\epsilon/2}} \leq K\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\epsilon}, \text{ entonces} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\tau+1+\epsilon/2}}$$

también es absolutamente convergente, con lo cual $\sigma_a \leq \sigma_c + 1$. □

A continuación vamos a introducir una fórmula para expresar sumas con integrales, para poder demostrar el teorema que ya hemos mencionado al principio del capítulo, sobre la convergencia de las series de Dirichlet. Pero vamos paso a paso, primero vamos a introducirla y demostrarla, se llama *Lema de Abel* o *sumación por partes*, es la identidad:

$$\sum_{n\leq x} c_n g(n) = C(x)g(x) - \int_1^x C(u)g'(u)\,du \tag{1.1}$$

donde x es real (mayor que 1 para que no sea trivial), c_n son números complejos, $g : [1,x] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función con derivada continua y $C(u) = \sum_{n\leq u} c_n$. Como es habitual, se supone que la n toma valores enteros positivos.

Demostración. Lo primero es definir una notación, para $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ denota el mayor entero menor o igual que x. Es decir, para $[4{,}4] = 4$ y $[-3{,}1] = -4$. Y la parte fraccionaria de x es $\{x\} = x - [x]$, por ejemplo $\{4{,}4\} = 0{,}4$.

Tenemos $\{c_n\}$ una sucesión de números complejos y $f(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$. Asumimos que f tiene derivada continua en $\mathbb{R}^+$. Y definimos para $x \in \mathbb{R}^+$:

$$C(x) = \sum_{1\leq n\leq x} c_n, \quad \text{es decir, } C(4,4) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

Cambiamos x por $k \leq x \leq k+1$:

$$\sum_{1\leq n\leq x} c_n f(n) = \sum_{1\leq n\leq k} c_n f(n) = \quad C(k)f(k) - \sum_{1\leq n\leq k-1} C(n)(f(n+1) - f(n)) \tag{1.2}$$

Ahora,

(1.3)

$$\sum_{1\leq n\leq k-1} C(n)(f(n+1) - f(n)) = \sum_{1\leq n\leq k-1} C(n)\int_n^{n+1} f'(t)dt = \sum_{1\leq n\leq k-1}\int_n^{n+1} C(t)f'(t)dt$$

ya que $C(t) = C(n)$, $n \leq t < n+1$

$$= \int_1^k C(t)f'(t)dt = \int_1^x C(t)f'(t)dt - \int_k^x C(t)f'(t)dt.$$

Además,

$$\int_k^x C(t)f'(t)dt = C(k)\int_k^x f'(t)dt = C(k)f(x) - C(k)f(k) = C(x)f(x) - C(k)f(k).$$

Juntando los dos resultados (1.2) y (1.3), obtenemos el *lema de Abel* (1.1). □

La identidad anterior permite escribir cualquier serie de Dirichlet como una integral.

Proposición 2. *Si* $\sigma_c < 0$ *para todo* s *con* $\sigma > 0$ *se tiene*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s\int_1^{\infty} A(x)x^{-s-1}\,dx \qquad \textit{donde} \quad A(x) = \sum_{n\leq x} a_n. \tag{1.4}$$

Observación 2. *También se cumpliría sin la hipótesis* $\sigma_c < 0$ *y para todo* $\sigma > \text{máx}(0, \sigma_c)$.

Demostración. Con la notación del *lema de Abel* tenemos:

$$c_n = a_n, \quad A(x) = C(x), \quad g(n) = n^{-s} \quad y \quad g'(n) = -sn^{-s-1} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g(n) = A(x)g(x) - \int_1^{\infty} A(u)g'(u)\,du = A(\infty)g(\infty) + s\int_1^{\infty} A(u)u^{-s-1}\,du.$$

Pero sabemos que $A(\infty)g(\infty) = 0$ porque $g(\infty) = \frac{1}{\infty^s} = 0$ (siendo $\sigma > 0$), con lo cual:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s\int_1^{\infty} A(u)u^{-s-1}\,du,$$

que es el resultado que buscábamos. □

Ahora vamos al resultado fundamental sobre la convergencia de series de Dirichlet, que es para lo que necesitábamos todo lo anterior.

Teorema 1. *Dados* $s_0 \in \mathbb{C}$ *y una constante arbitraria* $K > 0$*, si* $D(s_0)$ *converge entonces* $D(s)$ *converge uniformemente en el sector circular* $\{s : \sigma \geq \sigma_0,\ |t - t_0| \leq K(\sigma - \sigma_0)\}$.

Suponiendo cierto este teorema, y cogiendo K grande vemos que $D(s)$ converge para todo s en el semiplano $\sigma > \sigma_0$. Teniendo en cuenta la abscisa de convergencia σ_c, que es el menor σ_0 que se puede coger, concluimos que no existe un σ tal que $\sigma < \sigma_c$ que converja.

Entonces sabemos que la serie converge para todo s con $\sigma > \sigma_c$. Como la serie converge uniformemente en el sector circular, sea γ una curva cerrada en dicho sector:

$$\int_\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma \frac{a_n}{n^s}. \quad \text{Y por ser } n^{-s} \text{ holomorfa: } \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Por el teorema de Morera [15] tenemos que $D(s)$ tiene que ser holomorfa, en ese semiplano que define el sector circular.

Ahora vamos con la demostración de dicho teorema, y con esto terminaría el estudio de la convergencia de las series de Dirichlet.

Demostración. Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^{s_0}$ converge. Llamamos $P(u)$ al trozo de la suma con $n \leq u$ y $R(u)$ al resto de la suma. Por ejemplo, $P(N)$ con $N \in \mathbb{Z}^+$, es la N-ésima suma parcial y $P(\infty)$ es $D(s_0)$.

Usando (1.1) y para $N, M \in \mathbb{Z}^+$, $N > M$:

$$\sum_{n=1}^{N-M} c_n g(n) = C(N-M)g(N-M) - \int_1^{N-M} C(u)g'(u)\,du$$

con: $c_n = a_n$, $C(x) = \sum_{n\leq x} a_n$, $g(n) = n^{-s}$ y $g'(n) = -sn^{-s-1}$

$$\sum_{n=1}^{N-M} \frac{a_n}{n^s} = (N-M)^{-s}C(N-M) + s\int_1^{N-M} C(u)u^{-s-1}du$$

Y sabiendo que $C(u) = P(u)$, ya que es el trozo de la suma con $n \leq u \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{N-M} \frac{a_n}{n^s} = \frac{P(N-M)}{(M-N)^{s-s_0}} + (s-s_0)\int_1^{N-M} P(u)u^{-s+s_0-1}\,du$$

$$\sum_{n=M+1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \frac{P(N)}{N^{s-s_0}} - \frac{P(M)}{M^{s-s_0}} + (s-s_0)\int_M^N P(u)u^{-s+s_0-1}\,du. \tag{1.5}$$

Utilizando ahora $P(\infty) = P(u) + R(u)$ y (1.5):

$$\sum_{n=M+1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \frac{P(\infty)-R(N)}{N^{s-s_0}} - \frac{P(\infty)-R(M)}{M^{s-s_0}} + (s-s_0)\int_M^N (P(\infty)-R(u))u^{-s+s_0-1}\,du$$

y sabiendo que $P(\infty)$ es por definición $D(s_0)$, y como en s_0 converge, entonces $P(\infty) = 0$

$$\sum_{n=M+1}^{N} \frac{a_n}{n^s} = \frac{R(M)}{M^{s-s_0}} - \frac{R(N)}{N^{s-s_0}} + (s_0-s)\int_M^N R(u)u^{-s+s_0-1}\,du. \tag{1.6}$$

Por la convergencia, dado $\epsilon > 0$, tomando M grande, conseguimos $|R(u)| < \epsilon$ para $u \geq M$. Entonces para cualquier N, si $s \neq s_0$, obtenemos:

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N} \frac{a_n}{n^s}\right| \overset{(1.6)}{=} \left|\frac{R(M)}{M^{s-s_0}} - \frac{R(N)}{N^{s-s_0}} + (s_0-s)\int_M^N R(u)u^{-s+s_0-1}\,du\right| <$$

$$< \Big|\frac{R(M)}{M^{s-s_0}}\Big| + \Big|\frac{R(N)}{N^{s-s_0}}\Big| + |s-s_0|\Big|\int_M^N R(u)u^{-s+s_0-1}\,du\Big| < 2\epsilon + \epsilon|(s-s_0)|\int_M^\infty u^{-s+s_0-1}\,du <$$

$$< \epsilon\Big(2 + \frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\Big) = \epsilon\Big(2 + \frac{|\sigma-\sigma_0+it-it_0|}{\sigma-\sigma_0}\Big) \leq \epsilon\Big(2+1+\frac{|i(t-t_0)|}{\sigma-\sigma_0}\Big) \leq \epsilon(3+K)$$

$$\Rightarrow \Big|\sum_{n=M+1}^{N}\frac{a_n}{n^s}\Big| < \epsilon\Big(2+\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\Big) \leq (3+K)\epsilon.$$

Con esto habríamos terminado la demostración del teorema, ya que $|s-s_0| \leq \sigma-\sigma_0+|t-t_0| \leq (K+1)(\sigma-\sigma_0)$, y con la desigualdad anterior hemos demostrado que $\Big|\sum_{n=M+1}^{N}\frac{a_n}{n^s}\Big|$ esta acotado en términos de ϵ (que puede tomarse arbitrariamente pequeño), y esa cota no depende de s, con lo cual nuestra serie converge uniformemente en dicho sector circular. □

1.2. Función ζ de Riemann

En el resto del capítulo, como ya hemos adelantado, vamos a introducir la serie de Dirichlet más famosa, la *función ζ de Riemann*:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

y vamos a estudiar algunas de sus propiedades, que seguiremos ampliando en el resto de capítulos ya que juega un papel fundamental en la distribución de los números primos.

Como hemos visto en la sección anterior $\sigma_a = 1$ y $\sigma_c = \sigma_a$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty}|n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$, para s real. Es decir, converge absolutamente para los mismos valores que para los que converge. Con ello, estamos seguros de que $\zeta(s)$ define una función holomorfa para $\sigma > 1$ y que no converge para ningún valor con $\sigma < 1$.

Introducimos la serie de Dirichlet auxiliar

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

Por un ejemplo anterior sabemos que $\sigma_c = 0$, por tanto $L(s)$ define una función holomorfa en $\sigma > 0$. Vemos en la siguiente proposición la relación que existe entre ambas.

Proposición 3. *Tenemos que:*

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = L(s) \qquad \text{si } \sigma > 1.$$

Demostración.

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} - 2\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ par}}}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \zeta(s) - 2^{1-s}\zeta(s) = \zeta(s)(1-2^{1-s}),$$

este es el resultado buscado. □

Entonces, aunque $\zeta(s)$ no converge en todo el semiplano $\sigma > 0$, excluyendo $s = 1$ donde el factor $1 - 2^{1-s}$ se anula, podríamos redefinirla como $L(s)/(1 - 2^{1-s})$ y sería holomorfa en $\sigma > 0$. Esto es lo que se llama una *extensión holomorfa* o *analítica*. Se llama $\zeta(s)$ no solo a la serie de Dirichlet anterior sino también a su extensión.

Vamos a estudiar con más cuidado qué ocurre en $s = 1$, el punto que hemos tenido que excluir.

Proposición 4. *Para $\sigma > 1$:*

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}\,dx = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{x - \lfloor x\rfloor - 1/2}{x^{s+1}},$$

donde $\lfloor x\rfloor$ significa la parte entera.

Demostración.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{L(s)}{1-2^{1-s}} = \frac{1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

Usando la Proposición 2, por ser $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty x^{-s-1}C(x)dx.$$

Siendo $C(x) = \lfloor x\rfloor$, como hemos explicado anteriormente. Entonces tenemos que:

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx.$$

Ahora vamos a probar la segunda igualdad:

$$\frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{x-1/2}{x^{s+1}}dx + s\int_1^\infty \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx, \text{ cogiendo todo menos la última integral:}$$

$$\frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\Big(\frac{x^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2}\frac{x^{-s}}{-s}\Big)\Big|_1^\infty = \frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\Big(-\frac{1}{1-s} - \frac{1}{2s}\Big) = 0.$$

Y con esto llegaríamos al resultado esperado. □

La última integral claramente converge para $\sigma > 0$ porque $x - \lfloor x\rfloor - 1/2$ está acotado. Así que esta fórmula permite extender $\zeta(s)$ al menos a $\sigma > 0$.

Observación 3. *La integral incluso converge para $\sigma > -1$.*

Proposición 5. *La función zeta tiene un polo en $s = 1$ y un residuo que es 1.*

Demostración.

Polo: $\lim_{s\to 1}\zeta(s)$, usando la fórmula de la proposición:

$$\lim_{s\to 1}\zeta(s) = \lim_{s\to 1}\frac{s}{s-1} - \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor - 1/2}{x^{s+1}}dx$$

sabiendo que la integral esta acotada, nos da $\lim_{s\to 1}\zeta(s)=\infty$. Con lo cual, tenemos un polo en $s=1$. Es más, es un polo simple.

Residuo: al ser un polo simple, se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$Res(\zeta,1)=\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)=\lim_{s\to 1} s-\frac{s-1}{2}-s(s-1)\int_1^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor-1/2}{x^{s+1}}dx=1-0-0=1,$$

siendo este el resultado esperado. □

Es decir, $\zeta(s)-1/(s-1)=O(1)$ para $s\to 1$, y recordando la definición de la constante de Euler-Mascheroni:

$$\gamma=\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\log N\Big)=0{,}57721,$$

agrupamos ambas cosas y nos sale la siguiente proposición.

Proposición 6. *Tenemos que,*

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+O(s-1)\qquad para\ s\to 1.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1}\Big(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\Big)&=\lim_{s\to 1}\frac{s}{s-1}-\frac{1}{2}-s\int_1^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor-1/2}{x^{s+1}}dx-\frac{1}{s-1}\\&=1-\frac{1}{2}-\int_1^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor-1/2}{x^2}dx=\frac{1}{2}-\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{x-\lfloor x\rfloor-1/2}{x^2}\,dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{x-\lfloor x\rfloor-1/2}{x^2}\,dx&=\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\Big(\frac{1}{x}-\frac{\lfloor x\rfloor}{x^2}-\frac{1/2}{x^2}\Big)dx\\&=\lim_{N\to\infty}\Big(\log N-\int_1^{N}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^2}-\frac{1}{2}\int_1^{N}\frac{1}{x^2}dx\Big)\\&=\lim_{N\to\infty}\Big(\log N-\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}\Big)\Big),\end{aligned}$$

y ahora juntamos este resultado con la fórmula que teníamos arriba:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}-\lim_{N\to\infty}\Big(\log N-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2N}\Big)&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N\Big)\\&=\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N\Big)=\gamma,\end{aligned}$$

y con ello habríamos terminado la demostración. □

El estudio sobre la función ζ se seguirá ampliando en el resto de capítulos, y haremos uso de estas propiedades más adelante.

CAPÍTULO 2

Funciones multiplicativas

En este segundo capítulo estudiaremos las propiedades de las funciones aritméticas multiplicativas y su relación con las series de Dirichlet, más en especial continuamos el estudio sobre ζ, seguiremos el esquema de [2] y también nos apoyaremos en [6] y [9]. La segunda parte de este capítulo introducirémos la función de Von Mangoldt y veremos la importancia que tiene.

2.1. Funciones aritméticas

Para poder comenzar el estudio de las funciones multiplicativas, primero vamos a renombrar a las sucesiones, reales o complejas, llamándolas *funciones aritméticas*, es decir, son funciones tal que $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$. Y con ello, redefinimos las *series de Dirichlet* como

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Esta nueva definición nos vendrá bien sobre todo en problemas relacionados con los números primos, como veremos. Además, en todo lo que queda de capítulo, p denota un número primo.

Vamos a definir la función constante $f(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ como $\mathbf{1}$, con lo cual así obtenemos $\zeta(s) = D_{\mathbf{1}}$.

Dentro de las funciones aritméticas nos centraremos en las *funciones aritméticas multiplicativas*, que siendo f no nula, cumplen

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{para} \quad \gcd(m, n) = 1.$$

Se dice que es *completamente multiplicativa* si la igualdad se cumple sin la condición $\gcd(m, n) = 1$. Notamos que las funciones multiplicativas cumplen $f(1) = 1$. Las funciones multiplicativas las tomamos como las que dan lugar a las sucesiones a_n en la definición del Capítulo 1 de las series de Dirichlet.

Para ver que hemos entendido bien las definiciones, vamos a ver tres ejemplos.

Definimos $\tau(n)$ como el número de divisores (positivos) de n, $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, y vemos si τ es multiplicativa: $\tau(1) = 1$ es cierto y $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ si y solo si m y n son coprimos, ya que $\tau(mn) = \sum_{d|nm} 1$, pero m y n no comparten ningún divisor, con lo cual

$\tau(mn) = \sum_{d|n} \sum_{d|m} 1 = \tau(n)\tau(m)$. Por ejemplo, $\tau(10) = 4 = \tau(5)\tau(2) = 2 \times 2$, pero τ no es completamente multiplicativa, ya que $\tau(12) = 6$, es distinto de $\tau(6)\tau(2) = 4 \times 2 = 8$. Tenemos

$$\tau(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}) = \tau(p_1^{\alpha_1})\tau(p_2^{\alpha_2})...\tau(p_k^{\alpha_k}) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1),$$

porque al ser p_i primos, sus divisores son sus potencias y el 1, tal que $\tau(p) = 1, \tau(p^2) = 3 = 2 + 1, \dots$.

Introducimos dos funciones nuevas, la primera la *función de Möbius* $\mu(n)$, tal que $\mu(n) = 0$ si n es divisible por algún cuadrado mayor que 1, $\mu(n) = 1$ si n es libre de cuadrados y tiene un número par de factores primos, y $\mu(n) = -1$ si n es libre de cuadrados y tiene un número impar de factores primos. Y la segunda es la *función de Liouville* $\lambda(n) = (-1)^{\omega(n)}$, tal que $\omega(n)$ es el número de factores primos de n contados con multiplicidad.

La función de Liouville es completamente multiplicativa ya que vemos que si m y n no son coprimos, es decir $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, $n = p_1^{\alpha_1} p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \dots p_l^{\alpha_l}$, tenemos que $mn = p_1^{2\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$ y $\lambda(mn) = (-1)^{\omega(mn)} = (-1)^{2\alpha_1 + \dots + \alpha_l} = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r}(-1)^{\alpha_1 + \alpha_{r+1} \dots + \alpha_l} = (-1)^{\omega(m)}(-1)^{\omega(n)} = \lambda(m)\lambda(n)$. Pero la función de Möbius no es completamente, ya que $\mu(p^k) = 0$ para $2 \leq k$. Y cumplen $\mu(p) = \lambda(p) = -1$, para p primo.

Vemos dos ejemplos para $n_1 = 2022$ y $n_2 = 2023$, tenemos que $n_1 = 2 \times 3 \times 337$ y $n_2 = 7 \times 17^2$, entonces $\mu(n_1) = -1 = \lambda(n_1)$ y $\mu(n_2) = 0$, $\lambda(n_2) = -1$.

Continuando con el estudio sobre ζ que iniciamos en el capítulo anterior descubrimos que Euler estableció la relación de $\zeta(s)$ con los números primos, observando que (sin preocuparse de la convergencia) el teorema fundamental de la aritmética implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \Big(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{(p^2)^s} + \frac{1}{(p^3)^s} + \dots\Big)$$

donde p recorre los primos. Obtenemos el *producto de Euler* sumando la progresión geométrica, y nos queda:

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}. \tag{2.1}$$

Riemann siguió estudiando esta relación y logró despejar los primos en términos de ζ, demostró que la distribución de los números primos está ligada al estudio de ζ como una función de variable compleja, que es lo que veremos en el resto de capítulos.

El producto de Euler podemos generalizarlo para cualquier función multiplicativa, tal que

$$D_f(s) = \prod_p D_{f,p}(s) \quad \text{con} \quad D_{f,p}(s) = 1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{(p^2)^s} + \frac{f(p^3)}{(p^3)^s} + \dots, \tag{2.2}$$

y si f es completamente multiplicativa obtenemos $D_{f,p}(s) = (1 - f(p)p^{-s})^{-1}$. Por otro lado, la identidad formal anterior, cambiando el 1 de $D_{f,p}(s)$ por $f(1)$, implica que f es multiplicativa.

Estas identidades tienen sentido numérico exigiendo la convergencia absoluta, como indica la siguiente proposición.

Proposición 7. *Si f es multiplicativa y $D_f(s)$ converge absolutamente para cierto s, entonces el producto en (2.2) converge a $D_f(s)$.*

Demostración. Para cualquier primo p y $s = \sigma + it$, se cumple

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f(p^k)| p^{-k\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| n^{-\sigma} < \infty,$$

con lo cual cada suma de $D_{f,p}(s)$ es absolutamente convergente. Ahora falta ver que dicho producto de sumas converge a $D_f(s)$.

Sea $y \in \mathbb{R}$ y $N = \{n : p|n \Rightarrow p \leq y\}$, es decir, el conjunto de enteros positivos que están compuestos solo por primos que no son más grandes que y $(1 \in N)$. Entonces podemos reescribir:

$$M_y = \prod_{p \leq y} (1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + \dots) = \sum_{n \in N} f(n) n^{-s}.$$

Entonces,

$$\left| M_y - \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} \right| \leq \sum_{n \notin N} |f(n)| n^{-\sigma} = \sum_{n > y} |f(n)| n^{-\sigma}.$$

Este último sumatorio es pequeño si y es grande, es decir, $\left| M_y - \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} \right| \leq \epsilon$, con lo cual podemos concluir que M_y tiende a $\sum f(n) n^{-s}$ cuando $y \to \infty$, que es lo que íbamos buscando. □

Saber cuanto es el valor de $\zeta(2)$ es el llamado *problema de Basilea*, que se puede ver la demostración de que $\zeta(2) = \pi^2/6$ en [16], también se puede encontrar que $\zeta(4) = \pi^2/90$. Con lo cual, teniendo esto en cuenta, de (2.1) podemos deducir las siguientes igualdades

$$\prod_p (1 - p^{-2}) = \frac{6}{\pi^2} \quad \text{y} \quad \prod_p (1 + p^{-2}) = \prod_p \frac{(1 - p^{-2})^{-1}}{(1 - p^{-4})^{-1}} = \frac{15}{\pi^2}.$$

Vemos también que $D_\mu(s) = \prod_p (1 - p^{-s})$, ya que

$$D_{\mu,p}(s) = 1 + \frac{\mu(p)}{p^s} + \frac{\mu(p^2)}{p^2 s} + \dots = 1 + \frac{-1}{p^s} + 0 + 0 + \dots = 1 - p^{-s}.$$

En la siguiente proposición vamos a ver la relación que tiene ζ con otras funciones, y así poder expresarla de diferentes maneras.

Proposición 8. *Las funciones μ y λ se pueden expresar en función de ζ como:*

$$i) \quad \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} \quad y \quad ii) \quad \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = D_\lambda(s).$$

Demostración.

i) Tenemos que $|\mu(n)| = 0$ si n no es libre de cuadrados y $|\mu(n)| = 1$ si n es libre de cuadrados, entonces tenemos $D_{|\mu|}(s) = \prod_p (1+p^{-s})$. Ahora desarrollamos la otra parte de la igualdad:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{(1-p^{-s})^{-1}}{(1-p^{-2s})^{-1}} = \prod_p \frac{\frac{p^{2s}-1}{p^{2s}}}{\frac{p^s-1}{p^s}} = \prod_p \frac{(p^s-1)(p^s+1)}{p^s(p^s-1)} = \prod_p (1+p^{-s}).$$

ii) Como λ es completamente multiplicativa, tenemos que $D_\lambda(s) = \prod_p (1+p^{-s})^{-1}$, ya que $\lambda(p) = -1$. Desarollamos la otra parte de la igualdad:

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{(1-p^{-2s})^{-1}}{(1-p^{-s})^{-1}} = \prod_p \frac{\frac{p^s-1}{p^s}}{\frac{p^{2s}-1}{p^{2s}}} = \prod_p \frac{(p^s-1)p^s}{(p^s-1)(p^s+1)} = \prod_p (1+p^{-s})^{-1}.$$

Que son las igualdades buscadas. □

A continuación, vamos a definir una operación para poder llegar a fórmulas como la de inversión de Möbius, y ver más propiedades de las series de Dirichlet. Dadas dos funciones aritméticas f y g se define su *convolución* como

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d), \quad d \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.3}$$

Es fácil ver que es conmutativa, es decir, $f*g = g*f$. La convolución se refleja en las series de Dirichlet como describe la siguiente proposición.

Proposición 9. *La relación $h = f*g$ entre funciones aritméticas equivale a $D_h(s) = D_f(s)D_g(s)$ con igualdad numérica para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $D_f(s)$ y $D_g(s)$ converjan absolutamente.*

Además, si f y g son multiplicativas, h también lo es y $D_{h,p}(s) = D_{f,p}(s)D_{g,p}(s)$ con igualdad numérica bajo la convergencia absoluta de $D_{f,p}(s)$ y $D_{g,p}(s)$.

Demostración. Escribimos $n = dm$, entonces se tiene que $D_h(s)$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n} n^{-s} f(d)g(n/d) = \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d^{-s}m^{-s}f(d)g(m) = D_f(s)D_g(s).$$

Como $D_{f,p}(s)$ y $D_{g,p}(s)$ son absolutamente convergentes, y por el teorema de Fubini para las series infinitas que se puede ver explicado en [14], se puede hacer la reordenación, que hemos hecho en la fórmula de arriba, de los términos en la serie y con ello se obtiene las igualdades numéricas. Se observa que

$$\sum_{n=1}^{N} |h(n)n^{-s}| \leq \sum_{n=1}^{N} |f(n)n^{-s}| \sum_{n=1}^{N} |g(n)n^{-s}|.$$

Vemos ahora una prueba de condiciones de convergencia, de que si f y g son multiplicativas h también lo es. La clave es que si $d|mn$ para $\gcd(m,n) = 1$ cada potencia de primo que aparece en la factorización de d debe dividir a m o a n. Por tanto, cada $d|mn$ se descompone de manera única como $d = d_1 d_2$ con $d_1|m$ y $d_2|n$, se tiene

$$h(mn) = \sum_{d|mn} f(d)g(\frac{mn}{d}) = \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1 d_2)g(\frac{m}{d_1}\frac{n}{d_2}).$$

El argumento de la suma es $f(d_1)f(d_2)g(m/d_1)g(n/d_2)$, por ser f y g multiplicativas, y se obtiene $h(m)h(n)$.

En el caso de convergencia absoluta de $D_f(s)$ y $D_g(s)$ también se tendrá dicha convergencia para las series de Dirichlet asociadas a $f_p(n)$ y $g_p(n)$ definidas como $f(n)$ y $g(n)$ si n es una potencia de p y cero en otro caso. Sus series son $D_{f,p}$ y $D_{g,p}$ y h_p definida de la misma forma es $f_p * g_p$, ya que si p no es una potencia de n, $h_p(n) = 0$ al igual que f_p y g_p, pero si n sí es una potencia de p obtenemos que $h_p(n) = h(n) = (f * g)(n)$ que sabemos que es cierto ya que al ser n potencia de p tenemos que $f_p(n) = f(n)$ y $g_p(n) = g(n)$. Por tanto $D_{h,p}(s) = D_{f,p}(s)D_{g,p}(s)$ se sigue de la primera parte. □

Haremos unos ejemplos para clarificar esta proposición.

Tenemos que $(1 * id)(n) = \sum_{d|n} 1(d)id(n/d) = \sum_{d|n} \frac{n}{d}$, que es la suma de los divisores de n, es decir, $\sigma(n)$. Con lo cual podemos aplicar la proposición que acabamos de demostrar para poner $D_\sigma(s)$ en términos de ζ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = D_\sigma(s) = D_1(s)D_{id}(s) = \zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{id(n)}{n^s} = \zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-1}} = \zeta(s)\zeta(s-1).$$

Ahora queremos buscar una fórmula más conveniente para $g(n) = \sum_{d|n} d|\mu(d)|$, como tenemos n tal que $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}$ con p_i primos. Y al ser $\mu(n)$ multiplicativa, entonces la función $g(n)$ también lo es, con lo cual $g(n) = \prod_i g(p_i^{\alpha_i})$. Pero p_i es primo,

$$g(p_i^{\alpha_i}) = \sum_{d|p_i^{\alpha_i}} d|\mu(d)| = 1|\mu(1)| + p_i|\mu(p_i)| + p_i^2|\mu(p_i^2)| + \dots + p_i^{\alpha_i}|\mu(p_i^{\alpha_i})| = 1 + p_i + 0 + \dots + 0,$$

con lo cual, $g(n) = \prod_i (1 + p_i)$.

Un ejemplo más numérico es buscar $f(n) = \sum_{d|n}\frac{\tau(d)}{d}$ para $n = 1000$ y siendo τ la función divisor. Nos damos cuenta que $f(n)$ es multiplicativa, ya que si tenemos $\gcd(m,n) = 1$, entonces $f(nm) = \sum_{d|nm}\frac{\tau(d)}{d} = \sum_{d|n}\frac{\tau(d)}{d}\sum_{i|m}\frac{\tau(i)}{i} = f(n)f(m)$. Con lo cual, sabiendo que $n = 2^3 5^3$:

$$f(n) = f(2^3)f(5^3) = \Big(1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\Big)\Big(1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{4}{125}\Big) = \frac{13}{4}\frac{194}{125} = \frac{1261}{250}.$$

Según la proposición que hemos visto arriba, multiplicar por ζ está asociado a convolver con $\mathbf{1}$ que es lo mismo que sumar sobre los divisores. De una manera más explícita tenemos:

Corolario 1. *(Fórmula de inversión de Möbius) Dada f una función artimética, sea $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ entonces $f(n) = \sum_{d|n}\mu(d)F(n/d)$.*

Un ejemplo de este resultado es ver que $\lambda = \mu * f$, tal que f es la función característica de los cuadrados, es decir

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es un cuadrado perfecto,} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \text{ si y solo si } f(n) = \sum_{d|n} \lambda(d).$$

Llamemos $g(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$, tenemos que ver que $g(n) = f(n)$. Se sabe que $g(n)$ es multiplicativa por la proposición anterior, ya que $g = 1 * \lambda$. Sabemos que $\lambda(1) = 1$ y cogemos $n = p_1 \dots p_r$ tal que p_i son primos para todo $i \in \{1, \dots r\}$ y $r \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$g(n) = g(p_1) \dots g(p_r) = (\lambda(1) + \lambda(p_1)) \dots (\lambda(1) + \lambda(p_r)) = (1-1) \dots (1-1) = 0$$

$$g(n^2) = g(p_1^2) \dots g(p_r^2) = (\lambda(1) + \lambda(p_1) + \lambda(p_1^2)) \dots (\lambda(1) + \lambda(p_r) + \lambda(p_r^2)) = (1-1+1) \dots (1-1+1) = 1$$

$$g(n^3) = g(p_1^3) \dots g(p_r^3) = (1 + \lambda(p_1^3)) \dots (1 + \lambda(p_r^3)) = (1-1) \dots (1-1) = 0.$$

Observamos que si tenemos n^j con j impar entonces la suma de $f(p^j) = 0$, pero si j es par entonces la suma de $f(p^j) = 1$ (el número es un cuadrado perfecto).

Si p_i no tuvieran las mismas potencias, observamos que si hay algún j impar, entonces $g(n) = 0$, para que $g(n) \neq 0$ todos los j tendrían que ser par, es decir nuestro n sería un cuadrado perfecto. Con lo cual, $f(n) = g(n)$ y por la fórmula de inversión de Möbius tenemos que $\lambda = \mu * f$.

Para algunas funciones aritméticas la expresión como una convolución permite aproximar su promedio gracias al siguiente resultado elemental:

Proposición 10. *Si $h = f * g$ entonces*

$$\sum_{n=1}^{N} h(n) = \sum_{k=1}^{N} f(k) \sum_{1 \le l \le N/k} g(l).$$

Se ha supuesto que $N \in \mathbb{Z}^+$, pero se podría tomar $N \in \mathbb{R}_{\ge 1}$ escribiendo en los límites de las sumas $1 \le n \le N$ y $1 \le k \le N$.

Demostración. Tomando $k = d$ y $l = n/d$ en (2.3), basta ver que $1 \le n \le N$ equivale a $1 \le kl \le N$. □

Una aplicación de esta proposición es usando que $\sigma = 1 * id$ y dicha proposición tenemos

$$\sum_{n=1}^{N} \sigma(n) = \sum_{k=1}^{N} 1(k) \sum_{1 \le l \le N/k} id(l) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N/k} l = \sum_{k=1}^{N} \Big(\frac{1}{2} \frac{N^2}{k^2} + O(N/k) \Big),$$

usando que $\sum_{m \le x} m = x^2/2 + O(x)$ cuando $x \in \mathbb{N}$, ya que $\sum_{m=1}^{x} m = x(x+1)/2 = (x^2+x)/2 = x^2/2 + O(x)$. Al aproximar por la integral obtenemos $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \sim \log(N)$, con lo cual se consigue

$$\sum_{n=1}^{N} \sigma(n) = \sum_{k=1}^{N} \frac{N^2}{2} \frac{1}{k^2} + O(N \log N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\pi^2}{12} N^2 + O(N \log N),$$

ya que observamos que $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. El error $O(N \log N)$ tiene orden de magnitud mucho menor que N^2, por tanto cabe esperar que la aproximación sea razonable numéricamente en lo que respecta al error relativo.

Con esto terminamos nuestro estudio sobre las funciones aritméticas.

2.2. Función de Von Mangoldt

A continuación, vamos a estudiar una función aritmética no multiplicativa, que tomará mayor importancia en los siguientes capítulos para llegar al teorema de los números primos, es la llamada *función de von Mangoldt*, definida como

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \ k \in \mathbb{Z}^+, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta claro que $D_\Lambda(s)$ es absolutamente convergente en $\sigma > 1$, porque vemos que

$$D_\Lambda(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=p^k}^{\infty} \frac{\log p}{n^s},$$

ya que solo tenemos en cuenta si $n = p^k, k \in \mathbb{Z}^+$, porque el resto de términos son 0. Con lo cual, hay que ver que esa serie es absolutamente convergente, y vemos que

$$\sum_{n=p^k}^{\infty} \left|\frac{\log p}{n^s}\right| = \sum_{n=p^k}^{\infty} \frac{\log p}{n^\sigma}, \quad \text{es trivial ver que para } \sigma < 0 \text{ diverge.}$$

Y observamos que cuando $\sigma > 0$ decrece, y que $|D_\Lambda(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \log n / n^{-\sigma}$. Entonces, por el criterio de condensación vemos que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \log(2^n)/2^{n\sigma} = \log 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(2^{1-\sigma})^n$. Esta es una serie geométrica que convergerá cuando $2^{1-\sigma} < 1$, es decir esta serie converge cuando $\sigma > 1$.

Una vez sabemos cuando converge la serie de Dirichlet de esta función, vamos a ver más propiedades de esta.

Proposición 11. *Teniendo $\Lambda(n)$, podemos obtener la siguiente relación:*

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(n).$$

Demostración. Vemos que para $n = 1$ se cumple: $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d) = 0$.

Por ello, asumimos que $n > 1$ tal que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m} = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$. Sabemos que $\log n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \log p_i$, y que $\sum_{d|n} \Lambda(n) = \Lambda(p_1^{\alpha_1}) + \cdots + \Lambda(p_m^{\alpha_m})$ ya que el resto de términos son 0 por la definición de $\Lambda(d)$. Con lo cual obtenemos,

$$\sum_{d|n} \Lambda(n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{\alpha_k} \Lambda(p_k^{\alpha_i}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{\alpha_k} \log p_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \log p_k = \log n.$$

Hallando así, el resultado buscado. □

Proposición 12. *Relacionando la función de von Mangoldt con las series de Dirichlet, obtenemos que para $\sigma > 1$ se cumplen:*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad y \quad -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_1^{\infty} \psi(x) x^{-s-1} dx,$$

donde $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$.

Demostración.

Para la primera identidad sabemos que $M(s) = 1/\zeta(s) = \sum \frac{\mu(n)}{n^s}$ y que $\zeta'(s) = -D_{\log}(s)$, juntando las dos y usando la Proposición 9:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \zeta'(s)M(s) = -D_{\log}(s)D_{\mu}(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log *\mu)(n)}{n^s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

de aquí nos falta demostrar que $\Lambda = \log *\mu$. Tenemos, gracias a la Proposición 11, que $\log = 1*\Lambda$ y con el Corolario 1 obtenemos esta igualdad.

Para la segunda identidad, usamos el lema de Abel del capítulo anterior. Queremos ver que $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s} = s\int_1^{\infty} \psi(x)x^{-s-1}dx$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{n^s} + s\int_1^{\infty} \psi(x)x^{-s-1}dx, \quad \text{con} \quad g(x) = 1/x^s,$$

tenemos que ver que $\lim_{n\to\infty} \psi(n)/n^s = 0$. Pero $\lim_{n\to\infty} \psi(n)/n^s = \lim_{n\to\infty} \sum_{x\leq n} \Lambda(x)/x^{-s}$, como sabemos que D_Λ converge para $\sigma > 1$, sabemos que este límite es 0 para $\sigma > 1$. Y con esto terminaría la demostración. $\square$

CAPÍTULO 3

La transformada de Mellin

En este tercer capítulo vamos a introducir la transformada de Mellin, es equivalente a la transformada de Fourier tras un cambio de variable, pero la consideramos independiente ya que nos es útil por su relación con las series de Dirichlet, que veremos dicha relación en la segunda parte de este capítulo.

3.1. Definición

Lo primero que vamos a hacer es definirla, dada una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ se define su *transformada de Mellin* como

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx.$$

Consideramos que s es complejo en general, como en las series de Dirichlet, y al ser una integral impropia, tenemos que podría no converger (no existir) para ciertos s, incluso podría no converger nunca.

Un ejemplo de una función para la cual $\mathcal{M}f(s)$ no converge para ningún $s \in \mathbb{C}$, sería $f(x) = x^\alpha$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. Al ser la convergencia en sentido Lebesgue, tenemos que $\mathcal{M}f(s)$ converge o diverge si $\int_0^\infty |f(x)x^{s-1}|dx$ converge o diverge y suponiendo que $\sigma + \alpha \neq 0$:

$$\int_0^\infty |x^{\alpha+s-1}|dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n x^{\alpha+\sigma-1}dx = \frac{1}{\sigma+\alpha} \lim_{n\to\infty} (x^{\alpha+\sigma})|_0^n = +\infty.$$

Si hacemos el caso de $\sigma + \alpha = 0$, nos lleva a un resultado similar con un logaritmo, con lo cual tenemos que $\mathcal{M}f(s)$ diverge para todo $s \in \mathbb{C}$.

La transformada de Mellin que cobra más importancia es la llamada *función* Γ definida por

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx, \quad \text{para} \quad \sigma > 0.$$

Vamos a ver propiedades de dicha función.

Lema 2. *Tenemos que* $\Gamma(1) = 1$ *y* $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$*, y gracias a estas dos relaciones podemos ver que la función* Γ *es una generalización del factorial tal que* $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Demostración. Primero, vemos que $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = (-e^{-x})|_0^\infty = e^0 = 1$. Después:

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^s dx = (-e^{-x}x^s)|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}sx^{s-1}dx = s\Gamma(s).$$

Hemos hecho integración por partes, falta ver que $(-e^{-x}x^s)|_0^\infty = \lim_{n\to\infty} -\frac{n^s}{e^n}$, que claramente es 0 ya que $|n^s/e^n| = (n/e^{n/\sigma})^\sigma$, y haciendo L'Hôpital a la de dentro, para ver a qué tiende tenemos que $\sigma/e^{n/\sigma}$, que cuando $n \to \infty$, esto tiende a 0, con lo cual $(n/e^{n/\sigma})^\sigma$ tiende a 0.

Ahora, con esto podemos ver que $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)(n-2)\ldots 2\Gamma(1) = (n-1)!$, y aquí termina la demostración. □

La transformada de Mellin que define $\Gamma(s)$ solo converge en $\sigma > 0$, pero gracias a la relación que acabamos de ver $\Gamma(s) = s^{-1}\Gamma(s+1)$, podemos extender la definición de manera meromorfa a $\sigma > -1$ e, iterando, a $\mathbb{C}$. Por ejemplo, uno puede definir $\Gamma(-2/3+it)$ como $(-2/3+it)^{-1}\Gamma(1/3+it)$ a pesar de que la integral no converge para $s = -2/3+it$.

Una pequeña variación es la transformada de Mellin de la función gaussiana, es decir teniendo $f(x) = e^{-x^2}$:

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty e^{-x^2}x^{s-1}dx = \int_0^\infty e^{-x^2}x^{2-1}(x^2)^{s/2-1}dx =^{t=x^2} \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{1/2}t^{s/2-1}t^{-1/2}dx = \Gamma(s/2)/2.$$

Partiendo de que $\int_0^\infty f dx = \sqrt{\pi}/2$ (por ser la integral de Gauss), y sabiendo que f es par

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 2\int_0^\infty f(x)dx = 2\mathcal{M}f(1) = 2\frac{1}{2}\Gamma(1/2).$$

Con esto, hemos podido deducir que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Otras transformadas de Mellin bastante frecuentes son las de logaritmos restringidos a $[1,\infty)$, a veces multiplicados por potencias. Vamos a ver un ejemplo con $f(x) = \max(0, x^{2022}\log x)$, observamos que para $x \in [0,1]$ es $f(x) = 0$, y para el resto $x \in (1,\infty)$ es $f(x) = x^{2022}\log x$, y usando integración por partes tenemos que

$$\mathcal{M}f(s) = \int_1^\infty x^{2022+s-1}\log x dx = \Big(\frac{x^{2022+s}\log x}{2022+s} - \frac{x^{2022+s}}{(2022+s)^2}\Big)\Big|_1^\infty =$$

$$= \frac{1}{(2022+s)^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2022+s}\log n}{2022+s} - \frac{n^{2022+s}}{(2022+s)^2} = \begin{cases} \infty \text{ si } -2022 < \sigma, \\ 1/(2022+s)^2 \text{ si } -2022 > \sigma. \end{cases}$$

Con lo cual, hemos visto que $\mathcal{M}f(s)$ converge para $\sigma < -2022$ y que cuando converge vale $1/(2022+s)^2$.

Proposición 13. *La relación con las derivadas viene dada por las siguientes fórmulas:*

$$i) \quad \mathcal{M}f'(s) = (1-s)\mathcal{M}f(s-1) \qquad ii) \quad \mathcal{M}f^{(n)}(s) = (-1)^n\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\mathcal{M}f(s-n).$$

Donde se ha supuesto que las transformadas involucradas convergen.

Demostración.

i) Haciendo integración por partes obtenemos

$$\mathcal{M}f'(s) = \int_0^\infty f'(x)x^{s-1}dx = (f(x)x^{s-1})|_0^\infty - \int_0^\infty f(x)(s-1)x^{s-2}dx =$$

$$= (f(x)x^{s-1})|_0^\infty + (1-s)\mathcal{M}f(s-1),$$

y por la hipótesis del enunciado sabemos que $\mathcal{M}f(s)$ converge, entonces tenemos que $(f(x)x^{s-1})|_0^\infty = 0$, y con esto ya habríamos terminado.

ii) Gracias a la anterior relación, tenemos que $\mathcal{M}f^{(n)}(s) = (1-s)\mathcal{M}f^{(n-1)}(s-1) = \cdots = (1-s)(2-s)\ldots(n-s)\mathcal{M}f(s-n)$. Por otro lado $(-1)^n\Gamma(s)/\Gamma(s-n) = (-1)^n(s-1)!/(s-n-1)! = (-1)^n(s-1)\ldots(s-n) = (1-s)(2-s)\ldots(n-s)$. Juntando ambas cosas obtenemos el resultado que buscábamos. $\square$

Proposición 14. *Si tenemos una función tal que* $h(x) = \int_0^\infty f(x/y)g(y)y^{-1}dy$ *se tiene que* $\mathcal{M}h(s) = \mathcal{M}f(s)\mathcal{M}g(s)$.

Demostración. Cambiando el orden de integración, y usando el cambio de variable $t = x/y$, obtenemos:

$$\mathcal{M}h(s) = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty f(x/y)g(y)y^{-1}dy\Big)x^{s-1}dx = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{s-1}f(x/y)g(y)y^{-1}dxdy$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty (ty)^{s-1}f(t)g(y)dtdy = \int_0^\infty y^{s-1}g(y)dy \int_0^\infty t^{s-1}f(t)dt = \mathcal{M}g(s)\mathcal{M}f(s).$$

Que es el resultado al que queríamos llegar. $\square$

Una de las propiedades más importantes es la que describimos a continuación, que permite recuperar la función de partida a través de su transformada bajo ciertas condiciones de regularidad, vamos a escribir un enunciado habitual de dicha propiedad, que aparece en [8, Th. 11.1.1].

Proposición 15. *(Fórmula de inversión de Mellin) Si* $F(s)$ *es una función holomorfa en una banda* $a < \sigma < b$ *y satisface en ella* $|F(s)| = O((1+|s|)^{-2})$, *entonces para* $a < c < b$ *la función*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)t^{-s}ds, \text{ verifica } \mathcal{M}f(s) = F(s). \tag{3.1}$$

Es importante observar que en $f(t)$ tenemos una integral con variable compleja a lo largo de la recta vertical $\sigma = c$, y al ser F holomorfa (por el teorema de Cauchy o el de los residuos [1]) tampoco depende del c elegido.

Para la prueba de esta proposición nos basaremos en el teorema de inversión de Fourier, que enunciamos a continuación y se puede encontrar tanto en [5] como en [13].

Teorema 2. *Si* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *es* C^∞ *y cumple* $g(x) = O((1+|x|)^{-2})$ *entonces la función*

$$h(x) = \int_{-\infty}^\infty g(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi, \quad \textit{satisface} \quad g(\xi) = \int_{-\infty}^\infty h(x)e^{-2\pi x i\xi}dx.$$

Demostración. (de la proposición) Cogiendo $t = e^{-x}$ parametrizando $s = c + 2\pi\xi i$ y sustituyéndolo en (3.1), obtenemos

$$f(e^{-x}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} F(c+2\pi i\xi)e^{x(c+2\pi i\xi)}d(c+2\pi i\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(c+2\pi i\xi)e^{x(c+2\pi i\xi)}d\xi$$

$$\Rightarrow f(e^{-x})e^{-xc} = \int_{-\infty}^{\infty} F(c+2\pi i\xi)e^{x2\pi i\xi}d\xi.$$

Teniendo esto en cuenta, y con el teorema de inversión de Fourier que hemos enunciado arriba,

$$F(c+2\pi i\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-x})e^{-cx}e^{-2\pi i\xi}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-x})e^{-x(2\pi i\xi+c)}dx =^{t=e^{-x}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^{2\pi i\xi+c}(-t^{-1})dt = \int_{0}^{\infty} f(t)t^{2\pi i\xi+c-1}dt \Rightarrow F(c+2\pi i\xi) = \mathcal{M}f(c+2\pi i\xi).$$

Es decir, obtenemos $F(s) = \mathcal{M}f(s)$, que es lo que buscábamos. □

3.2. Relación con las series de Dirichlet

En esta parte del capítulo vamos a ver la relación de la transformada de Mellin con las series de Dirichlet, como anunciamos al principio.

Proposición 16. *Sea una serie de Dirichlet* $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$, *tenemos que para* $\sigma >$ máx$(0, \sigma_a)$ *se cumple*

$$D(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\mathcal{M}f(s) \quad \textit{con} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}.$$

Demostración. Sabemos que $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$, y viendo que

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}x^{s-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx,$$

para ver que la igualdad de la proposición es cierta, tenemos que ver si

$$\frac{\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx}{\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx} = \frac{1}{n^s}$$

es cierto, es decir si $\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx = \frac{1}{n^s}\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$.

Para ello, hacemos cambio de variable tal que $x = x/n$, en $\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx$, con ello obtenemos $\int_0^\infty e^{-x}(\frac{x}{n})^{s-1}\frac{1}{n}dx$, que es lo mismo que tenemos a la derecha en la igualdad, y con esto hemos terminado la demostración. □

Gracias a esta proposición, podemos obtener fórmulas de integrales sencillas para $\zeta(s)$ que sería $\Gamma(s)\zeta(s) = \mathcal{M}f(s)$ con $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$, es decir, $\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}$. Y $L(s)$, con L

definido como en el Capítulo 1, tal que $\Gamma(s)L(s) = \mathcal{M}f(s)$ con $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-nx}$, es decir, $\Gamma(s)L(s) = \int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x+1}$.

El siguiente teorema nos va a permitir deducir un resultado muy importante sobre las series de Dirichlet mediante la transformada de Mellin. No lo vamos a demostrar aquí, ya que es un tanto complicado, pero se puede encontrar en [9, §8.3], ahí dan como consecuencia directa del teorema un resultado importante que nosotros vamos a deducir, y que explicaremos con más detalle.

Teorema 3. *(Wiener-Ikehara) Si $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función no decreciente que se anula en $[0,1]$ tal que $\mathcal{M}f(s)$ converge para $\sigma < -1$ y $\mathcal{M}f(s) + (s+1)^{-1}$ admite una extensión continua a $\sigma \leq -1$, entonces*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1.$$

En el teorema, como es habitual, la expresión "no decreciente" significa que $f(x_1) \leq f(x_2)$ si $x_1 \leq x_2$, es decir, creciente aunque quizá no estrictamente. Este es un tipo de teorema, de los que se llaman *teoremas tauberianos* que permiten saber, bajo ciertas condiciones, cómo crece una función a partir de cómo crecen sus promedios. Otro enunciado de este teorema se encuentra en [17], que es el habitual.

Para entenderlo mejor vamos a comprobarlo con una función $f(x) = \max(0, x-1)$, que podemos ver que claramente es una función no decreciente y que se anula en $[0,1]$, es decir, si $x \in [0,1]$ tenemos $f(x) = 0$. Vamos a comprobar ahora que $\mathcal{M}f(s)$ converge para $\sigma < -1$,

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^1 0dx + \int_1^{\infty}(x-1)x^{s-1}dx = \frac{1}{s(s+1)}(sx^{s+1} - (s+1)x^s)|_1^{\infty} = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Nos vamos a centrar en cuando existe este límite, y vemos que para $\sigma > -1$ el límite vale ∞, con lo cual no existe y $\mathcal{M}f(s)$ no converge. Y para $\sigma < -1$ tenemos que el límite es 0 y $\mathcal{M}f(s) = 1/s(s+1)$ converge. Con lo que tenemos que $\mathcal{M}f(s)$ converge para $\sigma < -1$, es decir f cumple otra hipótesis del teorema. Ahora vamos con la última hipótesis que tiene que cumplir f, que es que $\mathcal{M}f(s) + 1/(s+1)$ admite una extensión continua a $\sigma \leq -1$. Vemos que $\mathcal{M}f(s) + 1/(s+1) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s}$, que es continua incluso en $\sigma < 0$, con lo cual sí, $\mathcal{M}f(s) + 1/(s+1)$ admite una extensión continua para $\sigma \leq -1$. Y por último comprobamos que también satisface la conclusión del teorema, que en efecto $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x} = 1 - 0 = 1$.

Teorema 4. *Partimos de una serie de Dirichlet $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ con $0 \leq a_n$ y $\sigma_a = 1$. Supongamos que para cierto $K \in \mathbb{R} - \{0\}$ se cumple que $D(s) - K/(s-1)$ tiene una extensión continua a $1 \leq \sigma$. Entonces se cumple*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a_n = K.$$

Vamos aplicar este teorema a $\zeta(s)$ para ver un ejemplo, primero comprobamos que cumple con las hipótesis, $\sigma_a = 1$ (lo vimos en el Capítulo 1) y $a_n = 1 \geq 0$. También sabemos del Capítulo 1 que $\zeta(s)$ tiene un polo en $s=1$ y un residuo que es 1, es decir $\zeta(s)-1/(s-1)$ es una extensión continua a $1\leq\sigma$, es decir en nuestro caso sería $K=1$ que sí que cumple $K\in\mathbb{R}-\{0\}$. Entonces aplicamos el teorema $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}1=\lim_{N\to\infty}N/N=1$.

Lema 3. *Si tenemos $f(x)=K^{-1}\sum_{n\leq x}a_n$ para $\sigma>1$ vemos que $D(s)=sK\mathcal{M}f(-s)$.*

Demostración. Partimos de

$$sK\mathcal{M}f(-s)=sK\int_0^\infty\frac{1}{K}\sum_{n\leq x}a_nx^{-s-1}dx=s\int_1^\infty\sum_{n\leq x}a_nx^{-s-1}dx,$$

ya que se anula en $[0,1]$. Aplicamos el Lema de Abel con $g(x)=-x^{-s}$, de tal manera que $g'(x)=sx^{-s-1}$ y se tiene

$$s\int_1^\infty\sum_{n\leq x}a_nx^{-s-1}dx=\sum_{n\leq\infty}a_ng(\infty)-\sum_{n\leq\infty}a_ng(n),\qquad g(\infty)=\frac{-1}{x^s}\Big|_\infty=0.$$

Esto es cierto ya que tenemos $\sigma>1$, con lo cual $s\int_1^\infty\sum_{n\leq x}a_nx^{-s-1}dx=D(s)$, que es lo que buscábamos. $\square$

Teniendo en cuenta este lema, vamos a demostrar el Teorema 4, que es una consecuencia del teorema de Wiener-Ikehara como adelantamos antes.

Demostración. Como $\sigma_a=1$, tenemos que para todo $\sigma>1$ la serie $D(s)$ converge absolutamente. Tomamos σ_0 tal que $1<\sigma_0<\sigma$ y se cumple que

$$\frac{1}{N^\sigma}\sum_{n=1}^{N}a_n=\frac{1}{N^{\sigma-\sigma_0}}\frac{1}{N^{\sigma_0}}\sum_{n=1}^{N}a_n,$$

y como sabemos que $0\leq a_n$, entonces tenemos $\frac{1}{N^\sigma}\sum_{n=1}^{N}a_n\leq\frac{1}{N^{\sigma-\sigma_0}}\sum_{n=1}^{N}a_n/n^{\sigma_0}$, y para $N\to\infty$ la serie converge y $1/N^{\sigma-\sigma_0}=0$ ya que $\sigma_0<\sigma$, con lo cual podemos concluir que cuando $N\to\infty$: $\frac{1}{N^s}\sum_{n=1}^{N}a_n=0$ para $\sigma>1$.

Suponiendo ahora que tenemos $D(s)$ como en el lema, vemos que f se anula en $[0,1]$ y que es no decreciente y $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$. Al tener $D(s)$ que converge para $\sigma>1$, entonces $D(-s)$ converge para $\sigma<-1$, y como tenemos que $D(-s)=-sK\mathcal{M}f(s)\Rightarrow\mathcal{M}f(s)=-D(-s)/sK$ que entonces converge para $\sigma<-1$.

Continuamos viendo que, si suponemos que $D(s)-K/(s-1)$ tiene una extensión continua a $1\leq\sigma$, entonces $D(-s)+K/(s+1)$ tiene una extensión continua a $\sigma\leq-1$, es decir $-(D(-s)+K/(s+1))/sK+1/s$ también tiene una extensión continua a $\sigma\leq-1$, y observamos

$$\frac{-1}{sK}\Big(D(-s)+\frac{K}{s+1}\Big)+\frac{1}{s}=\mathcal{M}f(s)+\frac{-1}{s(s+1)}+\frac{1}{s}=\mathcal{M}f(s)+\frac{1}{s+1}.$$

Con todo esto acabamos de ver que $D(s)$ cumple con todas las hipótesis del teorema de Wiener-Ikehara, con lo cual podemos aplicarlo, y concluir que $\lim_{x\to\infty}f(x)/x=1$, esto es $\lim_{x\to\infty}K^{-1}x^{-1}\sum_{n\leq x}a_n=1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}x^{-1}\sum_{n\leq x}a_n=K$, que es el resultado del teorema. $\square$

Estos teoremas serán muy importantes en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4

La distribución de los primos

En este último capítulo lo que vamos a estudiar es la relación entre algunas series de Dirichlet y la distribución de los primos. Más concretamente, vamos a ver el *Teorema de los números primos.* Nosotros vamos a deducir dicho teorema a partir del teorema de Wiener-Ikehara definido en el Capítulo 3 y con información que ya tenemos del resto de los capítulos sobre ζ.

4.1. Teorema de los números primos

El teorema de los números primos lo descubrió Gauss, pero pasaron unos 100 años hasta que C. J. de la Vallée Poussin y J. Hadamard lo demostraron en 1896. Comenzamos demostrando una proposición que nos llevará poco a poco al resultado buscado.

Proposición 17. *Definimos $F(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$, entonces tenemos*

$$i) \quad \lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon F(1+\epsilon) \qquad y \qquad ii) \quad \lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon F(1+\epsilon+it_0) = -\nu(t_0)$$

para $t_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$, donde $\nu(t_0)$ es el orden de anulación de $\zeta(s)$ en $s = 1 + it_0$. Esto es, cero si no se anula y la multiplicidad del cero si se anula (esta multiplicidad es siempre un número natural).

Demostración.

i) Por el Capítulo 1 sabemos que $\zeta(s)$ define una función meromorfa en $\sigma > 0$ con un polo en $s = 1$ y haciendo en sus cercanías el desarrollo de Laurent obtenemos $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \dots$, donde los puntos suspensivos indican los términos de orden superior, esto es $a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \dots$. Las funciones holomorfas son analíticas, es decir, se pueden desarrollar en serie y sus derivadas siguen siendo holomorfas, por ello $\zeta'(s) = \frac{-1}{(s-1)^2} + \dots$, que en este caso los términos de orden superior son $a_1 + 2a_2(s-1) + \dots$. Con lo cual,

$$F(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\frac{1}{(s-1)^2} + \cdots}{\frac{1}{s-1} + \gamma + \dots} = \frac{1}{(s-1)(1+\gamma(s-1)+\dots)} + \cdots = \frac{1}{s-1} + \dots,$$

ahora podemos hacer el límite que nos pide, tal que $\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon F(1+\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\epsilon}{1+\epsilon-1} = 1$.

ii) Si en vez de desarrollar en $s=1$, como el anterior, desarrollamos en un punto diferente $s=p$, no habrá polo y se tiene $\zeta(s)=a_m(s-p)^m+a_{m+1}(s-p)^{m+1}+\dots$, con $m=0$ si $\zeta(s)$ no se anula en $s=p$ y el orden de anulación si lo hace, también tenemos $\zeta'(s)=ma_m(s-p)^{m-1}+(m+1)a_{m+1}(s-p)^m+\dots$. Ahora obtenemos,

$$F(s)=-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{-ma_m(s-p)^{m-1}-(m+1)a_{m+1}(s-p)^m+\dots}{a_m(s-p)^m+a_{m+1}(s-p)^{m+1}+\dots}=$$

$$=\frac{-ma_m-(m+1)a_{m+1}(s-p)+\dots}{a_m(s-p)+a_{m+1}(s-p)^2+\dots}=\frac{-m}{(s-p)(1+\frac{a_{m+1}}{a_m}(s-p)+\dots)}+\dots=\frac{-m}{s-p}+\dots,$$

con lo cual tenemos que $\lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon F(1+\epsilon+it_0)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon\frac{-m}{1+\epsilon+it_0-1-it_0}+\dots=-m=-\nu(t_0)$, que era el resultado buscado. □

Proposición 18. *Tenemos para cualquier $\epsilon>0$ y $t_0\in\mathbb{R}$*

$$\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{2+k}F(1+\epsilon+ikt_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+\epsilon}}(n^{it_0/2}+n^{-it_0/2})^4\geq 0,$$

y gracias a esta fórmula sabemos que $\nu(t_0)=0$, es decir $\zeta(s)$ no se anula en $s=1+it_0$.

Demostración. Primero vemos si la igualdad es cierta,

$$\sum_{k=-2}^{2}\binom{4}{2+k}F(1+\epsilon+ikt_0)=\binom{4}{0}F(1+\epsilon-2it_0)+\binom{4}{1}F(1+\epsilon-it_0)+$$

$$+\binom{4}{2}F(1+\epsilon)+\binom{4}{3}F(1+\epsilon+it_0)+\binom{4}{4}F(1+\epsilon+2it_0)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+\epsilon}}(n^{2it_0}+4n^{it_0}+6+4n^{-it_0}+n^{-2it_0})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+\epsilon}}(n^{it_0/2}+n^{-it_0/2})^4,$$

ya que usando el binomio de Newton se puede ver que la última igualdad es cierta.

Ahora haremos la segunda parte, que es deducir que $\nu(t_0)=0$. Multiplicando la parte de la fórmula de la derecha por ϵ y tomando límites, y usando la proposición anterior obtenemos

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}(\epsilon F(1+\epsilon-2it_0)+4\epsilon F(1+\epsilon-it_0)+6+4\epsilon F(1+\epsilon+it_0)+\epsilon F(1+\epsilon+2it_0))=$$

$$-\nu(-2t_0)-4\nu(-t_0)+6-4\nu(t_0)-\nu(2t_0)=-2\nu(2t_0)-8\nu(t_0)+6,$$

y como todo esto es positivo, por la fórmula que hemos demostrado en la primera parte de la demostración, podemos concluir que para que esto sea cierto tiene que ser $\nu(t_0)=0$.

Una pequeña indicación es que $\nu(t_0)=\nu(-t_0)$, esto es porque $\nu(t_0)$ es el orden de anulación de $\zeta(s)$ en $s=1+it_0$, y como s es complejo, siempre que anule $\zeta(s)$, su conjugado también lo anula, es decir $1-it_0$, por ello $\nu(t_0)=\nu(-t_0)$. □

Con estas dos proposiciones hemos visto que $\zeta(s)$ no se anula en $\sigma=1$. Y con las siguientes proposiciones vamos paso a paso hasta llegar hasta el teorema de números primos.

Lema 4. *Vemos que* $-s^{-1}F(-s)+(s+1)^{-1}$ *define una función continua en* $\sigma \leq -1$.

Demostración. Sabemos por capítulos anteriores que $\zeta(s)$ es holomorfa en $\sigma > 0$, con lo cual $F(-s)$ es holomorfa en un abierto que contiene a $\sigma \leq -1$ excluyendo a $s = -1$. Lo que nos falta ver es que la función del lema se extiende a una función continua en $s = -1$. Pero como hemos visto en la demostración de la Proposición 17, podemos escribir $F(s) = \frac{1}{s-1} + \dots$, con lo cual

$$-s^{-1}F(-s)+(s+1)^{-1} = \frac{-s}{-s-1} + (s+1)^{-1} + \dots .$$

Y vemos que $1/(-s-1)$ no es continua, pero $\frac{-s}{-s-1} + (s+1)^{-1}$ sí lo es. □

Proposición 19. *Sea* $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$, *tenemos que* $\psi(x) \sim x$ *cuando* $x \to \infty$.

Demostración. Definimos $f(x) = \psi(x)$ (que conocemos esta función por el Capítulo 2), entonces observamos que $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ y se anula en $[0, 1]$ ya que $\psi([0, 1]) = \psi(1) = 0$ y es no decreciente. Y sabiendo que $\int_1^\infty \psi(x)x^{-s-1}dx = \int_0^\infty \psi(x)x^{-s-1}dx$ converge para $\sigma > 1$, entonces $\int_0^\infty \psi(x)x^{s-1}dx = \mathcal{M}f(s)$ converge para $\sigma < -1$. Y por último, gracias al lema anterior sabemos que $\mathcal{M}f(s) + 1/(s + 1)$ es una función continua en $\sigma < -1$, es decir, cumple todas las hipótesis para poder aplicar el teorema de Wiener-Ikehara del Capítulo 3. Aplicándolo, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{es decir,} \quad f(x) \sim x \Rightarrow \psi(x) \sim x.$$

□

Proposición 20. *Se cumple* $\vartheta(x) \sim x$, *donde* $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$.

Demostración. Tenemos que $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \log p$, teniendo en cuenta que $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ podemos escribir $\psi(x) = \sum_{k=1}^\infty \vartheta(x^{1/k})$.

Observamos que para $p^2 \leq x$, $\vartheta(x^{1/2}) \leq \sum_{p \leq x^{1/2}} \log p \leq (1/2) \log x \sum_{p \leq x^{1/2}} 1 \leq (1/2)x^{1/2} \log x$ y que para cada $k > 2$ en $p^k \leq x$ hay menos de $x^{1/3}$ primos, con lo cual podemos escribir que

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^\infty \vartheta(x^{1/k}) = \vartheta(x) + O(x^{1/2}\log x + x^{1/3}\log^2 x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2}\log x).$$

Ya que esta claro que $O(x^{1/2} \log x)$ tiene un orden mayor que $O(x^{1/3} \log^2 x)$. Sabiendo esto, podemos concluir que si $\psi(x) \sim x$ implica que $\vartheta(x) \sim x$. □

Introducimos la función contadora de los primos:

$$\pi(x) = |\{p \leq x : p \text{ es primo}\}|,$$

tradicionalmente se considera $x \in \mathbb{R}^+$ aunque toda la información está en $x \in \mathbb{Z}^+$.

Lema 5. *Para cualquier* $x > 1$ *y* $\epsilon > 0$ *tenemos*

$$\pi(x) \geq \frac{\vartheta(x)}{\log x} \geq \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x} \frac{\log p}{\log x} \geq (1-\epsilon) \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x} 1 = (1-\epsilon)(\pi(x) + O(x^{1-\epsilon})).$$

Demostración. Vamos a ir viendo la desigualdad, de derecha a izquierda. La última equivale a

$$\sum_{x^{1-\epsilon}\leq p\leq x} 1 = \pi(x) + O(x^{1-\epsilon}),$$

teniendo en cuenta que $\pi(x) = |\{p \leq x : p \text{ es primo}\}| = \sum_{p\leq x} 1$, esta claro que esta igualdad es cierta.

Vamos ahora con la primera desigualdad $\sum_{x^{1-\epsilon}\leq p\leq x} \log p/\log x \geq \sum_{x^{1-\epsilon}\leq p\leq x}(1-\epsilon)$, vemos que si $p = x^{1-\epsilon}$ obtenemos $(1-\epsilon)$ y que si $p = x$ obtenemos 1, con lo cual todos los términos del sumatorio de la derecha están en $[(1-\epsilon), 1]$ que esta claro que es mayor que si todos los términos son $(1-\epsilon)$.

Ahora veamos $\vartheta(x) \geq \sum_{x^{1-\epsilon}\leq p\leq x} \log p$, esto esta claro por como esta definido $\vartheta(x)$. Y ya por último nos falta ver $\pi(x) \geq \vartheta(x)/\log x$ que equivale $\sum_{p\leq x} \log x \geq \sum_{p\leq x} \log p$ y esta claro porque $\log x \geq \log p$. □

Gauss observó que $\pi(x)$ se parecía a $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x dt/\log t$, la función llamada *logaritmo integral* y por la regla de l'Hôpital se cumple $\mathrm{Li}(x) \sim x/\log x$. Entonces el resultado básico acerca de las distribución de los primos relacionado con la observación de Gauss es

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad \text{cuando} \quad x \to +\infty, \tag{4.1}$$

que este es el *Teorema de los números primos.*

Nosotros llegamos a este teorema a través del Lema 5 y la Proposición 20, ya que tenemos por un lado que $\pi(x) \geq \vartheta(x)/\log x$, definimos $p(x) = \pi(x)\log x/x$, entonces obtenemos $p(x) \geq \vartheta(x)/x$. Y por el otro lado tenemos $\vartheta(x)/\log x \geq (1-\epsilon)(\pi(x) + O(x^{1-\epsilon}))$, que con ello conseguimos $\frac{\vartheta(x)}{x(1-\epsilon)} + O(x^{-\epsilon}\log x) \geq p(x)$. Juntando las dos desigualdades tenemos

$$\frac{\vartheta(x)}{x(1-\epsilon)} + O(x^{-\epsilon}\log x) \geq p(x) \geq \frac{\vartheta(x)}{x}.$$

Dado $0 < \epsilon < 1$ y para x muy grande tenemos que $p(x)$ está dentro de un intervalo tan próximo como queremos a $[\frac{1}{1-\epsilon}, 1]$. Tomando límites superiores e inferiores obtenemos $1/(1-\epsilon) \geq \limsup p(x)$ y $\liminf p(x) \geq 1$, como ϵ es arbitrario lo hacemos tender hacia 0 por la derecha, entonces

$$\limsup p(x) = \liminf p(x) = 1 \Rightarrow p(x) \to 1, \quad \text{esto es} \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \ (4.1).$$

Desde hace unos años se sabe que es posible reemplazar el teorema de Wiener-Ikehara por otro resultado mucho más sencillo que solo requiere de conceptos básicos de variable compleja. Con ello, D. J. Newman [10] consiguió una prueba bastante simple de (4.1), que D. Zagier simplificó todavía más en [11].

4.2. El término error

Una desventaja de esta prueba (la hecha en este capítulo) del teorema de los números primos es que no habla del término de error. No da ninguna pista acerca de la observación de Gauss sobre el parecido numérico entre $\mathrm{Li}(x)$ y $\pi(x)$, en el sentido de que el error relativo tiende a cero con cierta rapidez. Riemann encontró en su memoria (hay una traducción en [4]), una forma de relacionar $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ con los ceros de la función ζ y en esa relación aparece una curiosa simetría de ζ llamada la *ecuación funcional* y la famosa *hipótesis de Riemann*, todavía sin probar. En esta sección trataremos ambos temas.

Lo primero que vamos a ver, es cómo llegar hasta la ecuación funcional.

Proposición 21. *Para $\sigma > 1$, con $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ tenemos que*

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \mathcal{M}f(s/2).$$

Demostración.

$$\mathcal{M}f(s/2) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{s/2-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2-1} dx =^{x \to x/\pi n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-x} (x/\pi n^2)^{s/2-1} \frac{1}{\pi n^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\pi n^2}\Big)^{s/2} \int_0^\infty e^{-x} x^{s/2-1} dx =$$

$$\frac{1}{\pi^{s/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \Gamma(s/2) = \pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma(s/2),$$

que es el resultado buscado. □

A través de desarrollos de Fourier obtenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = x^{-1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/x} \quad \text{para} \quad x > 0, \tag{4.2}$$

esta relación es bien conocida y se puede encontrar tanto en §1.7.5 o §2.7.5 de [3] como en §9.4 [5], y la vamos a usar a continuación.

Proposición 22. *Tenemos que*

$$\mathcal{M}f(s/2) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty f(x)(x^{-s/2-1/2} + x^{s/2-1}) dx.$$

Demostración. Primero vemos que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x} = 2f(x) + 1$, ya que $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n^2\pi x}$ y 1 se refiere al término $n = 0$, con lo cual tenemos que

$$\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x} = f(x) + 1/2,$$

y por otro lado tenemos que

$$\frac{1}{2}x^{-1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi/x} = x^{-1/2}(f(1/x)+1/2),$$

y gracias a (4.2) podemos juntar estas dos expresiones, y despejando $f(x)$, nos queda $f(x) = x^{-1/2}(f(1/x)+1/2) - 1/2 = \frac{1}{2}(x^{-1/2}-1) + x^{-1/2}f(1/x)$.
Usando esta expresión

$$\mathcal{M}f(s/2) = \int_0^\infty f(x)x^{s/2-1}dx = \int_0^1 f(x)x^{s/2-1}dx + \int_1^\infty f(x)x^{s/2-1}dx =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(x^{-1/2}-1)x^{s/2-1}dx + \int_0^1 x^{-1/2}f(1/x)x^{s/2-1}dx + \int_1^\infty f(x)x^{s/2-1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (x^{-1/2}-1)x^{s/2-1}dx + \int_0^1 f(1/x)x^{s/2-3/2}dx + \int_1^\infty f(x)x^{s/2-1}dx.$$

Integramos esta primera integral $\frac{1}{2}\int_0^1 (x^{-1/2}-1)x^{s/2-1}dx = \left(\frac{x^{s/2+3/2}}{s-1} - \frac{x^{s/2}}{s}\right)\Big|_0^1 = 1/s(s-1)$. Y a continuación hacemos un cambio de variable a la segunda tal que $x \to 1/x$: $\int_0^1 f(1/x)x^{s/2-3/2}dx = \int_0^1 -f(x)x^{-s/2+3/2-2}dx$. Juntando todo,

$$\mathcal{M}f(s/2) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty f(x)x^{-s/2-1/2}dx + \int_1^\infty f(x)x^{s/2-1}dx,$$

que esta es la identidad buscada. □

Teorema 5. *(Ecuación funcional) La función $s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ se extiende a una función entera que es invariante por $s \to 1-s$. En particular, se cumple la* ecuación funcional

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s).$$

Demostración. Por las proposiciones anteriores

$$s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = s(s-1)\mathcal{M}f(s/2) = -1 + s(1-s)\int_1^\infty f(x)(x^{-s/2-1/2} + x^{s/2-1})dx,$$

ahora vamos a ver si es invariante, es decir, sustituimos s por $1-s$:

$$-1 + (1-s)(1-1+s)\int_1^\infty f(x)(x^{(-1+s)/2-1/2} + x^{(1-s)/2-1})dx =$$

$$-1 + (1-s)s\int_1^\infty f(x)(x^{s/2-1} + x^{-s/2-1/2})dx.$$

Que vemos que es la misma fórmula, con lo cual sí que es invariante. Es decir, con esto obtenemos que $s(s-1)\mathcal{M}f(s/2)$ es invariante, entonces $s(s-1)\mathcal{M}f(s/2) = (1-s)(1-s-1)\mathcal{M}f((1-s)/2)$, esto es, $\mathcal{M}f(s/2) = \mathcal{M}f((1-s)/2)$ que equivale a la ecuación funcional por la Proposición 21. □

La relación entre el error y los ceros nos llevaría a temas de convergencia y de variable compleja alejados de este trabajo, daremos por supuesto lo siguiente que resume una parte de las investigaciones de Riemann:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^r \log x) \quad \text{donde} \quad r = \sup\{\Re(\rho) : \zeta(\rho) = 0\}. \tag{4.3}$$

La relación con los ceros de la función $\zeta(s)$ y $\pi(x)$ o $\psi(x)$ se estudia en los capítulos 12, 13 y 15 de [9], pero (4.3) se sigue de [9, Th.12.5] tomando $T = x^{1-r}$.

Nos gustaría tener la menor cota posible para el error $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$, lo que nos lleva a preguntarnos qué tamaño mínimo podría tener r.

Proposición 23. *Si ρ está en el semiplano derecho y cumple que $\zeta(\rho) = 0$, entonces tenemos que $\zeta(1-\rho) = 0$.*

Demostración. Sabemos que $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$ y tal que $\zeta(\rho) = 0$, entonces

$$\zeta(\rho) = \pi^{\rho/2+(1-\rho)/2}\frac{\Gamma((1-\rho)/2)}{\Gamma(\rho/2)}\zeta(1-\rho) \Rightarrow 0 = \frac{\Gamma((1-\rho)/2)}{\Gamma(\rho/2)}\zeta(1-\rho),$$

y también sabemos que por definición de $\Gamma(s)$ no tiene polos en $\sigma > 0$ y que no se anula en dicha región, que viene explicado en [1]. Con lo cual $0 = \zeta(1-\rho)$. □

Ahora, buscamos el r más pequeño, para ello tenemos que ver cuáles son los $\Re(\rho)$ tal que $\zeta(\rho) = 0$, con ρ en el plano $\sigma > 0$, ya que sabemos que los hay. Vemos que para $\sigma > 1$ la función $\zeta(s)$ no tiene ceros, porque como hemos visto en capítulos anteriores se puede escribir como $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ (producto de Euler), y la única manera de que se anulase este producto es que alguno de los factores lo hiciera, y esto es falso. Con lo cual tenemos que $0 < \Re(\rho) < 1$.

Y gracias a la anterior proposición tenemos que $\zeta(\rho) = 0 = \zeta(1-\rho) \Rightarrow \zeta(\rho) = \zeta(1-\rho)$, y para que esto sea verdad tenemos que tener $\Re(\rho) = \Re(1-\rho)$, es decir $\Re(\rho) = 1/2$, en otras palabras, el menor error posible en (4.3) requiere $r = 1/2$. A la línea, $\Re(s) = 1/2$, se le llama la *línea crítica.*

A esto se le llama *hipótesis de Riemann*, según algunos es el problema abierto más importante de las matemáticas.

En principio no hay nada que sugiera que los ceros de una función compleja como $\zeta(s)$ en $\sigma > 0$ estén "en fila india", y uno tendería a pensar que esto es falso porque la única motivación es nuestra esperanza de que el error $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ sea lo menor posible. Sin embargo, combinando resultados teóricos con extensos cálculos con ordenadores, se ha corroborado que si ordenamos los ceros por el valor absoluto de su parte imaginaria, los primeros 10^{13} están en dicha línea. También se conoce que hay infinitos ceros en la línea crítica e incluso, en cierto sentido, que una proporción positiva de los ceros está allí [7].

Con esto concluimos nuestro trabajo sobre como llegar desde el estudio de las series de Dirichlet hasta el teorema de los números primos, junto con el estudio del error del mismo.

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.

[2] F. Chamizo. Funciones aritméticas y series de Dirichlet. http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/2223tenum/notes/sec2.1.pdf, 2022.

[3] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Academic Press, New York, 1972. Probability and Mathematical Statistics, No. 14.

[4] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function*. Academic Press, New York-London, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.

[5] G. B. Folland. *Fourier analysis and its applications*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992.

[6] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by A. Wiles.

[7] H. Iwaniec. *Lectures on the Riemann zeta function*, volume 62 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[8] O. P. Misra and J. L. Lavoine. *Transform analysis of generalized functions*, volume 119 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 106.

[9] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[10] D. J. Newman. *Analytic number theory*, volume 177 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[11] D. Zagier. Newman's short proof of the prime number theorem. *Amer. Math. Monthly*, 104(8):705–708, 1997.

[12] Wikipedia contributors. Big O notation — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Big_O_notation&oldid=1104857404, 2022. [Online; accessed 6-September-2022].

[13] Wikipedia contributors. Fourier inversion theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fourier_inversion_theorem&oldid=1101683208, 2022. [Online; accessed 11-December-2022].

[14] Wikipedia contributors. Fubini's theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fubini%27s_theorem&oldid=1119521622, 2022. [Online; accessed 3-November-2022].

[15] Wikipedia contributors. Morera's theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Morera%27s_theorem&oldid=1067540057, 2022. [Online; accessed 7-September-2022].

[16] Wikipedia contributors. Problema de Basilea — Wikipedia, the free encyclopedia. https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Problema_de_Basilea&oldid=147061850, 2022. [Online; accessed 2-November-2022].

[17] Wikipedia contributors. Wiener-Ikehara theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Wiener%E2%80%93Ikehara_theorem&oldid=1081662894, 2022. [Online; accessed 10-December-2022].