



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

# Funciones Elípticas y Formas Modulares

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

*Autor:* Manuel Merino Silva

*Tutor:* Fernando Chamizo Lorente

Curso 2018-2019



## Resumen

El trabajo presenta dos partes bien diferenciadas. Los tres primeros capítulos están dedicados a la teoría de funciones elípticas. Aparecieron por primera vez como inversas de las integrales elípticas, que toman esta denominación porque los problemas donde originalmente surgieron estaban relacionados con el cálculo de la longitud de arco de una elipse. Se pone especial énfasis en el estudio de ejemplos singulares como las funciones theta o las funciones elípticas de Jacobi, que determinan el movimiento de un péndulo y tienen numerosas aplicaciones en física. Precisamente usaremos una de estas funciones para probar una identidad vinculada con la función gamma. Por otro lado, el resto del documento ahonda en el campo de las formas modulares y un operador relacionado con ellas que resulta muy práctico. Su estudio pertenece principalmente al área de la teoría de números y del análisis complejo, aunque las formas modulares aparecen en otras ramas de las matemáticas. Resulta curioso observar como a partir de una teoría que puede parecer complicada debido a la notación, se consiguen extraer demostraciones sencillas como algunas identidades que involucran sumas de potencias de divisores, la propiedad multiplicativa de la función  $\tau$  de Ramanujan o la proximidad de la llamada constante de Ramanujan a un entero.

## Abstract

The paper has two well-differentiated parts. Chapters running from one to three are dedicated to the theory of elliptic functions. They first appeared as inverse functions of elliptic integrals, whose name comes from problems where they arose originally, related to the calculus of the arc length of an ellipse. Special emphasis is placed on singular examples such as theta functions and Jacobi elliptic functions, which are found in the description of the motion of a pendulum and has numerous applications in physics. We will actually use one of these functions in order to prove an identity involving the gamma function. Next in order, the rest of the paper is about modular forms and an operator related to them which can be very handy. Its study belongs to the field of number theory and complex analysis, although modular forms appear in many different areas of mathematics. It is striking that starting from a theory which can get complicated due to messy notation, interesting and easy proofs can be obtained, such as some identities involving sums of powers of divisors, the multiplicative property of Ramanujan function  $\tau$  or the closeness of the so-called Ramanujan constant to an integer.



# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Funciones elípticas</b>	<b>1</b>
1.1	Introducción histórica . . . . .	1
1.2	Teoría de funciones elípticas . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Las funciones elípticas de Jacobi</b>	<b>9</b>
2.1	Definiciones preliminares . . . . .	9
2.2	Cálculo de residuos . . . . .	10
2.3	Integrales elípticas . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Una identidad de Ramanujan</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Funciones y formas modulares</b>	<b>21</b>
4.1	Las series de Eisenstein . . . . .	22
4.2	La función discriminante . . . . .	24
<b>5</b>	<b>La fórmula para la dimensión</b>	<b>27</b>
5.1	Generalización de la fórmula . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Los operadores de Hecke</b>	<b>33</b>
6.1	Definición, propiedades y ejemplos . . . . .	33
6.2	Diagonalización y aplicaciones . . . . .	39

---

Apéndices

<b>A</b>	<b>Funciones elípticas de Jacobi</b>	<b>41</b>
<b>B</b>	<b>Propiedades de <math>SL_2(\mathbb{Z})</math></b>	<b>43</b>
<b>C</b>	<b>El grupo <math>\Gamma_0(2)</math></b>	<b>45</b>
<b>D</b>	<b>La ecuación modular</b>	<b>49</b>



# CAPÍTULO 1

## Funciones elípticas

---

### 1.1. Introducción histórica

Con la intención de asimilar de la forma más completa posible el contenido de este trabajo, es importante adquirir una breve visión histórica acerca de la teoría de funciones elípticas. En concreto, se abordarán las aportaciones que realizaron Gauss, Abel, Jacobi y Eisenstein a lo largo del siglo XVIII y XIX. Uno de los objetivos de la época era expandir el potencial del análisis matemático añadiendo a las funciones elementales nuevas clases de funciones, que debían dominarse tanto como las primeras. Este proceso había estado ocurriendo durante varias décadas, pero fue gracias al trabajo de estos matemáticos, entre otros, cuando adquirió nuevas características.

El punto de partida de Gauss (1777-1855) se encuentra en la construcción de la teoría de un tipo especial de funciones: las funciones lemniscáticas. Basó su razonamiento en la analogía con las funciones trigonométricas, de la misma forma que usó las funciones lemniscáticas para desarrollar los fundamentos de la teoría de funciones elípticas. Gauss se apoyó únicamente en resultados del siglo XVIII para desarrollar todos los conceptos fundamentales: consideración de variables con valores complejos, deducción y uso de teoremas de adición, técnicas de operación con series de potencias y expansión de funciones en productos infinitos. Desafortunadamente, el material que Gauss eligió para publicar no fue muy inteligente dado que antepuso resultados que no eran esencialmente nuevos, mientras que la mayor parte de sus descubrimientos en el campo de las funciones elípticas se quedó en un simple borrador. Por ello, el crédito histórico de sentar las bases sobre dicha teoría se atribuye a Abel y Jacobi, quienes obtuvieron los mismos resultados un cuarto de siglo después.

Abel (1802-1829) fue el primero en publicar un documento en el que se definían las funciones elípticas como inversas de integrales elípticas bajo el título *Recherches sur les fonctions elliptiques* (1827). En él, obtiene resultados coincidentes con los de Gauss pero expuestos de forma más completa y sistemática. Entre ellos, cabe destacar el teorema de adición, la extensión de la definición de argumento a un número complejo arbitrario y las fórmulas de multiplicación y división del argumento. Poco tiempo después de la publicación e influenciado probablemente por ésta, Jacobi anunció (sin pruebas) un nuevo resultado esencial en las transformaciones de integrales elípticas.

Sin embargo, a Abel no le sentó nada bien este hecho y, en respuesta, publicó su teoría sobre transformaciones de funciones elípticas en los años 1828 y 1829, incluyendo el resultado de Jacobi. En términos de integrales, el asunto se reduce a estudiar qué cambios de variables transforman una integral elíptica en otra. Ésta y otras cuestiones fueron abordadas en la segunda parte de *Recherches sur les fonctions elliptiques*.

Tras la muerte de Abel, Jacobi (1804-1851) se alzó como uno de los referentes en el campo de las funciones elípticas. Fue profesor en la universidad de Königsberg (antigua Prusia), donde obtuvo también la cátedra. En 1829, publicó en latín la obra *Fundamenta nova functionum ellipticarum*, donde desarrolló la teoría de funciones theta. En cuanto al estudio de funciones elípticas, tomó como partida la de primer tipo y estudió los siguientes fenómenos, algunos de ellos ya considerados por otros matemáticos: transformación de funciones elípticas, multiplicación y división de argumentos, relación entre integrales de segundo, tercer y cuarto tipo; todo ello usando las funciones theta como funciones auxiliares. Desde el punto de vista histórico, el enfoque de Jacobi en torno a la teoría de funciones elípticas es bastante destacable. No había pasado ni una década desde la idea de invertir las integrales elípticas y ya estaban intentando deshacerse de las condiciones de este problema concreto para introducir la clase de funciones elípticas basada en consideraciones más generales.

La obra de Jacobi se extendió entre los matemáticos de varios países como Rusia o Francia, especialmente aquellos interesados en mecánica. Sin embargo, en la década de 1840 surgieron nuevos elementos en la teoría de funciones elípticas que empujaron las funciones de Jacobi a un segundo plano. Entre ellos, Eisenstein (1823-1852) estudió el producto de ciertos números complejos y obtuvo las series mediante las cuales Weierstrass presentó más tarde sus funciones  $\wp(z)$  y  $\wp'(z)$ . Lo que le faltó a Eisenstein fue considerar los factores de una forma particular, que garantizaban la convergencia absoluta de la serie. Sus investigaciones no alteraron el rumbo de la teoría que estaba siendo desarrollada por aquel entonces, sino que sirvió como base de la maquinaria futura de la teoría de funciones elípticas.

## 1.2. Teoría de funciones elípticas

Tras esta introducción acerca del origen y los primeros resultados sobre la teoría de funciones elípticas, podemos definir lo que se conoce actualmente como función elíptica: es una función meromorfa (cociente de funciones holomorfas) en  $\mathbb{C}$  tal que

$$(1.1) \quad f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$$

donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ . El conjunto formado por todos los posibles períodos lo denotaremos por

$$(1.2) \quad \Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Escribiremos  $\Lambda^* = \Lambda - \{0\}$  y llamaremos paralelogramo fundamental  $\mathcal{P}$  al paralelogramo cerrado de vértices  $0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_1 + \omega_2$  y  $\omega_2$  o a cualquiera de sus trasladados. Pero antes de profundizar en la teoría de funciones elípticas, vamos a demostrar que no



tiene mucho interés considerar funciones meromorfas en  $\mathbb{C}$  con más de dos períodos, pues todas ellas son constantes.

Sea  $f$  una función meromorfa en  $\mathbb{C}$  con tres períodos linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ ; esto es,  $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z + \omega_3)$ . Según el lema 1.1 enunciado más abajo, el conjunto  $\{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3\}$  tiene un punto de acumulación en 0 y la función  $f$  es constante en dicho conjunto; por tanto, constante en todo punto. Con esto, deducimos que no existen funciones no constantes meromorfas en  $\mathbb{C}$  con tres períodos linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Lema 1.1.** *Dados tres números complejos  $\omega_1, \omega_2$  y  $\omega_3 \in \mathbb{C} - \{0\}$ , se cumple*

$$\inf_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 - \{\vec{0}\}} |n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3| = 0.$$

*Demostración.* Si  $\omega_1, \omega_2$  y  $\omega_3$  son linealmente dependientes sobre  $\mathbb{Q}$ , el resultado es trivial. Consideramos, por tanto, el caso contrario e intentaremos llegar a una contradicción. Suponemos que el ínfimo fuera  $\Delta > 0$ . Entonces, los discos  $|z - (n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3)| < \Delta/2$  serían disjuntos para los diferentes valores de  $\vec{n}$ . Por la desigualdad triangular:

$$\Delta/2 \geq ||z| - |n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3|| \geq ||z| - |n_1\omega_1| - |n_2\omega_2| - |n_3\omega_3||.$$

Para cada  $N \in \mathbb{Z}^+$ , los discos con  $|n_j| \leq N$  están contenidos en el disco  $|z| \leq \Delta/2 + N(|\omega_1| + |\omega_2| + |\omega_3|)$ , lo que se deduce de la desigualdad anterior despejando  $|z|$ . Cuando  $N$  es considerablemente grande, el área del disco contenedor puede calcularse como:

$$A(Disco) = \pi R^2 = \pi(\Delta/2 + N(|\omega_1| + |\omega_2| + |\omega_3|))^2 \approx \pi N^2.$$

En este mismo caso, el área total de todos los discos con  $|n_j| \leq N$  es el área de uno de ellos multiplicada por el número de discos que cumplen la condición dada, ya que éstos son disjuntos. El área de un disco es simplemente  $\pi\Delta^2/4$  y  $n_j$  puede tomar  $2N + 1$  valores distintos que cumplen  $|n_j| \leq N$ . Como  $n \in \mathbb{Z}^3 - \{0\}$ , hay  $(2N + 1)^3 - 1$  valores distintos (hay que omitir el  $\vec{0}$ ) y, por ello, discos distintos. En conclusión, todos los discos suman un área total de:

$$A(Total) = A(disco) * NumDiscos = \frac{\pi\Delta^2}{4}[(2N + 1)^3 - 1] \approx \pi N^3.$$

Hemos llegado a una contradicción ya que el área del disco contenedor es menor que la suma de las áreas de los discos pequeños para  $N$  grande. Por tanto, la hipótesis de partida era errónea y el ínfimo tiene que ser 0.  $\square$

Una vez hechas las definiciones preliminares, pasamos a enunciar una serie de propiedades, proposiciones, teoremas y lemas que resumen la teoría de funciones elípticas:

**Propiedad 1.1.** *Una función elíptica sin polos es constante.*

**Propiedad 1.2.** *No existen funciones elípticas que tengan un solo polo simple (de orden 1) en el paralelogramo fundamental.*

**Propiedad 1.3.** *Sea  $f$  una función elíptica,  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $\mathcal{P}$  un paralelogramo fundamental tal que  $f(z) \neq z_0, \infty$  para  $z \in \partial\mathcal{P}$ . El número de soluciones de  $f(z) = z_0$  en  $\mathcal{P}$  contando multiplicidades es igual a la suma de los órdenes de los polos de  $f$  en  $\mathcal{P}$ .*

Teniendo en cuenta estas propiedades, la función elíptica “más simple” tiene que tener polos de orden 2 y toma el nombre de función  $\wp$  de Weierstrass:

$$(1.3) \quad \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left( \frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Se puede probar que la suma converge absolutamente fuera de los polos en  $m\omega_1 + n\omega_2$ . Esta función resulta de gran importancia en la teoría de funciones elípticas, pues nos permite caracterizar cualquier función elíptica de acuerdo al siguiente teorema:

**Teorema 1.2.** *Cualquier función elíptica  $f$  puede escribirse como*

$$(1.4) \quad f(z) = G(\wp(z)) + \wp'(z)H(\wp(z))$$

donde  $G$  y  $H$  son funciones racionales (cocientes de polinomios).

*Demostración.* Es suficiente probar que toda función elíptica par  $h$  es una función racional de  $\wp$  gracias a la siguiente identidad:

$$(1.5) \quad f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \wp'(z) \frac{f(z) - f(-z)}{2\wp'(z)}.$$

Suponemos que  $h$  no tiene ni un cero ni un polo en el origen. Si no fuera así, consideramos  $h(z) - P(\wp(z))$  con un polinomio adecuado que los cancele. Podemos mover el paralelogramo fundamental para que  $h$  no tenga tampoco ceros ni polos en  $\partial\mathcal{P}$ . Por la propiedad 1.3 con  $z_0 = 0$  se sigue que en  $\mathcal{P}$  podemos agrupar ceros y polos por parejas  $(c, p)$ . Para cada uno de ellos, la función  $h(z)(\wp(z) - \wp(p))/(\wp(z) - \wp(c))$  tiene menos ceros y menos polos que  $h$  en  $\mathcal{P}$ , porque hemos cancelado los de  $c, -c, p$  y  $-p$ , sin añadir ninguno nuevo ya que  $\wp(z) - z_0$  con  $z_0 = \wp(c), \wp(p)$  tiene exactamente un polo de orden 2 en  $\mathcal{P}$  y sólo dos ceros. Iterando se llega a una función elíptica entera:

$$(1.6) \quad H(z) = h(z) \prod_j \frac{\wp(z) - \wp(p_j)}{\wp(z) - \wp(c_j)}$$

que debe ser constante por la proposición 1.1. Por tanto,  $h = \frac{P_1(\wp)}{P_2(\wp)}$  y hemos probado que  $h$  es una función racional de  $\wp$   $\square$

**Lema 1.3** (Desarrollo de Laurent). *Para  $z \neq 0$  en un entorno del origen se tiene*

$$(1.7) \quad \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k} \quad \text{con} \quad a_{2k} = (2k+1) \sum_{\omega \in \Lambda^*} \omega^{-2k-2}.$$

*Demostración.* Por Taylor,  $(1+x)^{-2} + (1-x)^{-2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)x^{2k}$  y basta aplicar este resultado a (1.3) después de escribir en la suma  $(z+w)^{-2} = w^{-2}(1+z/w)^{-2}$  y agrupar las contribuciones de  $\omega$  y  $-\omega$ .  $\square$

Antes de la aparición de la función  $\wp$  de Weierstrass, Jacobi ya había introducido las llamadas funciones  $\theta$ . La terminología que se va a emplear para definir una función  $\theta$  dado un  $\tau$  fijado con  $\Im\tau > 0$  es la siguiente:

$$(1.8) \quad \theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n z} \quad \text{donde} \quad q = e^{\pi i \tau}.$$

Debido al rápido decaimiento de  $q^{n^2}$ , la convergencia está asegurada y  $\theta$  es entera. Escribiremos  $\tau^* = (1+\tau)/2$ . El siguiente resultado puede tomarse como un ejercicio sencillo:

**Lema 1.4.** *La función definida por (1.8) satisface*

$$(1.9) \quad \theta(z+1) = \theta(z) \quad \text{y} \quad \theta(z+\tau) = q^{-1} e^{-2\pi i z} \theta(z).$$

Estas relaciones son muy interesantes en el sentido de que muchas de las construcciones de funciones elípticas se basan en el cociente de funciones de este tipo para eliminar el factor extra. Un ejemplo de ello es la siguiente proposición:

**Proposición 1.5.** *Sea  $P$  la función entera definida por el producto infinito*

$$(1.10) \quad P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} e^{2\pi i z})(1 + q^{2n-1} e^{-2\pi i z}).$$

*Entonces, la función  $h(z) = \theta(z)/P(z)$  es elíptica y entera; por tanto, constante.*

*Demostración.* Si reordenamos un poco los factores, se puede comprobar que  $P$  satisface las relaciones  $P(z+1) = P(z)$  y  $P(z+\tau) = q^{-1} e^{-2\pi i z} P(z)$ .

$$P(z+\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n+1} e^{2\pi i z})(1 + q^{2n-3} e^{-2\pi i z}) = \frac{1 + e^{-2\pi i z}/q}{1 + q e^{2\pi i z}} P(z) = q^{-1} e^{-2\pi i z} P(z).$$

Esto quiere decir que  $h(z)$  es meromorfa y elíptica. Llamemos  $L = \{\tau^* + m + n\tau : m, n \in \mathbb{Z}\}$ . Los elementos de  $L$  anulan un factor de  $P$  y son todos sus ceros simples. Se puede comprobar igualando cada tipo de factor a cero y obteniendo los valores de  $z$  que cumplen la igualdad.

Por otra parte, un cálculo en (1.8) muestra que  $\theta(z + \tau^*) = -e^{-2\pi iz}\theta(\tau^* - z)$ . Tomando  $z = 0$ , se sigue que  $\theta(\tau^*)(1 + e^{-2\pi iz}) = 0 \Rightarrow \theta(\tau^*) = 0$ . Esto significa que  $\tau^*$  es un cero de  $\theta$  y por (1.9), debe anularse también en  $L$ .

Por tanto, todos los ceros de  $P$  se cancelan con los de  $\theta$  y  $h$  es entera.  $\square$

¿Cuál es la constante resultante del cociente que aparece en la proposición anterior? La respuesta es  $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})$ . Esto es así gracias a la siguiente famosa igualdad:

**Teorema 1.6** (Fórmula del triple producto de Jacobi). *Para todo  $z \in \mathbb{C}$  se tiene:*

$$(1.11) \quad \theta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}e^{2\pi iz})(1 + q^{2n-1}e^{-2\pi iz}).$$

Una vez que sabemos construir funciones elípticas con  $\theta$  (hasta ahora constantes), ¿podemos construir todas? Según el teorema 1.2, es suficiente mostrar que  $\wp$  puede expresarse por medio de  $\theta$ . Con esta proposición, conectamos los dos caminos que se han expuesto en este capítulo: por un lado, la presentación de las funciones elípticas hasta llegar a la construcción de la función  $\wp$  de Weierstrass; y por otro, la aparición de las funciones  $\theta$ . Antes de enunciarla, conviene darse cuenta de que si llamamos  $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$  a la función  $\wp$  correspondiente a los períodos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , la siguiente relación permite reducir el problema al caso en el que  $\wp$  tiene períodos 1 y  $\tau$ :

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) = \omega_1^{-2} \wp(\omega_1^{-1}z; 1; \tau) \quad \text{donde} \quad \tau = \omega_2/\omega_1.$$

**Proposición 1.7.** *Con la notación anterior, existen  $A_\tau$ ,  $B_\tau$  y  $C_\tau$  dependiendo de  $\tau$ , tales que*

$$\wp(z; 1, \tau) = A_\tau \frac{\theta^2(z + 1/2)}{e^{2\pi iz}\theta^2(z + \tau^*)} + B_\tau \quad \text{y} \quad \wp(z; 1, \tau) = - \left( \frac{\theta'(z + \tau^*)}{\theta(z + \tau^*)} \right)' + C_\tau.$$

*Demostración.* Para la primera igualdad, vamos a probar que la fracción inicial  $D(z)$  es elíptica. Obsérvese que tanto  $\theta$  como  $e^{2\pi iz}$  son 1-periódicas. Además:

$$(1.12) \quad \theta^2\left(z + \frac{1}{2} + \tau\right) = q^{-2}e^{-4\pi iz}\theta^2\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \theta^2(z + \tau^* + \tau) = q^{-4}e^{-4\pi iz}\theta^2(z + \tau^*).$$

Por tanto, al dividir obtenemos una función 1-periódica y  $\tau$ -periódica; es decir, elíptica. Por otro lado, sabíamos que  $\theta(z)$  tenía ceros simples en  $\{\tau^* + m + n\tau : m, n \in \mathbb{Z}\}$ , por lo que  $\theta^2(z + \tau^*)$  tiene ceros dobles en  $\{m + n\tau : m, n \in \mathbb{Z}\}$ . Entonces,  $\wp$  y  $D(z)$  tienen polos en  $\{m + n\tau : m, n \in \mathbb{Z}\}$ , en ambos casos dobles y son elípticas. Mirando los primeros términos de sus desarrollos de Laurent:

$$\wp(z; 1, \tau) = \frac{1}{z^2} + a_2z^2 + a_4z^4 \quad \text{y} \quad D(z) = \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{z} + b_0 + b_1z + b_2z^2$$

$$\wp(z; 1, \tau) - \frac{1}{b_{-2}}D(z) = \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1z + \dots$$

Una función elíptica no puede tener solo un polo de orden 1; por tanto,  $c_{-1} = 0$ . En conclusión, queda una función elíptica sin polos; es decir, constante. Identificando coeficientes,  $A_\tau = \frac{1}{b_{-2}}$  y  $B_\tau = c_0$ .

Para la segunda igualdad, sea  $g(z) = \theta'(z + \tau^*)/\theta(z + \tau^*)$ . Tomando logaritmos en la segunda fórmula de (1.12) y derivando, se obtiene:

$$\frac{\theta'(z + \tau^* + \tau)}{\theta(z + \tau^* + \tau)} = -2\pi i + \frac{\theta'(z + \tau^*)}{\theta(z + \tau^*)} \Rightarrow g(z + \tau) = -2\pi i + g(z).$$

Por tanto, la función  $g'(z)$  es elíptica al ser  $\tau$ -periódica y también 1-periódica ( $g$  ya lo era). Recordemos que  $\theta(z + \tau^*)$  tiene ceros simples en  $\Lambda$  por lo que  $g'$  tiene polos dobles allí. A partir de aquí, procedemos como en el caso anterior usando el desarrollo de Laurent para concluir la prueba.  $\square$



## CAPÍTULO 2

# Las funciones elípticas de Jacobi

---

### 2.1. Definiciones preliminares

Nuestro objetivo principal va a ser estudiar una serie de funciones especiales, conocidas como funciones elípticas de Jacobi, y extraer sus propiedades de manera sencilla, lo que nos facilitará la tarea de probar que invierten integrales elípticas. Dichas funciones poseen ciertas aplicaciones. Algunas de ellas, como el movimiento del péndulo, pueden consultarse en los capítulos 4 y 5 de [Law89]. Usaremos las siguientes funciones auxiliares:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \theta_1(z) &= -iq^{1/4}e^{\pi iz}\theta(z + \tau^*), & \theta_2(z) &= q^{1/4}e^{\pi iz}\theta(z + \tau/2), \\ \theta_3(z) &= \theta(z) & \text{y} & & \theta_4(z) &= \theta(z + 1/2). \end{aligned}$$

A partir de ellas, Jacobi consideró tres funciones principalmente:

$$(2.2) \quad \operatorname{sn}(2Kz) = \frac{\theta_1(z)}{\sqrt{k}\theta_4(z)}, \quad \operatorname{cn}(2Kz) = \frac{\sqrt{k'}\theta_2(z)}{\sqrt{k}\theta_4(z)} \quad \text{y} \quad \operatorname{dn}(2Kz) = \frac{\sqrt{k'}\theta_3(z)}{\theta_4(z)},$$

donde  $k$ ,  $k'$  y  $K$  son parámetros que aparecen en las integrales elípticas y que se expresan en términos de las  $\theta_j$  de la siguiente forma:

$$(2.3) \quad \sqrt{k} = \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)} \quad \text{y} \quad K = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(0).$$

Para simplificar futuros cálculos, es conveniente tener en mente la siguiente relación, que involucra a las cuatro funciones  $\theta$  introducidas al comienzo:

$$(2.4) \quad \theta_j(z + \tau) = \epsilon_j q^{-1} e^{-2\pi iz} \theta_j(z) \quad \text{con} \quad \epsilon_1 = \epsilon_4 = -1 \quad \text{y} \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1.$$

Vamos a probarlo para  $j = 1$ :

$$\begin{aligned} \theta_1(z + \tau) &\stackrel{(2.1)}{=} -iq^{1/4}e^{\pi iz}q\theta(z + \tau^* + \tau) \stackrel{(1.9)}{=} -iq^{1/4}e^{\pi iz}q[q^{-1}e^{-2\pi iz}e^{-2\pi i\tau^*}\theta(z + \tau^*)] \stackrel{(2.1)}{=} \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \theta_1(z)[e^{-2\pi iz}e^{-\pi i\tau}e^{-\pi i}] = \theta_1(z)e^{-2\pi iz}q^{-1}(-1). \end{aligned}$$

El resto de casos se demuestran de forma similar. Se deja al lector su comprobación para no alargar innecesariamente el documento. Una vez que tenemos las herramientas necesarias, podemos analizar estas funciones siguiendo los siguientes pasos: expresarlas en función de  $\theta$ , estudiar su paridad y hallar sus períodos con el fin de probar que son funciones elípticas. En el apéndice A se muestran los cálculos con todo detalle.

$$(2.5) \quad \text{Siendo } \omega = \frac{z}{2K} : \quad \text{sn}(z) = \frac{\theta(0)\theta(\omega + \tau^*)}{\theta(\tau/2)\theta(\omega + 1/2)}(-ie^{\pi i\omega}),$$

$$\text{cn}(z) = \frac{\theta(1/2)\theta(\omega + \tau/2)}{\theta(\tau/2)\theta(\omega + 1/2)}e^{\pi i\omega} \quad \text{y} \quad \text{dn}(z) = \frac{\theta(1/2)\theta(\omega)}{\theta(0)\theta(\omega + 1/2)}.$$

Como su propio nombre invita a pensar, sn y cn son los análogos de seno y coseno. La función sn es impar, cumpliendo  $\text{sn}(0) = 0$ ; y la función cn es par, con  $\text{cn}(0) = 1$ .

Las siguientes relaciones bastarán para afirmar que las tres funciones de Jacobi son elípticas puesto que prueban que cada una tiene dos períodos linealmente independientes:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \text{sn}(z + 2K) &= -\text{sn } z, & \text{cn}(z + 2K) &= -\text{cn } z, & \text{dn}(z + 2K) &= \text{dn } z, \\ \text{sn}(z + 2K\tau) &= \text{sn } z, & \text{cn}(z + 2K\tau) &= -\text{cn } z, & \text{dn}(z + 2K\tau) &= -\text{dn } z. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.5), observamos que los denominadores son similares y se anulan en los mismos valores iguales. Esto implica que tendrán polos idénticos, y éstos son los ceros de  $\theta(\omega + 1/2)$ . Como hemos visto anteriormente, los ceros de  $\theta$  son simples y se encuentran en  $\{\tau^* + m + n\tau : m, n \in \mathbb{Z}\}$ . Recordando que  $\omega = z/2K$ :

$$\theta(\omega + 1/2) = 0 \Leftrightarrow \omega + 1/2 = \tau^* + m + n\tau \Leftrightarrow z + K = 2K\tau^* + 2Km + 2Kn\tau.$$

En consecuencia, los polos de las tres funciones son de orden uno y se encuentran en  $z = \{K\tau + 2mK + 2nK\tau : m, n \in \mathbb{Z}\}$ .

## 2.2. Cálculo de residuos

Nuestra meta es hallar los residuos de todos los polos de las funciones sn  $z$ , cn  $z$  y dn  $z$ . Como viene siendo habitual, usaremos resultados que harán más fácil el trabajo.

**Proposición 2.1.** *La función sn( $z$ ) cumple lo siguiente:*

$$(2.7) \quad \lim_{z \rightarrow 0} z^{-1} \text{sn}(z) = 1.$$

*Demostración.* De (2.5) deducimos que lo que produce la indeterminación es el factor  $\theta(\omega + \tau^*)$  dado que sabemos que  $\theta$  tiene un cero simple en  $\tau^*$ . Por tanto, podemos considerar su desarrollo de Taylor de la siguiente forma:  $\theta(\omega + \tau^*) = \theta'(\tau^*)\omega + \dots$

Sustituyendo en el límite obtenemos:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\theta(0)\theta'(\tau^*)\omega(-ie^{\pi i\omega})}{\theta(\tau/2)\theta(\omega + 1/2)z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\theta(0)\theta'(\tau^*)(-ie^{\pi i\omega})}{\theta(\tau/2)\theta(\omega + 1/2)2K} \quad \text{con } \omega = z/2K.$$



Aplicando (2.3): 
$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\theta'(\tau^*)(-ie^{\pi i \omega})}{\theta(\tau/2)\theta(\omega + 1/2)\pi\theta(0)} = \frac{\theta'(\tau^*)}{\theta(\tau/2)\theta(1/2)\pi i\theta(0)} = 1.$$

La última igualdad se obtiene de [Cha18b], al comienzo de la página 5.  $\square$

**Proposición 2.2.** *Se cumplen las siguientes igualdades:*

$$(2.8) \quad k \operatorname{sn} z \operatorname{sn}(z + K\tau) = 1, \quad \operatorname{dn} z \operatorname{cn}(z + K) = -k' \operatorname{sn} z \quad \text{y} \quad \operatorname{cn} z = \operatorname{dn} z \operatorname{sn}(z + K).$$

*Demostración.* Sólo es cuestión de sustituir y comprobar que se satisfacen. Para ilustrarlo de alguna forma, vamos a demostrar la primera relación. Reemplazamos usando (2.5) y obtenemos:

$$\begin{aligned} k \frac{\theta(0)\theta(\omega + \tau^*)\theta(0)\theta(\omega + \tau^* + \frac{\tau}{2})}{\theta(\frac{\tau}{2})\theta(\omega + \frac{1}{2})\theta(\frac{\tau}{2})\theta(\omega + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2})} e^{2\pi i \omega} e^{\pi i \tau/2} &\stackrel{(2.3)}{=} \frac{\theta(\omega + \tau^*)\theta(\omega + \tau^* + \frac{\tau}{2})}{\theta(\omega + \frac{1}{2})\theta(\omega + \tau^*)} e^{2\pi i \omega} q = \\ &= \frac{\theta(\omega + \tau + \frac{1}{2})}{\theta(\omega + \frac{1}{2})} e^{2\pi i \omega} q = \frac{\theta(\omega + \frac{1}{2})}{\theta(\omega + \frac{1}{2})} q^{-1} e^{-2\pi i \omega} e^{2\pi i \omega} q = 1. \end{aligned}$$

$\square$

Llegó el momento de calcular los residuos:

- $\operatorname{res}(\operatorname{sn} z, K\tau) = \lim_{z \rightarrow K\tau} \operatorname{sn} z(z - K\tau) = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{sn}(z + K\tau)z \stackrel{(2.8)}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{k \operatorname{sn} z} \stackrel{(2.7)}{=} \frac{1}{k}.$
- $\operatorname{res}(\operatorname{dn} z, K\tau) = \lim_{z \rightarrow K\tau} \operatorname{dn} z(z - K\tau) \stackrel{(2.8)}{=} \frac{-k'}{\operatorname{cn}(K\tau + K)} \lim_{z \rightarrow K\tau} \operatorname{sn} z(z - K\tau) \stackrel{(2.3)}{=} \stackrel{(2.5)}{-i}.$
- $\operatorname{res}(\operatorname{cn} z, K\tau) = \lim_{z \rightarrow K\tau} \operatorname{cn} z(z - K\tau) \stackrel{(2.8)}{=} \operatorname{sn}(K\tau + K) \lim_{z \rightarrow K\tau} \operatorname{dn} z(z - K\tau) \stackrel{(2.5)}{=} \stackrel{(2.8)}{\frac{-i}{k}}.$

Gracias a las simetrías de las tres funciones en (2.6), estos cálculos son suficientes para hallar los residuos en todos los polos. Recordemos que los polos son de la forma  $\{K\tau + 2mK + 2nK\tau : m, n \in \mathbb{Z}\}$ .

Los residuos son los siguientes:

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{res}(\operatorname{sn} z, K\tau + 2mK + 2nK\tau) = \begin{cases} 1/k & \text{cuando } m \text{ es par} \\ -1/k & \text{cuando } m \text{ es impar} \end{cases} \\ \operatorname{res}(\operatorname{cn} z, K\tau + 2mK + 2nK\tau) = \begin{cases} -i/k & m, n \text{ par; } m, n \text{ impar} \\ i/k & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \operatorname{res}(\operatorname{dn} z, K\tau + 2mK + 2nK\tau) = \begin{cases} -i & \text{cuando } n \text{ es par} \\ i & \text{cuando } n \text{ es impar} \end{cases} \end{array} \right.$$

### 2.3. Integrales elípticas

Estamos cerca de conseguir nuestro propósito de probar que las tres funciones de Jacobi invierten integrales elípticas, pero antes es de vital importancia demostrar tres identidades. Para ello, conviene realizar unos cálculos preliminares.

De (2.6) podemos concluir que  $\operatorname{sn}^2 z$ ,  $\operatorname{cn}^2 z$  y  $\operatorname{dn}^2 z$  son también funciones elípticas. Con los residuos hallados anteriormente, el desarrollo de Laurent en los polos queda como sigue:

$$\begin{aligned}\operatorname{sn} z &= \pm \frac{1}{k} \frac{1}{z - \xi} + a_1(z - \xi) + \dots \\ \operatorname{cn} z &= \pm \frac{i}{k} \frac{1}{z - \xi} + b_1(z - \xi) + \dots \\ \operatorname{dn} z &= \pm \frac{i}{z - \xi} + c_1(z - \xi) + \dots\end{aligned}\quad \xi \in \{K\tau + 2mK + 2nK\tau\}$$

**Proposición 2.3.** *Se cumplen las siguientes identidades:*

$$(2.10) \quad \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \quad \operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = 1, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{sn} z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z.$$

*Demostración.* En todos los casos, vamos a intentar llegar a funciones elípticas sin polos usando los desarrollos de Laurent anteriores. Como ya sabemos, esto implica que son funciones constantes, y vamos a hallar dichas constantes.

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = \frac{1}{k^2} \frac{1}{(z - \xi)^2} \pm 2 \frac{a_1}{k} + a_1^2 (z - \xi)^2 - \frac{1}{k^2} \frac{1}{(z - \xi)^2} \pm 2 \frac{i}{k} b_1 + b_1^2 (z - \xi)^2 \dots = \pm 2 \frac{a_1}{k} \dots$$

El resultado de la suma es una función elíptica al cancelarse los polos, como puede verse en el desarrollo de Laurent. Tomando  $z = 0$ , la constante es  $\operatorname{sn}^2(0) + \operatorname{cn}^2(0) = 0^2 + 1^2 = 1$ .

$$\operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = \frac{-1}{(z - \xi)^2} \pm 2ic_1 + c_1^2 (z - \xi)^2 + \frac{1}{(z - \xi)^2} \pm 2a_1 k + a_1^2 k^2 (z - \xi)^2 \dots = \pm 2ic_1 \dots$$

De nuevo, nos encontramos ante una función elíptica sin polos. Tomando  $z = 0$ , la constante es  $\operatorname{dn}^2(0) + k^2 \operatorname{sn}^2(0) = \operatorname{dn}^2(0) \stackrel{(2.5)}{=} \frac{\theta^2(1/2)\theta^2(0)}{\theta^2(0)\theta^2(1/2)} = 1$ .

$$\operatorname{sn}' z - \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z = \mp \frac{1}{k} \frac{1}{(z - \xi)^2} + a_1 - \left[ \pm \frac{i}{k} \frac{1}{z - \xi} + b_1(z - \xi) \right] \left[ \pm \frac{i}{z - \xi} + c_1(z - \xi) \right] = a_1 \dots$$

Habría que comprobar que en la potencia  $-2$  los signos en ambos términos se anulan. Esto se logra usando (2.9) para los distintos casos de paridad de  $m$  y  $n$ . Sólo nos falta hallar la constante, que tomando  $z = 0$ , es  $\operatorname{sn}'(0) - \operatorname{cn}(0) \operatorname{dn}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sn}(z) - \operatorname{sn}(0)}{z - 0} - 1 \stackrel{(2.7)}{=} 1 - 1 = 0$ .

□

Ya tenemos lo necesario para alcanzar nuestro objetivo. Para la función  $\operatorname{sn} z$  es inmediato gracias a la proposición 2.3. Considerando la ecuación diferencial e integral elíptica inversa:

$$\begin{cases} (y')^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad y \quad I(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}},$$

basta una mera sustitución para comprobar que  $\operatorname{sn} z$  es solución de la ecuación diferencial.

Hacen falta más cálculos para hallar las ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son las funciones  $\operatorname{cn} z$  y  $\operatorname{dn} z$ . Empecemos con  $\operatorname{cn} z$ :

$$\begin{cases} \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1 \Rightarrow \operatorname{sn} z \operatorname{sn}' z + \operatorname{cn} z \operatorname{cn}' z = 0 \stackrel{(2.10)}{\Rightarrow} (\operatorname{cn}' z)^2 = \operatorname{sn}^2 z \operatorname{dn}^2 z \\ \operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = 1 \Rightarrow \operatorname{dn}^2 z = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \stackrel{(2.10)}{=} 1 - k^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 z \end{cases}$$

Con esto llegamos a la siguiente ecuación diferencial e integral elíptica:

$$\begin{cases} (y')^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 + k^2 y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad I(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 + k^2 t^2)}}.$$

Para concluir, hallamos la ecuación que satisface la función  $\operatorname{dn} z$ :

$$\begin{cases} \operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = 1 \Rightarrow \operatorname{dn} z \operatorname{dn}' z + k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{sn}' z = 0 \stackrel{(2.10)}{\Rightarrow} (\operatorname{dn}' z)^2 = k^4 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{cn}^2 z \\ \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1 \Rightarrow \operatorname{cn}^2 z = 1 - \operatorname{sn}^2 z = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \operatorname{dn}^2 z \end{cases}$$

Con esto llegamos a la siguiente ecuación diferencial e integral elíptica:

$$\begin{cases} (y')^2 = (1 - y^2)(k^2 - 1 + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad I(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(k^2 - 1 + t^2)}}.$$



## CAPÍTULO 3

# Una identidad de Ramanujan

---

Srinivasa Ramanujan dedicó todos sus esfuerzos a las matemáticas y dejó constancia en sus cuadernos de un gran número de descubrimientos, entre tres mil y cuatro mil. La aparición de pruebas es casi inexistente pero cuentan con muy pocos errores, la mayoría relacionados con la teoría analítica de números. Muchos de los teoremas de Ramanujan sobre funciones theta y formas modulares tienen aplicaciones para teoría de números. Otros campos de estudio destacados fueron la función gamma, cuyas integrales juegan un papel importante en estudios recientes sobre polinomios ortogonales, las series hipergeométricas y las funciones elípticas. Es habitual en su obra la obtención de identidades que pueden resultar sorprendentes para la época, debido a su formación autodidacta y a que no poseía grandes conocimientos de variable compleja. Nuestro objetivo es estudiar y probar una de estas identidades:

$$(3.1) \quad \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} + \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(nt)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} = \frac{2}{\pi} \Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right) \quad \text{con } t \in (-\pi, \pi).$$

El procedimiento a seguir se basa en relacionarla con otra que involucra la función  $dn z$  de Jacobi estudiada anteriormente.

**Proposición 3.1.** *Si una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es par, 1-periódica y suficientemente regular, por ejemplo  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , entonces admite un desarrollo de Fourier*

$$(3.2) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) \quad \text{con } a_n = \int_{-1}^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

*Demostración.* Al ser  $f$  regular, su desarrollo de Fourier tiende a la función uniformemente:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n e^{2\pi i n x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n \cos(2\pi n x) + i \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n x) \quad \text{y } b_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

Como la función es par, se sigue fácilmente que  $\sum b_n \sin(2\pi n x) = 0$ , por lo que el desarrollo de Fourier queda sólo en función de cosenos. Operamos ahora con los coeficientes:

$$b_{-n} = \int_0^1 f(t) e^{2\pi i n t} dt \xrightarrow{\{t=-u\}} b_{-n} = - \int_0^{-1} f(-u) e^{-2\pi i n u} du = \int_{-1}^0 f(u) e^{-2\pi i n u} du,$$

$$b_n + b_{-n} = \int_{-1}^1 f(t)e^{-2\pi int} dt = a_n \quad \text{y} \quad a_0 = \int_{-1}^1 f(t)dt = 2 \int_0^1 f(t)dt = 2b_0.$$

Finalmente:

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} \cos(2\pi nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx).$$

□

Consideremos la función  $f(x) = \operatorname{dn}(2Kx)$ :

- $f$  es 1-periódica:  $f(x+1) = \operatorname{dn}(2Kx+2K) \stackrel{(2.6)}{=} \operatorname{dn}(2Kx) = f(x)$ .
- $f$  es par:  $\operatorname{sn}'$  es par porque  $\operatorname{sn}$  es impar y  $\operatorname{cn}$  es par  $\Rightarrow \operatorname{dn}(z) \stackrel{(2.10)}{=} \operatorname{sn}'(z)/\operatorname{cn}(z)$  es par.
- $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ :  $f(x) = \theta(1/2)\theta(x)/\theta(0)\theta(x+1/2)$ . El denominador puede dar problemas de continuidad y, al derivar, aumenta la potencia. Se anula para  $x = \{\tau/2 + m + n\tau\}$ , que son números complejos al serlo  $\tau$ , pero  $x$  se mueve sólo entre números reales.

Con esto, hemos probado que la función  $f(x)$  definida admite un desarrollo de Fourier de la forma (3.2). Para hallar los coeficientes  $a_n$  vamos a relacionar la integral con otra más sencilla y aplicar el teorema de los residuos. Tomamos  $\mathcal{P}$  igual al paralelogramo de vértices  $-1, 1, \tau, \tau - 2$ :

$$\int_{\partial\mathcal{P}} g(z)dz = \sum_{i=1}^4 \int_{L_i} g(z)dz \quad \text{donde} \quad g(z) = f(z)e^{-2\pi inz}.$$

Parametrizamos los lados del paralelogramo:

$$L_1 \equiv \gamma_1(t) = t \quad \text{para } t \in [-1, 1] \quad \text{y} \quad L_3 \equiv \gamma_3(t) = t - 1 + \tau \quad \text{para } t \in [1, -1].$$

$$\begin{aligned} \int_{L_1} g(z)dz + \int_{L_3} g(z)dz &= \int_{-1}^1 f(t)e^{-2\pi int} dt + \int_1^{-1} f(t-1+\tau)e^{-2\pi in(t-1+\tau)} dt \stackrel{(2.6)}{=} \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \int_{-1}^1 f(t)e^{-2\pi int} dt + \int_1^{-1} -f(t)e^{-2\pi int} e^{-2\pi in\tau} dt = [1 + q^{-2n}] \int_{-1}^1 f(t)e^{-2\pi int} dt. \end{aligned}$$

Para los otros dos lados ni siquiera hace falta parametrizar puesto que van en sentidos contrarios y, por la periodicidad del integrando, se anula una integral con otra. En conclusión:

$$(3.3) \quad \int_{\partial\mathcal{P}} f(z)e^{-2\pi inz} dz = a_n[1 + q^{-2n}].$$

Aplicamos el teorema de los residuos en la parte izquierda. Los polos los aporta la función  $f(z)$  dado que  $e^{-2\pi inz}$  no tiene. Recordemos que  $\operatorname{dn}(z)$  tiene polos en

$z = \{K\tau + 2mK + 2nK\tau\}$ , por lo que  $f(z) = \text{dn}(2Kz)$  los tiene en  $z = \{\tau/2 + m + n\tau\}$ . El residuo en  $\tau/2$  queda así:

$$\begin{aligned} \text{res}(g(z), \tau/2) &= \lim_{z \rightarrow \tau/2} \text{dn}(2Kz) e^{-2\pi i n z} (z - \tau/2) = e^{-\pi i n \tau} \lim_{z \rightarrow K\tau} \text{dn}(z) (z/2K - \tau/2) = \\ &= \frac{q^{-n}}{2K} \lim_{z \rightarrow K\tau} \text{dn}(z) (z - K\tau) = \frac{q^{-n}}{2K} \text{res}(\text{dn}(z), K\tau) = \frac{-iq^{-n}}{2K}. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la integral en (3.3) teniendo en cuenta que, en el paralelogramo  $\mathcal{P}$  que estamos considerando, los polos que se alcanzan son  $\tau/2$  y  $\tau/2 - 1$ , y éstos tienen los mismos residuos por la simetría:

$$(3.4) \quad \int_{\partial\mathcal{P}} f(z) e^{-2\pi i n z} dz = 2\pi i \sum_i \text{res}(g(z), z_i) = 2\pi i \left[ \frac{-iq^{-n}}{2K} + \frac{-iq^{-n}}{2K} \right] = \frac{2\pi}{Kq^n}.$$

Comparando las igualdades de (3.3) y (3.4):

$$(3.5) \quad a_n = \frac{2\pi}{K(q^n + q^{-n})} = \frac{2\pi}{K(e^{\pi i n \tau} + e^{-\pi i n \tau})} = \frac{\pi}{K \cos(n\pi\tau)}.$$

Ya tenemos los coeficientes para hallar el desarrollo de Fourier de la función  $f(x)$ :

$$(3.6) \quad \text{dn}(2Kx) = \frac{\pi}{2K} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{\cos(\pi n \tau)} \right] \Rightarrow \text{dn}\left(\frac{Kx}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2K} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\cos(\pi n \tau)} \right].$$

Por el momento, dejamos aparcado este resultado y enunciamos la siguiente proposición:

**Proposición 3.2.** *Cuando  $\tau = i$ , se cumple la igualdad:*

$$(3.7) \quad \frac{1}{\text{dn}^2 x} + \frac{1}{\text{dn}^2(ix)} = 2 \quad \text{para} \quad -1 < \frac{\pi x}{K} < 1.$$

*Demostración.* Queremos probar que el primer miembro define una función elíptica sin polos. Recordemos que  $\text{dn}(z)$  tiene ceros simples en  $z \in \{K + K\tau + 2Km + 2Kn\tau\}$ . Por consiguiente,  $1/\text{dn}(z)$  tendrá polos simples en esos valores y  $1/\text{dn}(iz)$  los tendrá en  $z \in \{K - K\tau + 2Km + 2Kn\tau\}$ . Por la simetría de la función, bastará con calcular los siguientes residuos:

$$\begin{aligned} \text{res}\left(\frac{1}{\text{dn}(z)}, K + K\tau\right) &= \frac{1}{\text{dn}'(K + K\tau)} = \frac{1}{-k^2 \text{sn}(K + K\tau) \text{cn}(K + K\tau)} = \frac{\theta^2(0)}{\theta^2(1/2)} i \\ \text{res}\left(\frac{1}{\text{dn}(iz)}, K - K\tau\right) &= \frac{1}{i \cdot \text{dn}'((K - K\tau)i)} = \frac{-i}{\text{dn}'(K + K\tau)} = \frac{-i\theta^2(0)}{\theta^2(1/2)} i = \frac{\theta^2(0)}{\theta^2(1/2)}. \end{aligned}$$

Observando con detalle, nos damos cuenta de que en realidad los polos se alcanzan en los mismo valores para  $1/\operatorname{dn}(z)$  y  $1/\operatorname{dn}(iz)$ . En estos casos, para  $\xi$  en el conjunto de polos, el desarrollo de Laurent es como sigue:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{dn} z}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{dn}(iz)}\right)^2 = \left(\pm i \frac{\theta^2(0)}{\theta^2(1/2)} \frac{1}{z-\xi} + a_1(z-\xi)\dots\right)^2 + \left(\pm \frac{\theta^2(0)}{\theta^2(1/2)} \frac{1}{z-\xi} + b_1(z-\xi)\dots\right)^2.$$

Los términos del tipo  $1/(z-\xi)^2$  se anulan entre ellos y no tenemos términos de la forma  $1/(z-\xi)$  puesto que al elevar al cuadrado desaparecen. Por tanto, el resultado es una función elíptica sin polos. Para hallar la constante, tomamos  $z=0$ :  $\frac{1}{\operatorname{dn}(0)} + \frac{1}{\operatorname{dn}(0)} = 1 + 1 = 2$ .  $\square$

Con este resultado, puede ir intuyéndose el lado izquierdo de (3.1). Tenemos que hacer aparecer la función  $\Gamma$  de alguna forma, pero antes necesitamos unos resultados preliminares.

**Proposición 3.3.** *Se cumple la siguiente identidad:*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+x+1/2)^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2} \cos(2\pi n x).$$

*Demostración.* Aplicamos (3.2) a la función que define la serie del primer miembro:

$$\begin{aligned} a_m &= \int_{-1}^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+t+\frac{1}{2})^2} e^{-2\pi i m t} dt \stackrel{\{n+t+1/2=u\}}{\implies} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{n-1/2}^{n+3/2} e^{-\pi u^2} e^{-2\pi i m(u-n-\frac{1}{2})} du = \\ &= (-1)^m \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{n-1/2}^{n+3/2} e^{-\pi u^2} \cos(2\pi m u) du = 2(-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} \cos(2\pi m u) du = 2(-1)^m e^{-\pi m^2}. \end{aligned}$$

La integral del seno es nula por la periodicidad de la función en los límites de integración y la última integral es conocida. Sustituyendo en el desarrollo puede comprobarse la igualdad.  $\square$

**Proposición 3.4.** *Bajo la hipótesis  $\tau = i$ , la siguiente igualdad es cierta:*

$$(3.8) \quad K = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

*Demostración.* Tomando  $x=0$  en la igualdad de la proposición anterior y por comparación, puede probarse que  $\theta(1/2) = e^{-\pi/4}\theta(i/2)$ . Además, podemos hallar otra constante:

$$k^2 = \frac{e^{-\pi\theta^4(i/2)}}{\theta^4(0)} = \frac{e^{-\pi\theta^4(i/2)}}{e^{-\pi\theta^4(i/2)} + \theta^4(1/2)} = \frac{e^{-\pi\theta^4(i/2)}}{e^{-\pi\theta^4(i/2)} + e^{-\pi\theta^4(i/2)}} = \frac{1}{2}.$$



La segunda igualdad se ha obtenido de [Cha18b, (25)]. Basta tener en cuenta la sección 2.3 y sustituir:

$$x = \int_{\text{cn } x}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2+k^2t^2)}} \Rightarrow K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^2)}} = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

□

Para que aparezca la función  $\Gamma$ , usaremos [Cha18c, (13)]:  $\Gamma(s) \int_0^\infty x^{w-1}(1+x)^{-s} dx = \Gamma(s-w)\Gamma(w)$ . Sabemos que  $\Gamma(1) = 1$  y  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

- $w = 1/4, s = 3/4$  :  $\int_0^\infty (x+x^2)^{-3/4} dx = \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1/4)/\Gamma(3/4)$ .
- $w = 1/4, s = 1$  :  $\int_0^\infty x^{-3/4}(1+x)^{-1} dx = \Gamma(3/4)\Gamma(1/4)$ .

Combinando resultados, haciendo el cambio  $x = t^4$  y usando el teorema de los residuos:

$$(3.9) \quad \int_0^\infty (x+x^2)^{-3/4} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma^2(\frac{3}{4})} \int_0^\infty x^{-3/4}(1+x)^{-1} dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma^2(\frac{3}{4})} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{t^4+1} = \frac{\pi^{3/2}\sqrt{2}}{\Gamma^2(\frac{3}{4})}.$$

Vamos a desarrollar el último paso un poco más en detalle. Sea  $\gamma$  la semicircunferencia superior con radio  $R$  y base el eje real, y  $S_R$  el arco de dicha circunferencia:

$$\left| \int_{S_R} \frac{dz}{1+z^4} \right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{1+z^4} = \int_{-R}^R \frac{dz}{1+z^4} + \int_{S_R} \frac{dz}{1+z^4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^4}$$

Por tanto, podemos hallar la integral deseada aplicando el teorema de los residuos:

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \left[ \text{res} \left( \frac{1}{1+z^4}, e^{\pi i/4} \right) + \text{res} \left( \frac{1}{1+z^4}, e^{3\pi i/4} \right) \right] = 2\pi i \left[ -\frac{e^{\pi i/4}}{4} - \frac{e^{3\pi i/4}}{4} \right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

**Proposición 3.5.** *Bajo la hipótesis  $\tau = i$ , podemos expresar  $K$  de la siguiente forma:*

$$(3.10) \quad K = \frac{\pi^{3/2}}{2\Gamma^2(3/4)}.$$

*Demostración.* Hacemos el cambio  $\{t = (1+u^{-1})^{-1/4}\}$  en (3.8).

$$K = \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{u^{5/4} du}{4u^2(u+1)^{5/4}(u+1)^{-1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^\infty u^{-3/4}(u+1)^{-3/4} du \stackrel{(3.9)}{=} \frac{\pi^{3/2}}{2\Gamma^2(3/4)}.$$

□

Hemos conseguido reunir todos los ingredientes para probar la identidad inicial:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{dn}^2\left(\frac{Kx}{\pi}\right)} + \frac{1}{\text{dn}^2\left(\frac{Kxi}{\pi}\right)} &\stackrel{(3.6)}{=} \frac{4K^2}{\pi^2} \left[ \left(1 + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(nx)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} + \left(1 + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{\cosh(nx)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(1 + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(nx)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} + \left(1 + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{\cosh(nx)}{\cosh(\pi n)}\right)^{-2} \stackrel{(3.7)}{=} \frac{\pi^2}{2K^2} \stackrel{(3.10)}{=} \frac{2}{\pi} \Gamma^4(3/4). \end{aligned}$$



## CAPÍTULO 4

# Funciones y formas modulares

---

Después de hacer un recorrido por la teoría de funciones elípticas y estudiar algunos de los ejemplos más interesantes, ha llegado el turno de pasar a la segunda parte del trabajo: las formas modulares. Antes de proporcionar una definición como tal, es conveniente tener en cuenta un par de resultados, cuyas pruebas se incluyen en el apéndice B.

**Proposición 4.1.** *Dados  $\{\omega_1, \omega_2\}$  y  $\{\omega'_1, \omega'_2\}$  ordenados de forma que  $\Im(\omega_1/\omega_2)$  y  $\Im(\omega'_1/\omega'_2)$  sean positivos, ambos generan el mismo retículo si y solo si*

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{para cierta matriz} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

**Proposición 4.2.** *El grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$  está generado por las matrices:*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definimos una forma modular de peso  $k$  como una función holomorfa  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  con crecimiento a lo más polinómico en  $\Im z$  que cumple:

$$(4.1) \quad f(\gamma z) = (j_\gamma(z))^k f(z) \quad \text{con} \quad \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}), \quad \gamma z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{y} \quad j_\gamma(z) = cz + d.$$

Los nuevos elementos introducidos cumplen estas dos propiedades:

$$(4.2) \quad \Im(\gamma z) = \frac{\Im z}{|j_\gamma(z)|^2} \quad \text{y} \quad j_{\gamma_1 \gamma_2}(z) = j_{\gamma_1}(\gamma_2 z) j_{\gamma_2}(z).$$

En el caso de la segunda, basta darse cuenta de que  $(\gamma z)' = (j_\gamma(z))^{-2}$  y aplicar la regla de la cadena. Para comprobar la primera, multiplicamos por el conjugado del denominador en  $\gamma z$ :

$$\gamma z = \frac{ac(\Re(z)^2 + \Im(z)^2) + adz + bc\bar{z} + bd}{|j_\gamma(z)|^2} \Rightarrow \Im(\gamma z) = \frac{(ad - bc)\Im(z)}{|j_\gamma(z)|^2} = \frac{\Im z}{|j_\gamma(z)|^2}.$$

Consideremos ahora el conjunto de puntos  $\Omega = \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1, |\Re z| \leq 1/2\}$ . Cualquier punto en el dominio de  $f$  puede llevarse a un punto en  $\Omega$  por medio de las aplicaciones definidas por las matrices que generan el grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Con la traslación ( $Tz = z + 1$ ), podemos situar cualquier punto en la franja  $\{|\Re z| \leq 1/2\}$ ; y con la inversión ( $Sz = -1/z$ ), movemos el punto al exterior de la circunferencia unidad en el caso de que no lo estuviera ya. Cabe mencionar que los puntos en la frontera pertenecen a la misma órbita generada por las matrices  $T$  y  $S$  sobre  $\mathbb{H}$ . En concreto, los puntos con parte real igual a  $\pm 1/2$  están relacionados entre sí mediante la traslación. Además, sabiendo que  $-1/z = (-x + iy)/|z|^2$ , los puntos en la frontera de la circunferencia unidad ( $|z| = 1$ ) con parte real negativa se relacionan con los que tienen parte real positiva. Por tanto, la función  $f$  queda caracterizada por sus valores en  $\Omega$ , lo que se llama dominio fundamental estándar. Tomando  $\gamma = T$  y  $S$  (generadores del grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$ ), llegamos a la conclusión de que pedir que una función cumpla (4.1) es lo mismo que pedir que  $f$  sea 1-periódica y  $f(-1/z) = z^k f(z)$ . Además  $k$  debe ser par puesto que  $\gamma = -I$  en (4.1) nos lleva a  $f(z) = (-1)^k f(z)$ .

Por otro lado, las funciones holomorfas que cumplen (4.1) admiten un desarrollo de Fourier. Si imponemos que  $f(x + iy)$  crezca menos que cierto polinomio cuando  $y \rightarrow \infty$ , llegamos a que dicho desarrollo carece de términos negativos; por tanto,  $f(z) = \sum a_n e^{2\pi i n z}$   $n \geq 0$ .

## 4.1. Las series de Eisenstein

El ejemplo más básico de forma modular es la llamada serie de Eisenstein de peso  $k$ , donde la prima en la suma indica que se omite  $(m, n) = (0, 0)$ :

$$(4.3) \quad G_k(z) = \frac{1}{2} \sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (mz + n)^{-k}.$$

El primer paso será probar que, en efecto, es una forma modular de peso  $k$  para  $k > 2$  par. La convergencia está garantizada al ser el exponente  $k$  mayor que 2 y el denominador no anularse. Como  $k$  es par, basta comprobar dos igualdades gracias a lo mencionado anteriormente:

$$G_k(z+1) = \frac{1}{2} \sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (mz + m + n)^{-k} = \frac{1}{2} \sum'_{(m,s) \in \mathbb{Z}^2} (mz + s)^{-k} = G_k(z)$$

$$G_k(-1/z) = \frac{1}{2} \sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (-m/z + n)^{-k} = \frac{1}{2} \sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (-m + nz)^{-k} z^k = z^k G_k(z).$$

Relacionada con esto, se encuentra la serie de Eisenstein normalizada de peso  $k$ , representada como  $E_k$ . Esta serie se define igual que la anterior pero restringiendo la sumación a los  $m, n$  coprimos. Es curioso observar que  $E_k(z) = G_k(z)/\zeta(k)$  donde el denominador es la función  $\zeta$  de Riemann. Para comprobarlo, reescribimos los pares  $(m, n)$  como  $(da, db)$ , con  $d$  el máximo común divisor de  $(m, n)$  y  $(a, b)$  coprimos.

$$G_k(z) = \frac{1}{2} \sum'_{mcd(a,b)=1} \sum_{d=1} d^{-k} (az + b)^{-k} = \sum_{d=1} d^{-k} \frac{1}{2} \sum'_{mcd(a,b)=1} (az + b)^{-k} = \zeta(k) E_k(z).$$

Ahora vamos a dedicarle un tiempo a calcular el desarrollo de Fourier de  $G_k$ . Si bien no se va a omitir ningún paso de vital importancia, no se pueden desarrollar con sumo detalle todos los cálculos debido a la extensión del documento. Por ello, si el lector quiere profundizar en algún aspecto, puede consultar la bibliografía facilitada; en mayor medida, [Mas15] y [Zag08].

**Proposición 4.3.** *Se cumple la siguiente igualdad:*

$$\pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \quad \text{para } z \in \mathbb{H}.$$

*Demostración.* En el primer término, tenemos una serie geométrica:

$$\pi i \left( 1 - 2 \cdot \frac{1}{1 - e^{2\pi i z}} \right) = \pi i \left( 1 - 2 \cdot \frac{e^{-i\pi z}}{e^{-i\pi z} - e^{i\pi z}} \right) = \pi i \cdot \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \pi \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}.$$

Por otro lado, consideramos la fórmula del producto infinito de Euler para la función seno y tomamos la derivada logarítmica en el paso siguiente:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \Rightarrow \pi \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right).$$

□

Agrupando los términos de la derecha en una sola suma y derivando  $k-1$  veces:

$$(4.4) \quad \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z+n)^{-1} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z+n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n z}.$$

Este desarrollo de Fourier nos ayudará a calcular el de la función  $G_k$ . Separando los términos de la suma en (4.3) y teniendo en cuenta que  $k$  es par:

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^k} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ m \in \mathbb{Z}}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (mz+n)^{-k} = \zeta(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (mz+n)^{-k} \stackrel{(4.4)}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{(4.4)}{\Rightarrow} G_k(z) = \zeta(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} e^{2\pi i d m z}. \end{aligned}$$

Agrupamos ahora los coeficientes que contribuyen a la misma potencia de  $e$ ; es decir, escribimos  $dm = n$  y aparecerán en el desarrollo de Fourier los números  $d$  que dividen a  $n$ :

$$(4.5) \quad G_k(z) = \zeta(k) + \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z} \quad \text{con } \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

## 4.2. La función discriminante

Siguiendo en el mismo contexto, las formas modulares que cumplen  $f(i\infty) = 0$ , es decir, las que tienen  $a_0 = 0$ , se llaman formas parabólicas o cuspidales, y desempeñan un papel importante. Vamos a analizar la más famosa, la función discriminante:

$$(4.6) \quad \Delta(z) = e^{2\pi iz} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi inz})^{24}.$$

Es fácil darse cuenta de que  $a_0 = 0$ , pero comprobar que sea una forma modular requiere algo de trabajo. El resto de coeficientes  $a_n$  se suelen denotar por  $\tau(n)$  y se hace referencia a  $\tau$  como la función de Ramanujan. Precisamente fue él quien observó que esta función tiene una curiosa propiedad:  $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$  si  $m, n$  son coprimos. Para obtener la prueba completa, hay que esperar al final del capítulo 6 pero, a modo de ejemplo, vamos a ilustrarlo calculando  $\tau(2)$  y  $\tau(3)$ , sabiendo que  $\tau(6) = -6048$ . Desarrollamos las potencias advirtiendo que a partir de  $n=3$  no nos interesan:

$$(1 - e^{2\pi iz})^{24} = (1 - 3e^{2\pi iz} + 3e^{2\pi i2z} \dots)^8 = (1 - 6e^{2\pi iz} + 15e^{2\pi i2z} \dots)^4 = 1 - 24e^{2\pi iz} + 276e^{2\pi i2z} \dots$$

$$(1 - e^{2\pi i2z})^{24} = (1 - 3e^{2\pi i2z} + \dots)^8 = (1 - 6e^{2\pi i2z} + \dots)^4 = (1 - 12e^{2\pi i2z} + \dots)^2 = 1 - 24e^{2\pi i2z} \dots$$

Sustituyendo en (4.6):

$$\Delta(z) = e^{2\pi iz} (1 - e^{2\pi iz})^{24} (1 - e^{2\pi i2z})^{24} \dots = e^{2\pi iz} - 24e^{2\pi i2z} + 252e^{2\pi i3z} \dots$$

Por tanto,  $\tau(2)\tau(3) = -24 \cdot 252 = -6048 = \tau(6)$ , y se cumple la propiedad. A continuación, se probará una serie de proposiciones para deducir que (4.6) es una forma modular de peso 12.

**Proposición 4.4.** *La función  $G_2(z)$  cumple la siguiente identidad:*

$$(4.7) \quad G_2(\gamma z) = (j_\gamma(z))^2 G_2(z) - \pi ic j_\gamma(z) \quad \text{para} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

*Demostración.* Es suficiente probarlo para los generadores del grupo  $S$  y  $T$ . En el caso de la traslación, es casi inmediato. Para el giro, usamos las siguientes series dobles:

$$G_2(z) = \frac{1}{2} \sum_n \sum'_m \frac{1}{(mz + n)^2}, \quad G'_2(z) = \frac{1}{2} \sum_m \sum'_n \frac{1}{(mz + n)^2},$$

$$H(z) = \frac{1}{2} \sum_n \sum'_m \frac{1}{(m-1+nz)(m+nz)} \quad \text{y} \quad H'(z) = \frac{1}{2} \sum_m \sum'_n \frac{1}{(m-1+nz)(m+nz)},$$

donde la prima indica que se omiten los valores  $(m, n) = (0, 0)$  en las cuatro y  $(m, n) = (1, 0)$  en  $H$  y  $H'$ . Éstas dos últimas son fáciles de calcular debido a su descomposición en fracciones simples. Por tanto, ambas convergen con valores  $H = 1$  y  $H' = 1 - \pi i/z$ . Además, la serie doble con término general:

$$\frac{1}{(m-1+nz)(m+nz)} - \frac{1}{(m+nz)^2} = \frac{1}{(m+nz)^2(m-1+nz)},$$

es absolutamente sumable. Esto muestra que  $G_2 - H$  y  $G'_2 - H'$  coinciden; es decir, que las series  $G_2$  y  $G'_2$  convergen con el orden de sumación indicado. En consecuencia:

$$G_2(z) - G'_2(z) = H(z) - H'(z) = \frac{\pi i}{z} \quad \text{y} \quad G_2\left(\frac{-1}{z}\right) = z^2 G'_2(z) \Rightarrow G_2\left(\frac{-1}{z}\right) = z^2 G_2(z) - \pi i z.$$

□

**Proposición 4.5.** *La función discriminante satisface la igualdad:*

$$(4.8) \quad \frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)} = 2\pi i E_2(z).$$

*Demostración.* Tomando la derivada logarítmica en (4.6) y la serie geométrica de razón  $e^{2\pi i n z}$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{2\pi i n z}}{1 - e^{2\pi i n z}} = 1 - 24 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2\pi i m n z} = 1 - 24 \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_1(s) e^{2\pi i s z}.$$

En el último paso, se han agrupado los términos que contribuyen a la misma potencia de  $e$  siguiendo el mismo razonamiento que antes. Por otro lado, realizando un cálculo similar al de la prueba de la proposición 4.4 para  $G_2(z)$  en su desarrollo de Fourier, y sabiendo que  $\zeta(2) = \pi^2/6$ :

$$E_2(z) = \frac{G_2(z)}{\zeta(2)} = 1 - \frac{4\pi^2}{\zeta(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i n z} = 1 - 24 \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_1(s) e^{2\pi i s z}.$$

□

**Proposición 4.6.**  $\Delta(z)$  es un forma modular de peso 12.

*Demostración.* Como 12 es par, basta comprobar que  $\Delta(z+1) = \Delta(z)$  y  $\Delta(-1/z) = z^{12} \Delta(z)$ . La primera igualdad es casi inmediata, por lo que vamos a centrarnos en la segunda. Una sustitución en (4.7), nos permite obtener esto:

$$(4.9) \quad E_2(\gamma z) = (j_\gamma(z))^2 E_2(z) - \pi i c j_\gamma(z) / \zeta(2).$$

Partiendo del siguiente logaritmo que derivamos a continuación:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\Delta(-1/z)}{z^{12}\Delta(z)}\right) &= \log(\Delta(-1/z)) - \log(z^{12}) - \log(\Delta(z)) \stackrel{(4.8)}{\stackrel{(4.9)}}{\left[ \log\left(\frac{\Delta(-1/z)}{z^{12}\Delta(z)}\right) \right]}' = \\ &= \frac{2\pi i}{z^2} \left( z^2 E_2(z) - \frac{\pi i z}{\zeta(2)} \right) - \frac{12}{z} - 2\pi i E_2(z) = 0 \Rightarrow \log\left(\frac{\Delta(-1/z)}{z^{12}\Delta(z)}\right) = c_1 \Rightarrow \frac{\Delta(-1/z)}{z^{12}\Delta(z)} = c_2. \end{aligned}$$

Para hallar la constante, tomando  $z = i$  se obtiene  $c_2 = 1$  y concluye la prueba. □





## CAPÍTULO 5

# La fórmula para la dimensión

---

Fijado  $k$  (que a partir de ahora será no negativo y par), las formas modulares de peso  $k$  forman un espacio vectorial  $V_k$  sobre  $\mathbb{C}$ . Resulta interesante determinar una base para él, y hallar su dimensión. Este será nuestro objetivo en el capítulo. Se han tenido en cuenta las referencias [Zag08, §1.3] y [Zag08, §2.1], así como la exposición más clara y ordenada para mi gusto de [Mas15, §1.6].

Sea  $f$  una función meromorfa en un abierto de  $\mathbb{H}$ . Escribimos  $v_p(f)$  para indicar el orden de  $f$  en el punto  $p \in \mathbb{H}$ ; es decir, el único entero  $n$  tal que  $(z - p)^{-n}f(z)$  es holomorfa y no se anula en  $p$ . De forma similar, definimos  $v_\infty(f)$  como el entero más pequeño tal que  $a_n \neq 0$  en el desarrollo de Fourier. Si  $f$  es una forma modular de peso  $k$ , gracias a que cumple (4.1), el orden tiene sentido en las órbitas de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Esto quiere decir que puntos en la misma órbita tienen el mismo orden.

**Proposición 5.1.** *Sea  $f \neq 0$  una forma modular de peso  $k$ ,  $\omega = e^{2\pi i/3}$  y  $\mathcal{D}^*$  el dominio fundamental de  $SL_2(\mathbb{Z})$  identificando las líneas verticales de los extremos entre ellas y medio arco inferior ( $|z| = 1$ ) con el otro. Entonces:*

$$(5.1) \quad v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\omega(f) + \sum_{p \in \mathcal{D}^*} v_p(f) = \frac{k}{12}.$$

*Demostración.* Integramos  $f'/f$  sobre el contorno  $C$  de la figura 5.1 de dos formas diferentes. Por un lado, usamos el teorema de los residuos junto con el principio del argumento considerando  $R$  lo suficientemente grande para que  $C$  contenga todos los ceros y polos:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{p \in C^\circ} \operatorname{res}_p \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = 2\pi i \sum_{p \in \mathcal{D}^*} v_p(f).$$

Por otro lado, integramos sobre cada línea que compone el contorno  $C$ . Cuando lo hagamos sobre porciones de circunferencias, corolarios de la fórmula integral de Cauchy y del principio del argumento en [Mas15, §1.6] nos dicen que el resultado tenemos que dividirlo en proporción al ángulo de la circunferencia sobre el que integramos.

**Integral sobre  $C_1$ :** cambio de variable  $q(z) = e^{2\pi iz} \Rightarrow dq = 2\pi i q dz$ . El camino  $q(C_1)$  recorre un círculo de radio  $e^{-2\pi R}$  centrado en 0 en el sentido de las agujas del reloj. Por tanto:

$$\int_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{q(C_1)} \frac{f'(q)q'(z)}{f(q)} \frac{dq}{2\pi i q} = \int_{q(C_1)} \frac{f'(q)}{f(q)} dq = -2\pi i v_0(f(q)) = -2\pi i v_\infty(f(z)).$$

Lo último se sigue del desarrollo de Fourier  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ , considerando  $f$  en función de  $z$  o de  $q$  respectivamente.

**Integral sobre  $C_2$  y  $C_8$ :** se anulan entre sí debido a que  $f$  y  $f'$  son 1-periódicas.

**Integral sobre  $C_4$  y  $C_6$ :** recordemos que  $S$  es la matriz de la inversión  $S(z) = -z^{-1}$ .

$$f(z) \stackrel{(4.1)}{=} \frac{1}{z^k} f(Sz) \Rightarrow f'(z) = -kz^{k-1} f(Sz) + \frac{1}{z^k} f'(Sz) S'(z) \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{k}{z} + \frac{f'(Sz) S'(z)}{f(Sz)}$$

$$\int_{C_4} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{C_4} -\frac{k}{z} dz + \frac{f'(Sz) S'(z)}{f(Sz)} dz = 2\pi i \frac{k}{12} - \int_{C_6} \frac{f'(s)}{f(s)} ds \Rightarrow \int_{C_4+C_6} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \frac{k}{12}.$$

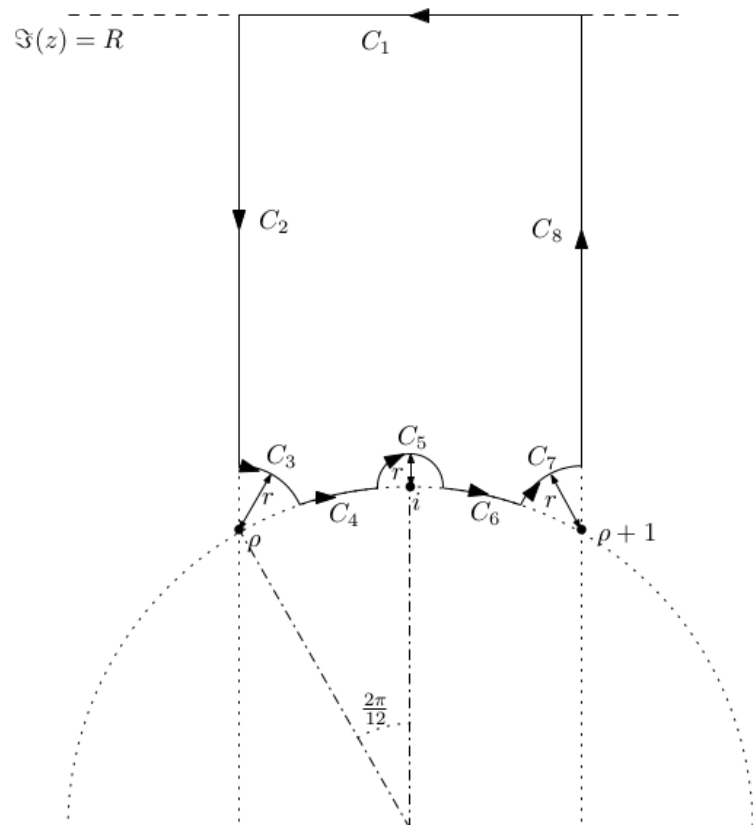


Figura 5.1: Contorno de integración.

**Integral sobre  $C_5$ :** usamos el principio del argumento sobre la circunferencia entera:

$$2 \int_{C_5} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2\pi i v_i(f) \Rightarrow \int_{C_5} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\frac{1}{2} 2\pi i v_i(f).$$

**Integral sobre  $C_3$  y  $C_7$ :** de nuevo nos valemos del principio del argumento teniendo en cuenta que ahora recorreremos un sexto de la circunferencia y que el orden de  $f$  en  $\omega$  y  $\omega + 1$  es el mismo al estar en la misma órbita.

$$\int_{C_7} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\frac{2}{6} \pi i v_{\omega+1}(f) = -\frac{2}{6} \pi i v_{\omega}(f) = \int_{C_3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \Rightarrow \int_{C_3+C_7} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\frac{2}{3} \pi i v_{\omega}(f).$$

Combinando todos los cálculos se comprueba que la proposición es cierta.  $\square$

**Proposición 5.2.** *Definiendo  $S_k$  como el subespacio de  $V_k$  generado por las formas cuspidales, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

$$(5.2) \quad \begin{array}{ll} 1. & V_k = \{0\} \text{ para } k < 0, \quad k = 2 \\ 2. & S_k = \{0\} \text{ para } k < 12 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3. & V_0 = \mathbb{C} \\ 4. & S_{12} = \mathbb{C}\Delta \end{array}$$

*Demostración.* 1. La parte de la derecha de (5.1) no puede ser negativa, ya que la parte de la izquierda no lo es. Por tanto,  $k \geq 0$ . Para  $k = 2$ , obtenemos  $1/6$  en la parte derecha pero la parte izquierda es la suma de múltiplos no negativos de  $1$ ,  $1/2$  y  $1/3$ . Esto supone una contradicción por lo que no existen tales formas modulares.

2. Si  $f$  es una forma cuspidal, entonces  $v_{\infty}(f) \geq 1$ , lo que implica  $k \geq 12$  según (5.1).

3.  $f \in V_0 \Rightarrow f - f(\infty) \in S_0 = \{0\}$ . Por tanto  $f = f(\infty)$  es constante, y  $V_0 = \mathbb{C}$  es el espacio de funciones constantes sobre  $\mathbb{H}$ .

4. Si  $f \in S_{12}$ ,  $v_{\infty}(f) \geq 1$ . Como  $k = 12$ , debe ser  $v_{\infty}(f) = 1$  por (5.1), y  $f$  no tiene otros ceros ni polos. Definimos  $g(z) = f(z) - \Delta(z) \cdot f(i)/\Delta(i)$ . Observamos que  $g(z) \in S_{12}$  porque  $\Delta$  es una forma cuspidal, y  $g(i) = 0$ . Gracias a la proposición anterior, llegamos a la conclusión de que  $g \equiv 0$  (al no cumplirse la igualdad de los órdenes por tener un cero en  $z = i$ ) y  $f$  es múltiplo de  $\Delta$ .  $\square$

**Teorema 5.3.** *Para  $k \geq 12$ , se tiene  $V_k = \Delta V_{k-12} \oplus \langle E_k \rangle$ .*

*Demostración.* Consideramos la función lineal  $\psi : V_k \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \mapsto f(\infty)$ . El núcleo es  $S_k$  y  $\psi$  es sobreyectiva porque  $\psi(E_k) = 1$ . Por tanto  $V_k = S_k \oplus \langle E_k \rangle$ . Si  $S_{k+12} = \Delta V_k$ , hemos acabado la prueba. Esta última igualdad es trivial para  $k$  negativo y la proposición anterior lo prueba para  $k = 0$ . Para el resto, sea  $f \in S_{k+12}$ , y construimos la función  $g = f/\Delta$ , que es holomorfa en  $\mathbb{H}$  porque  $\Delta$  no se anula allí (es fácil comprobarlo con la definición). Como  $v_{\infty}(g) = v_{\infty}(f) - v_{\infty}(\Delta) = v_{\infty}(f) - 1 \geq 0$ ,  $g \in V_k$ .  $\square$

A modo de ejemplo, una base para  $V_{36}$  sería  $\{E_{36}, \Delta E_{24}, \Delta^2 E_{12}, \Delta^3\}$  ya que:

$$V_{36} = \Delta V_{24} \oplus \langle E_{36} \rangle = \Delta^2 V_{12} \oplus \Delta \langle E_{24} \rangle \oplus \langle E_{36} \rangle = \Delta^3 V_0 \oplus \Delta^2 \langle E_{12} \rangle \oplus \Delta \langle E_{24} \rangle \oplus \langle E_{36} \rangle.$$

**Teorema 5.4.** Para  $k$  no negativo y par:

$$(5.3) \quad \dim V_k = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor + 1 & \text{si } k \not\equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor k/12 \rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $k$ . Para  $k = 0, 2$  ya lo hemos probado. Para  $k = 4, 6, 8, 10$  y usando parte de la demostración del teorema 5.3:

$$V_k = S_k \oplus \langle E \rangle \Rightarrow \dim(V_k) = \dim(S_k) + 1 \stackrel{(5.2)}{=} 0 + 1 = 1.$$

En el caso de que  $k \geq 12$ ,  $\dim(V_k) = \dim(V_{k-12}) + 1$  por el teorema 5.3.  $\square$

La fórmula de la dimensión permite obtener ciertas identidades, como las que involucran sumas de potencias de divisores a través de la función  $\sigma_k(n)$ . Una de ellas deriva de la igualdad  $E_4^2 = E_8$ . Ambas son formas modulares de peso 8 y  $\dim V_8 = 1 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} \mid E_8 = cE_4^2$ . Comparando el término constante en el desarrollo de Fourier (4.5), deducimos que  $c = 1$ . Calculando el desarrollo en los dos casos concretos y sabiendo que  $\zeta(4) = \pi^4/90$  y  $\zeta(8) = \pi^8/9450$ :

$$E_4^2 = E_8 \Rightarrow \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n\right)^2 = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n)q^n \quad \text{donde } q = e^{2\pi iz} \Rightarrow$$

$$1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n + 240^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3^2(n)q^{2n} + 240^2 \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n/2}}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m)q^n = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n)q^n.$$

Comparamos los coeficientes de  $q^n$ . Observamos en la parte de la izquierda que cuando  $n$  es par, el sumatorio de en medio añade los factores  $\sigma_3(n/2)\sigma_3(n/2)$ , que precisamente no aparecen en el tercer sumatorio. Por tanto:

$$480\sigma_7(n) = 480\sigma_3(n) + 240^2 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m) \Rightarrow \sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m).$$

## 5.1. Generalización de la fórmula

Hay una fórmula general para la dimensión que está en [DS05, Th.3.5.1] y en [Shi94, §2.6]. En el caso  $k \geq 2$  par, puede verse en estas referencias que para grupos generales la fórmula es

$$(5.4) \quad \dim = (k-1)(g-1) + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor \epsilon_2 + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \epsilon_3 + \frac{k}{2} \epsilon_\infty,$$

donde  $g$  es el género,  $\epsilon_2$  es el número de puntos elípticos de orden 2,  $\epsilon_3$  es el número de puntos elípticos de orden 3 y  $\epsilon_\infty$  es el número de cúspides. Procedemos a explicar con más detalle todos estos conceptos y a calcularlos para  $SL_2(\mathbb{Z})$ , comprobando si obtenemos de nuevo (5.3).

En general, el *género* de una superficie es una propiedad de invarianza topológica definida como el máximo número de curvas cerradas simples que no se intersecan, y que se pueden dibujar sobre la superficie sin separarla. Aplicado a nuestro problema y de forma informal, puede verse como el número de agujeros de la superficie de Riemann equivalente al dominio fundamental. En este caso, ese valor es cero.

Decimos que  $\tau \in \mathbb{H}$  es un *punto elíptico de orden  $k$*  de  $\Gamma$  si el estabilizador de  $\tau$  en  $\Gamma/\{\pm I\}$  no es trivial y tiene orden  $k$ . Recordemos que  $SL_2(\mathbb{Z})$  está generado por la inversión  $S$  y la traslación  $T$ . El subgrupo generado por  $S$  tiene orden 2 en el cociente, y el subgrupo generado por  $ST$ , orden 3.

$$Sz = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z = z \Leftrightarrow z = \pm i \quad y \quad STz = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z = z \Leftrightarrow z = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2.$$

Nos quedamos sólo con las soluciones en el semiplano superior. Consecuentemente,  $\epsilon_2 = 1$  y  $\epsilon_3 = 1$ .

Por último, las *cúspides* de  $\Gamma$  son las clases de equivalencia por  $\Gamma$  de  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . En nuestro caso, hay una cúspide ya que  $SL_2(\mathbb{Z})\infty = \{a/c \mid a, c \in \mathbb{Z} \wedge \text{mcd}(a, c) = 1\}$ . Sustituimos en (5.4) y escribimos  $k = s + 12t$  para  $s \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$  por ser  $k$  par, y  $t \in [0, +\infty)$  :

$$\dim(V_k) = 1 - \frac{k}{2} + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor = 1 + t + \left\lfloor \frac{s}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{3} \right\rfloor - \frac{s}{2}.$$

Para  $s = 2$ ,  $\dim(V_k) = t$  y para el resto de valores,  $\dim(V_k) = t + 1$ . Teniendo en cuenta que  $t = \lfloor k/12 \rfloor$ , hemos llegado a (5.3) por otro camino.



## CAPÍTULO 6

# Los operadores de Hecke

---

### 6.1. Definición, propiedades y ejemplos

Si modificamos el argumento de una forma modular  $f$  de peso  $k$ , notamos que  $f(z/2)$  y  $f(2z)$  dejan de serlo. Sin embargo, sorprende que  $g(z) = 2^k f(2z) + f(z/2) + f((z+1)/2)$  sí lo sea. Aparte de que es holomorfa, se cumplen las siguientes igualdades:

- $g(z+1) = 2^k f(2z+2) + f\left(\frac{z+1}{2}\right) + f\left(\frac{z}{2}+1\right) = 2^k f(2z) + f\left(\frac{z+1}{2}\right) + f(z/2) = g(z).$
- $g\left(-\frac{1}{z}\right) = 2^k f\left(\frac{-1}{z/2}\right) + f\left(\frac{-1}{2z}\right) + f\left(\frac{-1/z+1}{2}-1\right) = 2^k f\left(\frac{-1}{z/2}\right) + f\left(\frac{-1}{2z}\right) + f\left(\frac{-1-z}{2z}\right)$   
 $= z^k f\left(\frac{z}{2}\right) + (2z)^k f(2z) + f\left(\frac{-1}{2z/(1+z)}\right) = z^k f\left(\frac{z}{2}\right) + (2z)^k f(2z) + \left(\frac{2z}{1+z}\right)^k f\left(\frac{2z}{1+z}-2\right)$   
 $= z^k f\left(\frac{z}{2}\right) + (2z)^k f(2z) + \left(\frac{2z}{1+z}\right)^k f\left(\frac{-2}{1+z}\right) = z^k \left[ f\left(\frac{z}{2}\right) + 2^k f(2z) + f\left(\frac{1+z}{2}\right) \right] = z^k g(z).$

La pregunta ahora sería: ¿bajo qué transformaciones del argumento, las formas modulares se mantienen? Esto nos lleva a introducir el llamado operador de Hecke:

$$(6.1) \quad (T_n f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{ad=n} a^k \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \quad \text{para } n, a, d \in \mathbb{Z}^+.$$

Si tomamos  $n = 2$ , obtenemos el operador anterior salvo un factor  $1/2$ . Los operadores de Hecke aplican formas modulares en formas modular, pero esto no se ve a simple vista. Antes de probarlo, vamos a estudiar algunas de sus propiedades.

**Proposición 6.1.** *Si  $n$  y  $m$  son coprimos, entonces  $T_n T_m = T_{nm} = T_m T_n$ .*

*Demostración.* Cambiando la notación ligeramente:

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{ad=n \\ 0 \leq b < d}} a^k f(Az), \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (T_m f)(z) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{\alpha\delta=m \\ 0 \leq \beta < \delta}} \alpha^k f(Bz), \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

$$(T_m T_n f)(z) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{\alpha\delta=n \\ 0 \leq \beta < \delta}} \alpha^k \frac{1}{n} \sum_{\substack{ad=n \\ 0 \leq b < d}} a^k f(BAz) = \frac{1}{mn} \sum \sum (\alpha a)^k f(Cz), \quad C = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b + \beta d \\ 0 & \delta d \end{pmatrix}.$$

Sabemos que  $d$  recorre los divisores de  $n$  y  $\delta$  los de  $m$ . Por otro lado,  $b$  toma los diferentes residuos módulo  $d$  y  $\beta$  hace lo propio con  $\delta$ . Como  $m$  y  $n$  son coprimos,  $\delta d$  recorre todos los divisores de  $mn$  y  $\alpha b + \beta d$  toma los diferentes residuos módulo  $\delta d$ . Gracias a esto y comparando el operador anterior con el siguiente:

$$(T_{mn} f)(z) = \frac{1}{mn} \sum_{eh=mn} e^k \sum_{g=0}^{h-1} f\left(\frac{ez+g}{h}\right),$$

deducimos que  $T_m T_n = T_{mn}$  y, de forma análoga,  $T_n T_m = T_{nm} = T_{mn}$ .  $\square$

**Proposición 6.2.** *Siendo  $p$  un primo, los operadores de Hecke cumplen la fórmula de recurrencia:  $T_{p^{v+1}} = T_{p^v} T_p - p^{k-1} T_{p^{v-1}}$ .*

*Demostración.* Sabiendo que los divisores de  $p^v$  son sus propias potencias anteriores:

$$\begin{aligned} T_{p^v} f &= \sum_{s=0}^v p^{k(v-s)-v} \sum_{c=0}^{p^s-1} f\left(\frac{p^{v-s}z+c}{p^s}\right), \quad T_p f = p^{k-1} f(pz) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{z+b}{p}\right) \quad \text{y} \quad T_{p^v} T_p f = \\ &= p^{k-1} \sum_{s=0}^v p^{k(v-s)-v} \sum_{c=0}^{p^s-1} f\left(\frac{p^{v-s+1}z+cp}{p^s}\right) + \frac{1}{p} \sum_{b=0}^{p-1} \sum_{s=0}^v p^{k(v-s)-v} \sum_{c=0}^{p^s-1} f\left(\frac{p^{v-s}z+c+bp^s}{p^{s+1}}\right) \end{aligned}$$

Hallamos el término  $s=0$  del primer sumando:  $p^{k(v+1)-v-1} f(p^{v+1}z)$ . En el segundo término, observamos que  $c+bp^s$  va desde 0 hasta  $p^{s+1}-1$ ; por lo que equivale a:

$$\frac{1}{p} \sum_{s=0}^v p^{k(v-s)-v} \sum_{e=0}^{p^{s+1}-1} f\left(\frac{p^{v-s}z+e}{p^{s+1}}\right) \stackrel{\{s=t-1\}}{=} \sum_{t=1}^{v+1} p^{k(v+1-t)-v-1} \sum_{e=0}^{p^t-1} f\left(\frac{p^{v+1-t}z+e}{p^t}\right).$$

No es difícil comprobar que sumando esto y  $p^{k(v+1)-v-1} f(p^{v+1}z)$ , obtenemos  $T_{p^{v+1}} f$ . Por ello:

$$T_{p^v} T_p f = T_{p^{v+1}} f + p^{k-1} \sum_{s=1}^v p^{k(v-s)-v} \sum_{c=0}^{p^s-1} f\left(\frac{p^{v-s+1}z+cp}{p^s}\right).$$

Cancelando  $p$  en el argumento de  $f$  y con la sustitución  $s=t+1$ :

$$T_{p^v} T_p f = T_{p^{v+1}} f + p^{k-1} \sum_{t=0}^{v-1} p^{k(v-t-1)-v} \sum_{c=0}^{p^{t+1}-1} f\left(\frac{p^{v-t-1}z+c}{p^t}\right).$$

Escribimos  $c = qp^t + r$  con  $0 \leq q < p$  y  $0 \leq r < p^t$ . Fijado  $r$ ,  $c$  se mueve en función de  $q$ . Si evaluamos estos valores de  $c$  en  $f$ , obtenemos el mismo resultado ya que  $f$  es



1-periódica al ser una forma modular. Como  $q$  oscila entre 0 y  $p$ , la función aparecerá  $p$  veces con el mismo valor de  $r$ . Por tanto:

$$T_{p^v} T_p f = T_{p^{v+1}} f + p^{k-1} \sum_{t=0}^{v-1} p^{k(v-t-1)-v+1} \sum_{r=0}^{p^t-1} f\left(\frac{p^{v-t-1}z+r}{p^t}\right) = T_{p^{v+1}} f + p^{k-1} T_{p^{v-1}} f.$$

□

Gracias a estos dos resultados, los operadores de Hecke quedan determinados por los  $T_{p^v}$  donde  $p^v$  son las potencias de primos que aparecen en la descomposición de  $n$ . Resolviendo la recurrencia de la proposición anterior, seremos capaces de expresar  $T_{p^v}$  en función de  $T_p$  y así,  $T_n$  queda determinado por los operadores de índice primo. Vamos a analizar la siguiente recurrencia:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \quad \text{con} \quad U_0(x) = 1 \quad \text{y} \quad U_1(x) = 2x.$$

Afirmamos que la solución es  $U_n(x) = \sin((n+1) \arccos x) / \sin(\arccos x)$ . Los casos base son inmediatos (mera sustitución), por lo que vamos a comprobar que los  $U_n$  definidos satisfacen la fórmula de recurrencia. El denominador es el mismo, así que nos centramos en el numerador. Abreviamos la notación usando  $\alpha = \arccos x$ , de forma que  $\cos \alpha = x$ .

$$\begin{aligned} \text{Numerador}(U_{n+1}) &= \sin(n\alpha + 2\alpha) = \cos(n\alpha)\sin(2\alpha) + \sin(n\alpha)\cos(2\alpha) = 2\cos(n\alpha)\sin(\alpha)x \\ &+ \sin(n\alpha)[x^2 - \sin^2(\alpha)] = \sin(n\alpha)[x^2 - 1 + x^2] + 2\cos(n\alpha)\sin(\alpha)x = 2x^2\sin(n\alpha) - \sin(n\alpha) \\ &+ 2x\cos(n\alpha)\sin(\alpha) = 2x[\sin(n\alpha + \alpha)] - \sin(n\alpha) = \text{Numerador}(2xU_n - U_{n-1}). \end{aligned}$$

Comparando la fórmula de recurrencia de  $U_n$  con la de la proposición 6.2 y ajustando un poco los coeficientes, deducimos que  $T_{p^\nu}$  se puede obtener a partir de  $T_p$  de la siguiente forma:  $T_{p^\nu} = p^{\nu(k-1)/2} U_\nu(\frac{1}{2}p^{(1-k)/2} T_p)$ . Basta sustituir para comprobarlo. Esto implica que el operador de Hecke puede expresarse como un polinomio en  $T_p$  y sabemos que  $T_p, T_q$  conmutan para  $p, q$  primos. Por tanto,  $T_n T_m = T_m T_n \quad \forall m, n$ .

Es hora de mostrar algún ejemplo concreto. Para ello, vamos a hallar el operador de Hecke de la serie de Eisenstein para  $n = 2$  usando (6.1) y recordando (4.3):

$$T_2 G_k = \frac{1}{2} \left[ 2^k G_k(2z) + G_k(z/2) + G_k\left(\frac{z+1}{2}\right) \right].$$

Calculando la serie de Eisenstein para los diferentes argumentos y analizándola:

$$T_2 G_k = 2^{k-1} \left[ \frac{1}{2} \sum'_{m \text{ par}} (mz+n)^{-k} + \frac{1}{2} \sum'_{n \text{ par}} (mz+n)^{-k} + \frac{1}{2} \sum'_{\substack{m, n \text{ misma} \\ \text{paridad}}} (mz+n)^{-k} \right].$$

Examinando los índices en la suma de las tres series, observamos que estamos añadiendo  $m, n$  par tres veces; y el resto de casos, una vez. Por tanto, podemos escribir lo anterior así:

$$\begin{aligned} T_2 G_k &= 2^{k-1} \left[ \frac{1}{2} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (mz+n)^{-k} + \frac{2}{2} \sum'_{m,n \text{ par}} (mz+n)^{-k} \right] = 2^{k-1} \left[ G_k + \sum'_{i,j \in \mathbb{Z}} (2iz+2j)^{-k} \right] = \\ &= 2^{k-1} \left[ G_k + 2^{-k} \sum'_{i,j \in \mathbb{Z}} (iz+j)^{-k} \right] = 2^{k-1} \left[ G_k + \frac{1}{2^{k-1}} G_k \right] = G_k [1 + 2^{k-1}]. \end{aligned}$$

Esto se puede generalizar para cualquier primo  $p$ . El operador de Hecke en este caso sería:

$$T_p G_k = \frac{1}{p} \left[ p^k G_k(pz) + G_k\left(\frac{z}{p}\right) + \sum_{b=1}^{p-1} G_k\left(\frac{z+b}{p}\right) \right], \quad G_k\left(\frac{z+b}{p}\right) = \frac{p^k}{2} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} (mz+bm+pn)^{-k}.$$

En esta última suma, si  $m$  divide a  $p$ , el factor que multiplica a  $z$  y el término independiente dividen a  $p$ . Si  $m$  no divide a  $p$ , ninguno de ellos lo hace. Para  $m \nmid p$  y  $n$  fijos,  $bm+pn$  va recorriendo los valores entre múltiplos de  $p$  sin llegar a éstos. Al considerarlo en conjunto, estamos juntando todos los  $m, n$  tal que ninguno de ellos divide a  $p$ , y los que ambos dividen a  $p$  aparecen  $p-1$  veces. Realizando un razonamiento similar al de antes:

$$T_p G_k = \frac{p^{k-1}}{2} \left[ \sum'_{m|p} + \sum'_{n|p} + \sum'_{m,n \nmid p} + (p-1) \sum'_{m,n|p} \right] = p^{k-1} \left[ G_k + \frac{p}{2p^k} \sum'_{i,j \in \mathbb{Z}} (iz+j)^{-k} \right] = \sigma_{k-1}(p) G_k.$$

Usando inducción, esto se cumple para cualquier potencia de primo. El caso base lo acabamos de demostrar. Supongamos que  $T_{p^v} G_k = \sigma_{k-1}(p^v) G_k$  y veamos si se cumple para  $p^{v+1}$ .

$$\begin{aligned} T_{p^{v+1}} G_k &= (T_p T_{p^v} - p^{k-1} T_{p^{v-1}}) G_k = [\sigma_{k-1}(p) \sigma_{k-1}(p^v) - p^{k-1} \sigma_{k-1}(p^{v-1})] G_k = \\ &= \left[ p^{k-1} \sum_{s=0}^v p^{s(k-1)} + \sum_{s=0}^v p^{s(k-1)} - p^{k-1} \sum_{s=0}^{v-1} p^{s(k-1)} \right] G_k = \\ &= \left[ \sum_{s=1}^{v+1} p^{s(k-1)} + \sum_{s=0}^v p^{s(k-1)} - \sum_{s=1}^v p^{s(k-1)} \right] G_k = \sigma_{k-1}(p^{v+1}) G_k. \end{aligned}$$

De hecho, si nos vamos a algo todavía más general, y gracias a las propiedades de los operadores de Hecke, podemos probar lo siguiente:

**Proposición 6.3.** *Se cumple:  $T_n G_k = \sigma_{k-1}(n) G_k \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ .*

*Demostración.* Realizamos la descomposición de  $n$  en factores primos:  $n = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_j^{v_j}$ . Gracias a la proposición 6.1, podemos separar los operadores de Hecke para cada uno de estos primos:

$$T_n G_k = T_{p_1^{v_1}} T_{p_2^{v_2}} \dots T_{p_j^{v_j}} G_k = \prod_{s=1}^j \sigma_{k-1}(p_s^{v_s}) G_k = \sigma_{k-1}(p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_j^{v_j}) G_k = \sigma_{k-1}(n) G_k.$$

□

Volviendo a las propiedades, el hecho de que los operadores de Hecke apliquen formas modulares en formas modulares es complicado de probar debido a la notación a veces engorrosa y a la búsqueda de generalidad. Una prueba que particularmente me parece más sencilla de entender y clara en el concepto es la que se lleva a cabo en [Vaugh], dividida en dos teoremas principalmente. Antes de enunciarlos, vamos a explicar la idea en la que se basa. Llamamos  $\Gamma_n$  al conjunto formado por las matrices con coeficientes enteros cuyo determinante es  $n$ . Nótese que  $\Gamma_1 = SL_2(\mathbb{Z})$ . Para un grupo genérico  $\Gamma$  y  $A, B \in \Gamma_n$ , definimos la relación de equivalencia  $A \sim B \iff \exists C \in \Gamma \mid A = CB$ .  $\Gamma_n/\Gamma$  es el conjunto de clases de equivalencia. Se puede demostrar que un conjunto de los representantes para cada clase viene dado por:

$$(6.2) \quad \mathcal{A}_n = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid ad = n, \quad d > 0; \quad 0 \leq b < d \right\}.$$

**Teorema 6.4.** *Sea  $f$  una forma modular de peso  $k$  sobre  $\Gamma$ . Entonces*

$$(6.3) \quad (T_n f)(Vz) = (z\gamma + \delta)^k (T_n f)(z) \quad \text{para} \quad V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

*Demostración.* Con la notación que acabamos de introducir, podemos expresar (6.1) como:

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{A \in \mathcal{A}_n} a^k f(Az) \quad \text{para} \quad n, a, d \in \mathbb{Z}^+ \implies (T_n f)(Vz) = \frac{1}{n} \sum_{A \in \mathcal{A}_n} a^k f(AVz).$$

Al multiplicar las matrices, el resultado  $AV \in \Gamma_n$ . Atendiendo a lo que hemos afirmado previamente, tiene que existir  $A_1 \in \mathcal{A}_n$  tal que  $AV \sim A_1$  y, por tanto, también existe  $V_1 \in \Gamma$  tal que  $AV = V_1 A_1$ . Tomando coeficientes con letras latinas para  $A, A_1$  y griegas para  $V, V_1$ :

$$AV = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ d\gamma & d\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_1 & \alpha_1 b_1 + \beta_1 d_1 \\ \gamma_1 a_1 & \gamma_1 b_1 + \delta_1 d_1 \end{pmatrix} = V_1 A_1.$$

Recordemos que tanto la matriz  $A$  como la matriz  $A_1$  pertenecen a  $\Gamma_n$ . Esto quiere decir que el determinante de ambas debe ser  $n$ ; por lo tanto,  $ad = n$  y  $a_1 d_1 = n$ . Igualando la esquina inferior izquierda:  $d\gamma = \gamma_1 a_1 \implies n\gamma/a = \gamma_1 n/d_1 \implies \gamma = a\gamma_1/d_1$ .

Comparando la esquina inferior derecha:  $\delta_1 = d\delta/d_1 - \gamma_1 b_1/d_1 \Rightarrow \delta_1 = a_1\delta/a - \gamma_1 b_1/a \Rightarrow a\delta_1 = a_1\delta - b_1\gamma$ . Por tanto, obtenemos la siguiente igualdad:

$$a(\gamma_1 A_1 z + \delta_1) = a\gamma_1 \frac{a_1 z + b_1}{d_1} + (a_1\delta - b_1\gamma) = \gamma(a_1 z + b_1) - b_1\gamma + a_1\delta = a_1(\gamma z + \delta).$$

$$(T_n f)(Vz) = \frac{1}{n} \sum_{A \in \mathcal{A}_n} a^k f(V_1 A_1 z) = \frac{1}{n} \sum_{A \in \mathcal{A}_n} (\gamma_1 A_1 z + \delta_1)^k a^k f(A_1 z) = (\gamma z + \delta)^k (T_n f)(z).$$

Al final, hemos cambiado el índice de la suma a  $A_1$  en lugar de  $A$ . La matriz  $A_1$  se mueve por  $\mathcal{A}_n$  al igual que  $A$ . Esto se debe a que si  $A'V = V_1' A_1'$ , entonces  $A \sim A' \iff A_1 \sim A_1'$ .  $\square$

**Teorema 6.5.** Sea  $f$  una forma modular de peso  $k$  con desarrollo de Fourier

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{2\pi i z m}, \text{ entonces } (T_n f)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{2\pi i z m} \text{ con } b_m = \sum_{a|\text{mcd}(m,n)} a^{k-1} c_{mn/a^2}.$$

*Demostración.* Un simple cálculo en (6.1) y una sustitución posterior nos llevan a:

$$(T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_{ad=n} d^{-k} \sum_{0 \leq b < d} f\left(\frac{az+b}{d}\right) = n^{k-1} \sum_{ad=n} d^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{0 \leq b < d} c_m e^{2\pi i m(az+b)/d}.$$

Observamos que aparece la suma de las raíces  $d$ -ésimas de la unidad y, escribiendo  $m' = m/d$ , obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{0 \leq b < d} e^{2\pi i b m/d} = \begin{cases} d & d \text{ divide a } m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \Rightarrow (T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{ad=n} d^{-k+1} c_{dm'} e^{2\pi i m' a z}.$$

Agrupamos potencias de  $e$  y renombrando  $\mu = am' \Rightarrow m' = \mu/a$ :

$$T_n f = \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{2\pi i z \mu} \sum_{a|\text{mcd}(n,\mu)} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} c_{d\mu/a} \Rightarrow b_{\mu} = \sum_{a|\text{mcd}(n,\mu)} a^{k-1} c_{n\mu/a^2}.$$

$\square$

**Teorema 6.6.** Los operadores de Hecke llevan formas modulares a formas modulares. En particular, también aplican formas cuspidales en formas cuspidales.

*Demostración.* Comprobamos que se cumplen las condiciones necesarias para que  $T_n f$  sea una forma modular de peso  $k$ :

- La definición inicial nos dice que  $T_n f$  es una suma finita de funciones holomorfas; por lo tanto,  $T_n f$  es holomorfa. Gracias al teorema 6.5, también es holomorfa en el infinito.

- $(T_n f)(Vz) = (z\gamma + \delta)^k (T_n f)(z)$  para  $V \in \Gamma$  gracias a (6.3).

Si  $f(i\infty) = 0$  (*cusp form*), entonces  $(T_n f)(i\infty) = \frac{1}{n} \sum a^k f\left(\frac{ai\infty+b}{d}\right) = \frac{1}{n} \sum a^k 0 = 0$ .  $\square$

## 6.2. Diagonalización y aplicaciones

Dejamos un poco de lado la variable compleja y pasamos a enunciar algunos resultados de álgebra lineal que tienen un importante impacto en los operadores de Hecke. Para evitar extendernos demasiado en el contenido, las demostraciones pueden consultarse en [Conrad1] o similares referencias en la web. Llamamos matriz Hermítica a aquella que es autoadjunta con elementos pertenecientes a los números complejos.

**Proposición 6.7.** *Una matriz Hermítica es diagonalizable.*

**Proposición 6.8.** *Sea  $A : V \rightarrow V$  un operador lineal diagonalizable y  $W$  un subespacio de  $V$  invariante por  $A$ , entonces  $A|_W : W \rightarrow W$  también diagonaliza.*

**Teorema 6.9.** *Sea  $V$  un espacio vectorial unitario, si  $C = \{L_1, L_2, \dots\}$  es un conjunto de aplicaciones lineales autoadjuntas  $V \rightarrow V$  que conmutan  $L_i L_j = L_j L_i$ , entonces existe una base ortonormal en la que todas diagonalizan simultáneamente.*

Para aplicar esto a nuestro área de trabajo, necesitamos introducir el siguiente producto escalar, conocido como producto de Petersson:

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(x + iy) \overline{g(x + iy)} y^{k-2} dx dy$$

con  $D$  un dominio fundamental. Para que converja, necesitamos restringirnos al espacio vectorial de formas cuspidales. Los operadores de Hecke son autoadjuntos para este producto escalar. La prueba requiere introducir otros resultados y es bastante complicada. La mejor referencia que he encontrado puede consultarse en [Mar18, §6.2]. Lo que quiere decir todo esto es que existe una base  $B = \{f_1, \dots, f_d\}$  de las formas cuspidales de peso  $k$  que cumple  $T_n f = \lambda(n) f$  para  $f \in B$ , con  $\lambda(n)$  dependiendo de  $f$ . Gracias a esto, podemos enunciar la siguiente proposición:

**Proposición 6.10.** *Dada  $f \in B$  y su desarrollo de Fourier  $\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{2\pi i m z}$  con  $a_1 \neq 0$ , se cumple  $a_n = \lambda(n) a_1$ . Además,  $a_n a_m = a_{nm} a_1$  cuando  $m$  y  $n$  son coprimos.*

*Demostración.* Comparamos los coeficientes de  $e^{2\pi i z}$  de  $f$  y  $T_n f$  en dos igualdades diferentes. Por un lado y gracias al teorema 6.5, el primer coeficiente de  $T_n f$  es  $b_1 = a_n$ . Por otro lado, usando  $T_n f = \lambda(n) f$ , obtenemos que  $b_1 = \lambda(n) a_1$ . Esto prueba la primera afirmación.

Para la segunda, como  $m$  y  $n$  son coprimos, tenemos:  $\lambda(n) \lambda(m) f = T_n \lambda(m) f = T_n T_m f = T_{nm} f = \lambda(nm) f$ . Por tanto,  $a_n a_m = \lambda(n) \lambda(m) a_1^2 = \lambda(nm) a_1^2 = a_{nm} a_1$ .  $\square$

Recordemos la función  $\Delta$  definida en (4.6). Si retrocedemos a estas páginas, observamos que quedó pendiente la prueba de una de sus propiedades:  $\tau(n) \tau(m) = \tau(nm)$  si  $n$  y  $m$  son coprimos. Ahora tenemos las herramientas necesarias para demostrarlo de manera sencilla, usando la segunda parte de la proposición anterior. Por notación usual, los coeficientes de esta función se escriben como  $a_n = \tau(n)$ . De la propia definición se sigue que  $\tau(1) = 1$ . Por tanto,  $\tau(n) \tau(m) = \tau(nm) \tau(1) = \tau(nm)$ ; es decir, la función  $\tau(n)$  de Ramanujan es multiplicativa.

**Proposición 6.11.** *Si  $p$  es primo y  $r \in \mathbb{Z}^+$ , se cumple  $\tau(p^{r+1}) = \tau(p)\tau(p^r) - p^{11}\tau(p^{r-1})$ .*

*Demostración.* Usando el teorema 6.5, los coeficientes en el desarrollo de Fourier para  $T_p f$  son:

$$b_m = \begin{cases} c_{pm} + p^{k-1}c_{m/p} & p \mid m \\ c_{pm} & p \nmid m \end{cases} \Rightarrow T_p \Delta = \left[ \sum_{p \nmid m} \tau(pm) + \sum_{p \mid m} (\tau(pm) + p^{11}\tau(m/p)) \right] e^{2\pi izm}.$$

Por otro lado,  $T_p$  actúa sobre  $S_{12}$ , que tiene dimensión uno según vimos en el capítulo previo. Por tanto  $(T_p \Delta)(z) = \lambda \Delta(z)$  para  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Gracias a la proposición anterior,  $\tau(p) = \lambda \tau(1) \Rightarrow \lambda = \tau(p)$ . Comparando los coeficientes de  $\Delta$  y  $T_p \Delta$  en el caso  $p \mid m$ ; es decir,  $m = p^r$ :

$$\tau(pm) + p^{11}\tau(m/p) = \lambda \tau(m) = \tau(p)\tau(m) \Rightarrow \tau(p^{r+1}) + p^{11}\tau(p^{r-1}) = \tau(p)\tau(p^r).$$

□

## APÉNDICE A

# Funciones elípticas de Jacobi

---

La primera tarea es expresar las funciones de Jacobi en términos de  $\theta$  únicamente. Basta con sustituir en las definiciones de dichas funciones.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(2Kz) &\stackrel{(2.2)e}{=} \frac{\theta_1(z)}{\sqrt{k}\theta_4(z)} \stackrel{(2.3)}{=} \frac{\theta_1(z)\theta_3(0)}{\theta_2(0)\theta_4(z)} \stackrel{(2.1)}{=} \frac{\theta(0)\theta(z+\tau^*)}{\theta(\tau/2)\theta(z+1/2)} (-ie^{\pi iz}) \\ \operatorname{cn}(2Kz) &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{\sqrt{k'}\theta_2(z)}{\sqrt{k}\theta_4(z)} \stackrel{(2.3)}{=} \frac{\theta_4(0)\theta_2(z)}{\theta_2(0)\theta_4(z)} \stackrel{(2.1)}{=} \frac{\theta(1/2)\theta(z+\tau/2)}{\theta(\tau/2)\theta(z+1/2)} e^{\pi iz} \\ \operatorname{dn}(2Kz) &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{\sqrt{k'}\theta_3(z)}{\theta_4(z)} \stackrel{(2.3)}{=} \frac{\theta_4(0)\theta_3(z)}{\theta_3(0)\theta_4(z)} \stackrel{(2.1)}{=} \frac{\theta(1/2)\theta(z)}{\theta(0)\theta(z+1/2)} \end{aligned}$$

La segunda tarea es hallar la paridad de  $\operatorname{sn}$  y  $\operatorname{cn}$ . A partir de aquí consideramos  $\omega = z/2K$ . Nos gustaría llegar a la conclusión de que  $\operatorname{sn}(z) = -\operatorname{sn}(-z)$ . Analizando el desarrollo en serie de sumas, se puede ver que  $\theta(\omega + 1/2) = \theta(-\omega + 1/2)$ . Tenemos que comparar:

$$\operatorname{sn}(z) = \frac{\theta(0)\theta(\omega + \tau^*)}{\theta(\tau/2)\theta(\omega + 1/2)} (-ie^{\pi i\omega}) \quad \text{y} \quad -\operatorname{sn}(-z) = \frac{\theta(0)\theta(-\omega + \tau^*)}{\theta(\tau/2)\theta(-\omega + 1/2)} ie^{-\pi i\omega}.$$

Eliminando términos comunes en ambos lados, comparamos  $\theta(\omega + \tau^*)(-ie^{\pi i\omega})$  y  $\theta(-\omega + \tau^*)(ie^{-\pi i\omega})$ ; es decir,  $\sum q^{n^2+n}(-1)^n e^{2\pi in\omega}$  y  $\sum q^{n^2+n}(-1)^{n+1} e^{-2\pi i(n+1)\omega}$ . Si consideramos  $n = 0$ , en el primer caso obtenemos 1 y en el segundo,  $-e^{-2\pi i\omega}$ . Para  $n = -1$ , obtenemos en el primer caso  $-e^{-2\pi i\omega}$  y en el segundo, 1. Puede comprobarse que esto sucede para los diferentes valores de  $n$ ; es decir, el resultado de un lado para un determinado valor de  $n$  aparece en el lado opuesto para otro valor de  $n$ .

De forma parecida se procede con  $\operatorname{cn}$ . En este caso, queremos probar  $\operatorname{cn}(z) = \operatorname{cn}(-z)$ , por lo que comparamos:

$$\operatorname{cn}(z) = \frac{\theta(1/2)\theta(\omega + \tau/2)}{\theta(\tau/2)\theta(\omega + 1/2)} e^{\pi i\omega} \quad \text{y} \quad \operatorname{cn}(-z) = \frac{\theta(1/2)\theta(-\omega + \tau/2)}{\theta(\tau/2)\theta(-\omega + 1/2)} e^{-\pi i\omega}.$$

De nuevo eliminamos factores comunes y tenemos que comparar  $\theta(\omega + \tau/2)e^{\pi i\omega}$  con  $\theta(-\omega + \tau/2)e^{-\pi i\omega}$ , produciéndose el mismo fenómeno que antes.

La tercera y última tarea es demostrar (2.6). Para probar la primera fila de igualdades, basta con usar (2.5) junto con las relaciones que satisface la función  $\theta$ ; para la segunda, las igualdades definidas en (2.4). Para la función  $\operatorname{sn}$ :

$$\operatorname{sn}(z + 2K) = \frac{\theta(0)\theta(\omega + 1 + \tau^*)}{\theta(\tau/2)\theta(\omega + 1 + 1/2)} (-ie^{\pi i(\omega+1)}) = \frac{\theta(0)\theta(\omega + \tau^*)}{\theta(\tau/2)\theta(\omega + 1/2)} ie^{\pi i\omega} = -\operatorname{sn}(z).$$

$$\operatorname{sn}(z + 2K\tau) = \frac{\theta_1(\omega + \tau)}{\sqrt{k}\theta_4(\omega + \tau)} = \frac{-q^{-1}e^{-2\pi i\omega}\theta_1(\omega)}{-\sqrt{k}q^{-1}e^{-2\pi i\omega}\theta_4(\omega)} = \frac{\theta_1(\omega)}{\sqrt{k}\theta_4(\omega)} = \operatorname{sn}(z).$$

Para la función  $\operatorname{cn}$ :

$$\operatorname{cn}(z + 2K) = \frac{\theta(1/2)\theta(\omega + 1 + \tau/2)}{\theta(\tau/2)\theta(\omega + 1 + 1/2)} e^{\pi i(\omega+1)} = \frac{\theta(1/2)\theta(\omega + \tau/2)}{\theta(\tau/2)\theta(\omega + 1/2)} (-e^{\pi i\omega}) = -\operatorname{cn}(z).$$

$$\operatorname{cn}(z + 2K\tau) = \frac{\theta_2(\omega + \tau)}{\theta_4(\omega + \tau)} \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} = \frac{q^{-1}e^{-2\pi i\omega}\theta_2(\omega)}{-q^{-1}e^{-2\pi i\omega}\theta_4(\omega)} \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} = -\frac{\theta_2(\omega)}{\theta_4(\omega)} \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} = -\operatorname{cn}(z).$$

Para la función  $\operatorname{dn}$ :

$$\operatorname{dn}(z + 2K) = \frac{\theta(1/2)\theta(\omega + 1)}{\theta(0)\theta(\omega + 1 + 1/2)} = \frac{\theta(1/2)\theta(\omega)}{\theta(0)\theta(\omega + 1/2)} = \operatorname{dn}(z).$$

$$\operatorname{dn}(z + 2K\tau) = \frac{\sqrt{k'}\theta_3(\omega + \tau)}{\theta_4(\omega + \tau)} = \frac{\sqrt{k'}q^{-1}e^{-2\pi i\omega}\theta_3(\omega)}{-q^{-1}e^{-2\pi i\omega}\theta_4(\omega)} = -\frac{\sqrt{k'}\theta_3(\omega)}{\theta_4(\omega)} = -\operatorname{dn}(z).$$



## APÉNDICE B

# Propiedades de $SL_2(\mathbb{Z})$

---

**Proposición B.1.** *Dados  $\{\omega_1, \omega_2\}$  y  $\{\omega'_1, \omega'_2\}$  ordenados de forma que  $\Im(\omega_1/\omega_2)$  y  $\Im(\omega'_1/\omega'_2)$  sean positivos, ambos generan el mismo retículo si y solo si*

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{para cierta matriz } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

*Demostración.* Suponemos en primer lugar que existe tal matriz. Por tanto, el retículo generado por  $\{\omega'_1, \omega'_2\}$  podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$\Lambda' = \{s\omega'_1 + t\omega'_2\} = \{saw_1 + sb\omega_2 + tc\omega_1 + td\omega_2\} = \{(sa + tc)\omega_1 + (sb + td)\omega_2\}.$$

Queremos que sea igual al retículo  $\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2\}$ , luego nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Como el determinante de la matriz es distinto de 0, el sistema es compatible determinado y siempre existe solución, que además es entera.

Para demostrar la implicación contraria, sabemos por la propia definición de retículo que existen matrices  $2 \times 2$  con coeficientes enteros  $V$  y  $W$  que cumplen:

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = VW \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [I - VW] \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad VW = I.$$

Tomando determinantes en ambos miembros de la igualdad final, deducimos que el determinante de  $V$  y  $W$  es  $\pm 1$ . Por la orientación de los períodos, sólo es admisible que el determinante sea 1; es decir, que la matriz pertenezca a  $SL_2(\mathbb{Z})$ .  $\square$

**Proposición B.2.** *El grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$  está generado por las matrices:*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Sea  $G = \langle S, T \rangle$ . Nuestro objetivo será probar que  $G = SL_2(\mathbb{Z})$ . Es obvio que  $G$  está contenido en  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Veamos la inclusión contraria. Siguiendo la prueba de [Conrad2], estudiamos el efecto de  $S$  y  $T^m$  al multiplicar por la izquierda.

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad S\gamma = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \quad T^m\gamma = \begin{pmatrix} a + mc & b + md \\ c & d \end{pmatrix}$$

Podemos suponer  $c \neq 0$ ,  $|a| \geq |c|$  y escribimos  $a = cq + r$  con  $0 \leq r < |c|$ . De esta forma:

$$ST^{-q}\gamma = S \begin{pmatrix} a - qc & b - qd \\ c & d \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} r & b - qd \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - qd \end{pmatrix}.$$

Si seguimos aplicando el algoritmo de la división cierto número de veces, llegaremos en algún momento a una matriz con valor 0 en la esquina inferior izquierda, cuando el resto de la división sea igual a 0. Al tener determinante igual a 1, esta matriz tendrá valores  $\pm 1$  en las diagonales (mismo signo ambas) y cierto número entero en la esquina superior derecha. Por tanto, esta matriz será  $T^n$  o  $-T^{-n}$  y, como  $T^n \in G$  y  $S^2 = -I$ , se cumple lo siguiente:

$$\exists g \in G \mid g\gamma = \pm T^n \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \gamma = \pm g^{-1}T^n \in G.$$

□

## APÉNDICE C

# El grupo $\Gamma_0(2)$

---

En la definición de forma modular se considera el grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$ , pero podemos cambiarlo por otro. En teoría de números toma importancia el grupo  $\Gamma_0(N)$ , definido como  $SL_2(\mathbb{Z})$  pero con la restricción de que  $c$  sea divisible por  $N$ . Vamos a centrarnos en el caso  $N = 2$ . La forma modular en este caso se define de manera análoga a (4.1), pero con la restricción de que  $\gamma \in \Gamma_0(2)$ . Llamaremos  $V_k(2)$  al espacio vectorial formado por estas formas modulares. Comprobemos que si  $f \in V_k$  entonces  $g \in V_k(2)$  con  $g(z) = f(2z)$ . Definimos el siguiente operador (llamado *slash operator* en inglés) para  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\gamma \in GL_2(\mathbb{Z})$ :

$$(f|_\gamma)(z) := (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

Se observa que  $f|_{\gamma_1\gamma_2} = (f|_{\gamma_1})|_{\gamma_2}$  y, si  $f$  es una forma modular de peso  $k$  sobre  $SL_2(\mathbb{Z})$ ,  $f|_\gamma \equiv f \ \forall \gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ . Suponemos que  $\gamma' \in \Gamma_0(2)$  y consideramos las siguiente matrices:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha\gamma'\alpha^{-1} = \gamma = \begin{pmatrix} a & bn \\ c/n & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

Con esta notación,  $g(z) = f(2z) = (f|_\alpha)(z)$ . Como hemos observado antes, basta comprobar que  $g|_{\gamma'} = (f|_\alpha)|_{\gamma'} = f|_\alpha = g \ \forall \gamma' \in \Gamma_0(2)$  para afirmar que  $g \in V_k(2)$ :

$$(f|_\alpha)|_{\gamma'} = f|_{\alpha\gamma'} = f|_{\alpha\gamma'\alpha^{-1}\alpha} = (f|_{\alpha\gamma'\alpha^{-1}})|_\alpha = (f|_\gamma)|_\alpha = f|_\alpha.$$

Ejemplos de formas modulares en  $\Gamma_0(2)$  son:

$$E_{\infty,k}(z) = \sum_{\substack{\text{mcd}(m,n)=1 \\ m \text{ par}, n \text{ impar}}} (mz + n)^{-k} \quad \text{y} \quad E_{0,k}(z) = \sum_{\substack{\text{mcd}(m,n)=1 \\ m \text{ impar}}} (mz + n)^{-k}.$$

Para demostrarlo, se observa que, al igual que pasaba con la serie de Eisenstein normalizada, ambas son holomorfas con crecimiento a lo más polinómico en  $\Im(z)$  y que el grupo  $\Gamma_0(2)$  está generado por las matrices:

$$-I, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como hicimos anteriormente, sustituyendo los generadores en (4.1) obtenemos las ecuaciones que deben satisfacerse para ser una forma modular:  $f(z+1) = f(z)$  y  $f(Rz) = (2z-1)^{-k}f(z)$ . Tenemos que analizar la paridad de los términos para comprobar que las funciones que acabamos de definir cumplen estas igualdades. Para  $E_{\infty,k}(z)$ , el factor que multiplica a  $z$  es par y el término independiente es impar; y para  $E_{0,k}(z)$  el primero es impar y el otro da igual. Teniendo en cuenta que  $m(z+1) + n = mz + (m+n)$  y el numerador de  $Rz + n$  es  $z(2n+m) - (m+n)$ , basta con renombrar los índices en la suma y observar la tabla C.1.

	<b>m</b>	<b>n</b>	<b>m+n</b>	<b>2n+m</b>
$E_{\infty,k}$	par	impar	impar	par
$E_{0,k}$	impar	*	*	impar

Tabla C.1: Paridad en las operaciones.

**Proposición C.1.** *Sea  $\Gamma$  un subgrupo de  $SL_2(\mathbb{Z})$  y  $\mathcal{D}$  el dominio fundamental de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Si existe una descomposición  $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_{h \in R} \Gamma h$  para  $R \subset SL_2(\mathbb{Z})$  finito, entonces el conjunto  $\mathcal{D}_\Gamma = \bigcup_{h \in R} h\mathcal{D}$  es un dominio fundamental para  $\Gamma$ .*

*Demostración.* Dividimos la prueba en dos partes: por un lado, todo punto del semiplano superior tiene que alcanzarse por medio de la aplicación de una matriz de  $\Gamma$  a un punto de  $\mathcal{D}_\Gamma$  y, por otro, no puede haber dos puntos relacionados mediante  $\gamma \in \Gamma$  en el interior de  $\mathcal{D}_\Gamma$ .

1. Por la propia definición de dominio fundamental de  $SL_2(\mathbb{Z})$ , si  $z \in \mathbb{H}$ , existen  $g \in SL_2(\mathbb{Z})$  y  $z_0 \in \mathcal{D}$  tal que  $z = gz_0$ . La descomposición anterior implica que también existen  $h \in R$  y  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $g = \gamma h$ . Por tanto,  $z = \gamma h z_0$  y sustituyendo  $z'_0 = h z_0 \in h\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\Gamma$ , obtenemos  $z = \gamma z'_0$ . Esto prueba la primera afirmación.

2. Sólo nos quedaría probar que si  $z$  y  $\gamma z$  pertenecen a  $\mathcal{D}_\Gamma$  para algún  $\gamma \in \Gamma$ , entonces  $\gamma = 1$ . Sea  $\epsilon > 0$  lo suficientemente pequeño para que  $B_\epsilon(z) \subset \mathcal{D}_\Gamma^\circ$ . La bola interseca alguna traslación de  $\mathcal{D}$ :  $B_\epsilon(z) \cap h\mathcal{D} \neq \emptyset$ . Consideramos la bola trasladada  $\gamma B_\epsilon(z) = B_\epsilon(\gamma z)$ . Como  $\gamma z \in \mathcal{D}_\Gamma^\circ$ , deducimos que  $\gamma B_\epsilon(z)$  debe intersecar el interior de otra traslación de  $\mathcal{D}$ :  $\gamma B_\epsilon(z) \cap h'\mathcal{D}^\circ \neq \emptyset \Rightarrow B_\epsilon(z) \cap \gamma^{-1}h'\mathcal{D}^\circ \neq \emptyset$ . Al haber listado todas las traslaciones cuyo interior interseca  $B_\epsilon(z)$ , se cumple  $\gamma^{-1}h' = h$ . Sin embargo,  $\Gamma h' = \Gamma \gamma^{-1}h' = \Gamma h$  y  $h', h \in R$ , por lo que no queda más remedio que  $h'$  sea igual a  $h$ . Por tanto  $\gamma^{-1} = \gamma = 1$ .  $\square$

Esta proposición nos va a servir para dar una prueba de que la figura C.1 es un dominio fundamental para  $\Gamma_0(2)$ . Afirmamos que  $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_{h \in R} \Gamma_0(2)h$  para  $R = \{I, S, ST\}$ . Al multiplicar por elementos del grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$ , el determinante siempre será 1. Nos centramos, por tanto, en el efecto que tiene aplicar  $S$  y  $ST$  en la paridad de los elementos de la matriz.

$$\Gamma_0(2)S = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix} (\text{mód } 2) \wedge \det = 1 \right\}; \Gamma_0(2)ST = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} c-d \equiv 0 (\text{mód } 2) \wedge \det = 1 \right\}.$$

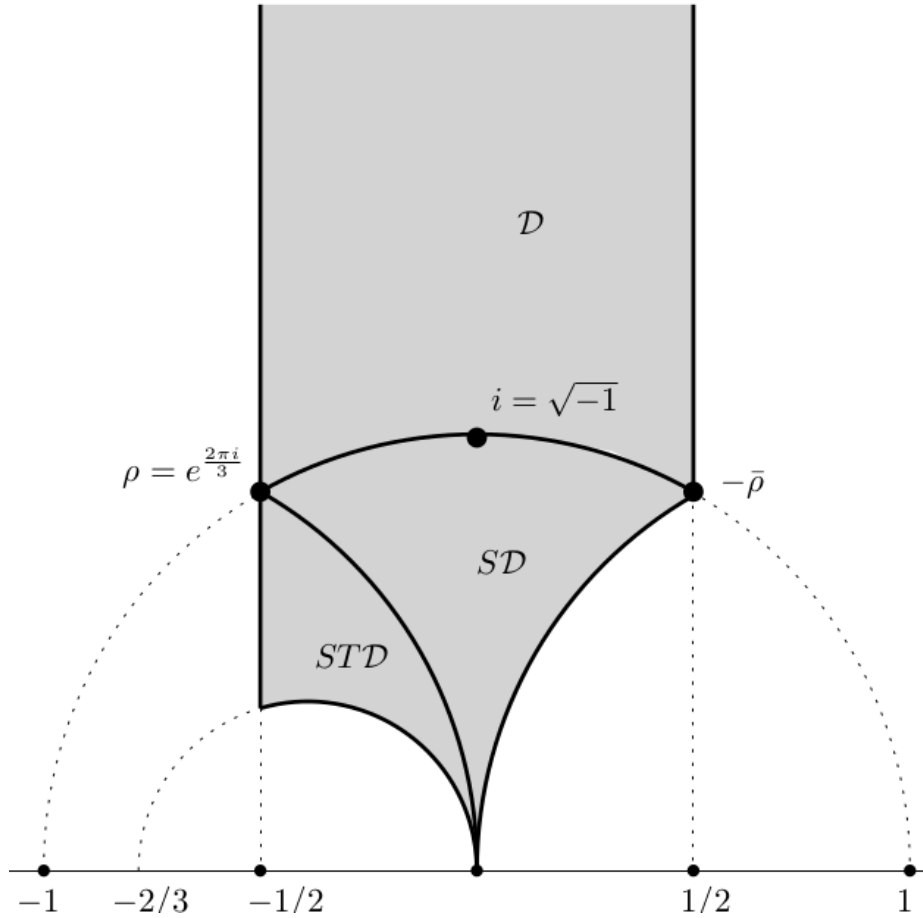


Figura C.1: Dominio fundamental para  $\Gamma_0(2)$ .

Recordando que en  $\Gamma_0(2)$  el elemento de la esquina inferior izquierda tiene que ser par, observamos que se cumplen todas las posibilidades para la paridad de la fila inferior de la matriz. El caso  $c$  par,  $d$  impar está contemplado en  $\Gamma_0(2)$ ; el caso  $c$  impar,  $d$  par en  $\Gamma_0(2)S$ ; y el caso de que ambos tenga la misma paridad está contenido en  $\Gamma_0(2)ST$ . Por tanto, hemos hallado una descomposición como la de la proposición C.1, y sabemos que  $\mathcal{D}_{\Gamma_0(2)} = \mathcal{D} \cup \mathcal{SD} \cup \mathcal{STD}$ . Para dar una idea de cómo se obtiene  $\mathcal{SD}$  a partir de  $\mathcal{D}$ , analizamos dónde se mandan los bordes. El arco inferior se mantiene invariante, la línea vertical izquierda pasa al arco derecho y la derecha al izquierdo. Para el caso de  $\mathcal{STD}$ , imaginemos que trasladamos  $\mathcal{D}$  una unidad hacia la derecha y apliquemos  $S$ . La línea vertical izquierda (que antes era la derecha) va al mismo sitio que antes, el arco pasa a la línea vertical, y la otra línea va al arco restante.

Por otro lado, podemos hallar también la dimensión del espacio vectorial  $V_k(2)$ . En primer lugar, como pasaba con  $SL_2(\mathbb{Z})$ , el género es cero. Pasamos a calcular los puntos elípticos de orden 2 y 3. Sabemos que  $\Gamma_0(2)$  está generado por  $-I, T$  y  $R$ . En el espacio cociente  $-\gamma = \gamma \ \forall \gamma \in \Gamma_0(2)$ . Podemos usar los generadores para saber cuántos puntos fijan los subgrupos de orden 2 y 3.  $T$  tiene orden infinito pero  $R$  tiene orden 2 porque  $R^2 = -I = I$ .

$$Rz = z \Leftrightarrow z - 1 = 2z^2 - z \Leftrightarrow 2z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1/2 \pm i/2.$$

Sin embargo, como  $z \in \mathbb{H}$ , nos quedamos con una solución. Si intentamos buscar subgrupos de orden 3 (por ejemplo hallando  $RT$ ), advertimos que no hay. Por tanto,  $\epsilon_2 = 1$  y  $\epsilon_3 = 0$ .

Afirmamos que  $Cusp(\Gamma_0(2)) = \{\infty, 0\}$ . Hallemos la órbita del infinito para ver qué puntos se quedan fuera.

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_0(2)\infty = \left\{ \frac{a}{2c} : a, c \in \mathbb{Z} \wedge \text{mcd}(a, 2c) = 1 \right\} = \left\{ \frac{r}{s} : 2|s \wedge \text{mcd}(r, s) = 1 \right\}.$$

Al final, aparecen fracciones reducidas y  $0 = 0/1$  no está contenido. Calculemos su órbita:

$$\Gamma_0(2)0 = \left\{ \frac{b}{d} : 2 \nmid d \wedge \text{mcd}(b, d) = 1 \right\}.$$

El hecho de que  $2 \nmid d$  se deriva de lo siguiente:  $|\gamma| = ad - 2bc = 1 \Rightarrow ad = 1 \pmod{2}$ . Como puede comprobarse, estas dos clases de equivalencia cubren  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Sustituyendo en (5.4):

$$\dim(V_k(2)) = (k-1)(0-1) + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor \cdot 0 + k = \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor.$$

## APÉNDICE D

# La ecuación modular

---

En esta parte del trabajo, vamos a enunciar un importante teorema cuya prueba se vale de la ecuación modular, y del que vamos a extraer una aplicación bastante interesante relacionada con lo que se conoce como constante de Ramanujan, aunque fue Charles Hermite quien la introdujo. Para ello necesitamos introducir dos ingredientes.

El primero de ellos tiene que ver con formas cuadráticas. Una forma cuadrática binaria de discriminante  $-D$  se define como un elemento del conjunto  $Q_D = \{ax^2 + bxy + cy^2 : a \in \mathbb{Z}^+, \text{ mcd}(a, b, c) = 1, D = 4ac - b^2\}$ . En nuestro caso, sólo vamos a considerar que  $D$  es positivo. Factorizando  $Q \in Q_D$  en  $\mathbb{C}[x, y]$ , obtenemos:

$$Q = a(x + z_Q y)(x + \bar{z}_Q y) \quad \text{donde} \quad z_Q = \frac{b + i\sqrt{D}}{2a} \in \mathbb{H}.$$

A cada forma  $Q$  vamos a asignarle el valor  $z_Q$  y el retículo generado por  $\{z_Q, 1\}$ . Si consideramos que  $Q$  representa una serie de enteros, representados por  $Q(x_0, y_0)$  para  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ , al realizar un cambio de variable lineal con inversa sobre  $\mathbb{Z}$ ,  $Q \circ \gamma$  representa los mismos enteros. Por la propia definición,  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$  (excluimos el caso de determinante  $-1$ ) y nos permite definir la siguiente relación de equivalencia:  $Q_1 \sim Q_2 \iff$  son iguales salvo un cambio de variable en  $SL_2(\mathbb{Z}) \iff$  los retículos son equivalentes (gracias a la proposición B.1). Sería interesante encontrar un conjunto de representantes de  $Q_D / \sim$ . Usaremos el dominio fundamental de  $SL_2(\mathbb{Z})$ ,  $\Omega = \{z : |z| \geq 1, |\Re z| \leq 1/2\}$ , eliminando parte de la frontera  $\partial = \{z : |z| \geq 1, \Re z = -1/2\} \cup \{z : |z| = 1, -1/2 < \Re z \leq 0\}$ . De este modo,  $\Omega^* = \Omega \setminus \partial = \{z : |z| > 1, -1/2 < \Re z \leq 1/2\} \cup \{z : |z| = 1, 0 \leq \Re z \leq 1/2\}$ .

$$z = \frac{b + i\sqrt{D}}{2a} \in \Omega^* \begin{cases} |z| > 1 \iff (b^2 + 4ac - b^2)/4a^2 = c/a > 1 \iff c > a \\ -1/2 < \Re z \leq 1/2 \iff -1/2 < b/2a \leq 1/2 \iff -a < b \leq a \\ |z| = 1 \wedge 0 \leq \Re z < 1/2 \iff a = c \wedge 0 \leq b \leq a \end{cases}$$

Así,  $\mathcal{H}_D = \{ax^2 + bxy + cy^2 \in Q_D : D = 4ac - b^2 \text{ con } -a < b \leq a < c \text{ ó } 0 \leq b \leq a = c\}$  es el conjunto de representantes que buscábamos. El cardinal de dicho conjunto se simboliza por  $h(-D)$  y se conoce como número de clases.

El segundo ingrediente tiene que ver con las formas modulares. Definimos una función modular como una forma modular de grado 0; es decir,  $f(\gamma z) = f(z)$ , pero

eliminando la restricción de que sea holomorfa en el infinito, y con un desarrollo de Fourier absolutamente convergente de la forma  $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$  para algún  $N$ . Echemos la vista atrás al capítulo 4 para recordar las series de Eisenstein normalizadas. Es fácil de comprobar que  $E_4^3(z) - E_6^2(z)$  es una forma modular de peso 12 y no se anula en  $\mathbb{H}$  (relacionándolo con  $\Delta$  gracias a [AP90, §1.11]). Por tanto, cualquier forma modular del mismo peso dividida entre ella originará una función modular. Vamos a interesarnos en una en particular y a calcular su desarrollo de Fourier usando 4.5.

$$(D.1) \quad j(z) = \frac{1728E_4^3(z)}{E_4^3(z) - E_6^2(z)} = e^{-2\pi i z} + 744 + 196884e^{2\pi i z} + 21493760e^{4\pi i z} + \dots$$

Aplicando el principio del argumento, si  $f$  no es constante, entonces el número de soluciones de  $f(z) = c$  para  $c \in \mathbb{C}$  y  $z \in \Omega^*$  coincide con  $N$  ([AP90, §2.4]). Aplicado a  $j(z)$  y con nuestra notación, deducimos que  $j(z_Q) = j(z_{Q'}) \iff Q \sim Q'$ . Esta función es tan importante porque todas las funciones modulares vienen dadas por polinomios en  $j(z)$ . Para verificarlo, se procede de manera similar a la demostración del teorema 1.2 o a la de la proposición 2.3: vamos reduciendo el valor de  $N$  (mayor orden de un polo) hasta llegar a cierta constante.

Por último, realizamos ciertas observaciones e introducimos la ecuación modular. A partir de aquí usaremos conceptos que aparecen en el último capítulo como los operadores de Hecke y el conjunto  $\mathcal{A}_n = \{\delta_1, \dots, \delta_s\}$  de (6.2), que servirán como base para la explicación. Podemos afirmar que para cualquier  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ , existen  $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in SL_2(\mathbb{Z})$  tal que  $\{\delta_1\gamma, \dots, \delta_s\gamma\} = \{\gamma_1\delta_1, \dots, \gamma_s\delta_s\}$ . Eligiendo un polinomio simétrico  $P$ , observamos que  $P(j(\delta_1 z), \dots, j(\delta_s z))$  es modular ya que al pasar de  $z$  a  $\gamma z$  estamos permutando las funciones  $j(\delta_i z)$ . Lo justificamos:  $j(\delta_1 \gamma z) = j(\gamma_1 \delta_1 z) = j(\delta_1 z)$ . La última igualdad se sigue de que  $j$  es modular y  $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ . Consideramos el polinomio  $\Phi_n(X, j(z)) = \prod_{i=0}^s (X - j(\delta_i z))$ , cuyos coeficientes son modulares por lo que acabamos de ver y además son polinomios en  $j(z)$ . Por tanto, es equivalente a algún polinomio  $\Phi_n(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$  para  $Y = j(z)$ . Nuestro objetivo es probar que los coeficientes de  $\Phi_n$  pertenecen a  $\mathbb{Z}$ , para lo que usaremos el desarrollo de Fourier de  $j(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k e^{2\pi i k z}$  con  $a_k \in \mathbb{Z}$ :

$$(D.2) \quad \Phi_n(X, j(z)) = \prod_{\substack{ad=n \\ 0 \leq b < d}} \left( X - j\left(\frac{az+b}{d}\right) \right) = \prod_{\substack{ad=n \\ 0 \leq b < d}} \left( X - \sum_{k=-1}^{\infty} a_k \xi_d^{bk} e^{2\pi i k a z / d} \right),$$

donde  $\xi_d = e^{2\pi i / d}$  es una raíz  $d$ -ésima de la unidad. Operando un poco, se deduce que los coeficientes son de la forma  $\sum_{k=-N}^{\infty} b_k e^{2\pi i k z / n}$  para cierto  $N$  y  $b_k \in \mathbb{Z}[\xi_d]$ . Analizamos dos hechos claves:

- Los automorfismos  $\xi_d \rightarrow \xi_d^r$  con  $\text{mcd}(r, d) = 1$ , que son todos los de Galois, permutan las series de  $j\left(\frac{az+b}{d}\right)$  y fijan  $b_k$ , por lo que  $b_k \in \mathbb{Z}[\xi_d] \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ .
- Cualquier coeficiente es invariante por la aplicación  $z \rightarrow z + 1$ , por lo que las potencias fraccionarias de  $e^{2\pi i z}$  desaparecen.

Por todo esto, llegamos a la conclusión de que los coeficientes de  $\Phi_n(X, j(z))$  son polinomios en  $j(z)$ , y éstos tienen a su vez coeficientes que son enteros. Por tanto,



$\Phi_n(X, j(z)) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ . Las raíces de  $\Phi_n(X, j(z))$  son  $X = j(\lambda z)$  con  $\lambda \in \Gamma_n$ . Para comprobarlo:

$$\Phi_n(j(\lambda z), j(z)) = \Phi_n(j(\gamma\delta z), j(z)) = \Phi_n(j(\delta z), j(z)) \stackrel{(D.2)}{=} 0.$$

Restringimos ahora el polinomio a la diagonal,  $\Phi_n(X, X) = \Psi_n(X)$ . No nos interesa el caso en el que  $n$  es un cuadrado puesto que  $n = m^2 \Rightarrow \Phi_n(X, X) \equiv 0$ . Los elementos de la forma  $j(z_Q)$  son raíces de  $\Psi_n(X) \iff \exists \lambda \in \Gamma_n \mid \lambda(z_Q) = z_Q$ . Como hemos tenido la precaución de que  $n$  no sea un cuadrado,  $j(z_Q)$  es un entero si  $\Psi_n(X)$  es mónico.

$$\Psi_n(j(z)) = \prod (e^{-2\pi iz} + \dots - e^{-2\pi iaz/d} e^{-2\pi ib/d} + \dots) = c_N e^{-2\pi iNz} + \dots$$

Gracias a los cálculos anteriores, sabemos que  $c_N$  es una raíz de la unidad y es entero porque  $\Psi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ . Por tanto,  $c_N = \pm 1$  y  $\Psi_n(X)$  es mónico salvo un signo. Con todos estos componentes, estamos en condiciones de enunciar el teorema principal de esta sección:

**Teorema D.1.** Sean  $Q_1, \dots, Q_{h(-D)}$  representantes de las clases de  $Q_D$ , entonces el siguiente polinomio, llamado polinomio de clases, tiene coeficientes enteros:

$$P_D(x) = \prod_{k=1}^{h(-D)} (x - j(z_{Q_k})).$$

*Demostración.* Siguiendo [CR10], donde se puede obtener una demostración detallada, procedemos por inducción sobre  $D$ . En los casos bases  $D = 3$  y  $D = 4$ , elegimos  $Q = x^2 + xy + y^2 \in Q_3$  con  $z_Q = (-1 + i\sqrt{3})/2 = \omega$  y  $Q' = x^2 + y^2 \in Q_4$  con  $z'_Q = i$ . Como  $E_6(i) = 0 = E_4(\omega)$ , usando (D.1), deducimos que  $j(i) = 1728$  y  $j(\omega) = 0$ . Por tanto, el teorema se cumple en los casos bases ya que  $h(-D) = 1$  para  $D = 3, 4$ . En el caso general, necesitamos hacer uso del siguiente lema:

$$\text{Sea } Q \in Q_D, \Psi_n(j(z_Q)) = 0 \iff x^2 + Dy^2 = 4n \text{ tiene solución } (x, y) \in \mathbb{Z}^2.$$

La prueba se puede encontrar al final de [CR10, §5]. El impacto de esto es que  $\Psi_n(j(z_Q)) = 0$  se cumple para toda forma de  $Q_D$  o no se cumple para ninguna, ya que el segundo término depende de  $D$  y  $n$  únicamente. Como consecuencia,  $P_D \mid \Psi_n$  en el primer caso, o bien,  $P_D$  y  $\Psi_n$  no tienen factores comunes.

Consideramos  $D > 4$  y suponemos que el teorema se verifica en los casos anteriores. Como  $j(z_Q)$  es raíz de algún  $\Psi_n$ , existe  $P \in \mathbb{Z}[X]$  mónico con sus raíces de esta forma y cumpliendo  $P_D \mid P$ . Si elegimos  $P$  de forma que tenga el grado mínimo, probando que para toda raíz  $j(z_Q)$  de  $P$  existe  $Q \in Q_D$ , deducimos que  $P_D = P$  probando el teorema. Usamos el método de reducción al absurdo sobre la minimalidad de  $P$ , suponiendo que para algún  $j(z_Q)$  la forma cuadrática  $Q$  pertenece a  $Q_{D'}$  y  $D' \neq D$ . Consideramos dos casos:

• Caso  $D' < D$ : por la hipótesis de inducción,  $P_{D'} \in \mathbb{Z}[X]$ , y si consideramos  $\tilde{P} = P/\text{mcd}(P, P_{D'})$ , se tiene  $P_D | \tilde{P}$  lo que lleva a una contradicción.

• Caso  $D' > D$ : se puede probar que existe  $n$  tal que  $x^2 + y^2 D = 4n$  tiene solución pero  $x^2 + D'y^2 = 4n$  no la tiene. Por el lema auxiliar,  $\Psi_n(j(z_Q)) \neq 0$  y  $\tilde{P} = \text{mcd}(P, \Psi_n)$ , llevando a otra contradicción.  $\square$

Después de toda esta teoría, resulta gratificante comprobar que verdaderamente tenga aplicaciones. Gracias a esto, puede entenderse fácilmente por qué la llamada constante de Ramanujan está tan cerca de un entero. Dicha constante es  $e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743,9999999999925007\dots$

Escogemos  $D = 163$  y  $Q = x^2 + xy + 41y^2 \in Q_{163}$  con  $z_Q = (1 + i\sqrt{163})/2$ . Sabiendo que  $h(-163) = 1$ , por el teorema [D.1](#):

$$j(z_Q) = -e^{\pi\sqrt{163}} + 744 - 196884e^{-\pi\sqrt{163}} + \dots \in \mathbb{Z}.$$

Como  $e^{-n\pi\sqrt{163}}$  tiende a 0 rápidamente, los dos primeros términos de la expresión anterior aproximan bastante bien el valor de  $j(z_Q)$ . Usando la tabla con los valores de  $j(z_Q)$  que aparece en [\[CR10, §5\]](#):

$$j(z_Q) = -640320^3 \Rightarrow e^{\pi\sqrt{163}} \approx 744 + 640320^3.$$

# Bibliografía

---

- [AP90] T.M. Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Ber01] B. C. Berndt. An overview of Ramanujan's notebooks. In *Ramanujan: essays and surveys*, volume 22 of *Hist. Math.*, pages 143–164. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [Cha18a] F. Chamizo. Funciones elípticas. [http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/vc1718/f\\_ell.pdf](http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/vc1718/f_ell.pdf), 2018.
- [Cha18b] F. Chamizo. Una identidad de funciones elípticas sin funciones elípticas. [http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/kiosco/files/ell\\_th.pdf](http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/kiosco/files/ell_th.pdf), 2018.
- [Cha18c] F. Chamizo. Convergencia de funciones holomorfas. <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/vc1718/con.pdf>, 2018.
- [Conrad1] K. Conrad. Simultaneous Commutativity of Operators. <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/simulcomm.pdf>
- [Conrad2] K. Conrad. Group  $SL_2(\mathbb{Z})$ . [www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/grouptheory/SL\(2,Z\).pdf](http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/grouptheory/SL(2,Z).pdf)
- [CR10] F. Chamizo and D. Raboso. Formas modulares y números casi enteros. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 13(3):539–555, 2010.
- [DS05] F. Diamond and J. Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [LRM96] B. L. Laptev, B. A. Rozenfel'd, and A. I. Markushevich. *Mathematics of the 19th century*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. Geometry, analytic function theory, With a bibliography by F. A. Medvedev, Edited and with a preface by A. N. Kolmogorov and A. P. Yushkevich, Translated from the 1981 Russian original by Roger Cooke.
- [Law89] D. F. Lawden. *Elliptic functions and applications*, volume 80 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1989.

- 
- [Mar18] K. Martin. Modular forms. <http://www.math.ou.edu/~kmartin/mfs/mfs.pdf>, 2018.
- [Mas15] M. Masdeu. Modular forms (MA4H9). <http://homepages.warwick.ac.uk/~masmat/files/teaching/modforms.pdf>, 2015.
- [Shi94] G. Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, volume 11 of *Publications of the Mathematical Society of Japan*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994. Reprint of the 1971 original, Kanô Memorial Lectures, 1.
- [Vaugh] R. C. Vaughan. Hecke Operators. [www.personal.psu.edu/rcv4/567c10.pdf](http://www.personal.psu.edu/rcv4/567c10.pdf)
- [Zag08] D. Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008.