



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

La fórmula de sumación de Poisson: aplicaciones y generalizaciones.

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Javier Parra Gómez

Tutor: Fernando Chamizo Lorente

Curso 2017-2018

Resumen

La fórmula de sumación de Poisson es una identidad que se prueba de manera muy sencilla en los cursos básicos de análisis de Fourier, sin embargo en ellos no se atisba lo poderosa que resulta en algunos problemas de áreas bien diferentes. El trabajo se estructura en cinco capítulos, el primero es una introducción a la forma clásica de la fórmula de sumación de Poisson con algunos ejemplos, en el segundo se estudia el empaquetamiento de esferas, en el tercero se muestra la estrecha relación e incluso la equivalencia de la fórmula de sumación de Poisson con la ecuación funcional de la función ζ de Riemann, en el cuarto se dan tres aplicaciones en temas bien diversos con pruebas breves de resultados clásicos de Gauss, Minkowski y Shannon. Finalmente en el quinto capítulo se trata la unicidad, este es un tema en el que todavía quedan problemas abiertos. Aquí se prueba un resultado de A. Córdoba y un contraejemplo reciente de Y. Meyer.

Abstract

The Poisson summation formula is an identity that is very easily proved in the basic courses of Fourier analysis, however they don't show how powerful it is in some problems of very different areas. This essay is structured in five chapters, being the first one an introduction to the classic form of the Poisson summation formula with some examples, in the second the sphere packing is studied, the third shows the close relationship and even the equivalence of the Poisson summation formula with the functional equation of the Riemann ζ function, in the fourth three applications are given in very diverse subjects with brief proofs of classic results of Gauss, Minkowski and Shannon. Finally, in the fifth chapter, uniqueness is addressed, a subject in which there are still open problems. Here it is proved a result of A. Córdoba and a recent counterexample of Y. Meyer is given.

Índice general

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introducción y preliminares | 1 |
| 1.1 | La fórmula básica. | 1 |
| 1.2 | Aplicación a algunos ejemplos | 2 |
| 2 | Empaquetamiento de esferas | 7 |
| 2.1 | El problema de empaquetamiento de esferas | 8 |
| 2.2 | Empaquetamiento de esferas con centros en los puntos de un retículo | 11 |
| 3 | La ecuación funcional | 15 |
| 3.1 | La prueba de la ecuación funcional | 15 |
| 3.2 | La prueba con la generalización de Guinand | 18 |
| 3.3 | Equivalencia ecuación funcional-Poisson | 20 |
| 4 | Tres aplicaciones breves | 23 |
| 4.1 | Teorema de Gauss | 23 |
| 4.2 | Teorema de Minkowski | 25 |
| 4.3 | Teorema de Shannon | 26 |
| 5 | Unicidad | 29 |
| 5.1 | Un teorema de A. Córdoba | 30 |
| 5.2 | Un contraejemplo de Y. Meyer | 32 |

CAPÍTULO 1

Introducción y preliminares

1.1. La fórmula básica.

Lo primero que haremos será una presentación de la *Fórmula de sumación de Poisson*. De momento consideraremos nuestras funciones f sin problemas de regularidad, lo que nos permitirá intercambiar las integrales y los sumatorios a nuestro antojo. La forma más habitual de la *Fórmula de sumación de Poisson* es la siguiente:

$$(1.1) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \quad \text{con} \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Como carta de presentación no está mal, pero como matemáticos que somos debemos dar una prueba de este resultado.

Demostración. Definimos la función 1-periódica

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k).$$

Ahora bien, esta F lleva asociada una *serie de Fourier*:

$$(1.2) \quad F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}.$$

Los c_n corresponden a los *coeficientes de Fourier*, podemos sustituirlos por su valor como integral,

$$c_n = \int_0^1 F(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

Si, además, tenemos en cuenta cómo hemos definido F , a partir de (1.2) obtenemos lo siguiente:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t+k) e^{-2\pi i n t} dt \right) e^{2\pi i n x}.$$

Hacemos un cambio de variable, $s-k = t$, teniendo en cuenta que no nos preocupamos, de momento, por la regularidad, nos queda:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{-2\pi int} f(t+k) dt \right) e^{2\pi inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{1-k} e^{-2\pi ins} f(s) ds \right) e^{2\pi inx}.$$

Como el sumatorio es en k y la integral depende de k , podemos cambiar los límites de integración, si además tomamos $x = 0$ resulta que:

$$F(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-2\pi ins} ds, \quad \text{con lo que ya queda probada (1.1)}$$

1.2. Aplicación a algunos ejemplos

Una vez probada la *Fórmula de sumación de Poisson*, veamos algunos resultados que se obtienen a partir de ella. Consideramos la función $f(x) = e^{-2\pi\alpha|x|}$, probaremos que

$$(1.3) \quad \frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}.$$

Veamos ahora lo que corresponde cada miembro de (1.1) para nuestra f .

Primer miembro:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha|n|} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n}.$$

Llamamos S_1 a la primera de las sumas y S_2 a la segunda. Es decir:

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n} \quad \text{y} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n}.$$

Multiplicamos cada una de ellas por $e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}$ y nos queda:

$$S_1 = \frac{e^{\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \quad \text{y} \quad S_2 = \frac{e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}}.$$

Es evidente que si sumamos S_1 y S_2 nos queda el primer miembro de (1.3).

Segundo miembro:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha|t|} e^{-2\pi int} dt.$$

Calculamos primero la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha|t|} e^{-2\pi int} dt = \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\alpha t} e^{-2\pi int} dt + \int_0^{\infty} e^{-2\pi\alpha t} e^{-2\pi int} dt.$$

Llamamos I_1 e I_2 a las integrales de la suma y tenemos:

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 e^{t2\pi(\alpha-in)} dt = \frac{1}{2\pi(\alpha-in)},$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^{-t2\pi(\alpha+in)} dt = \frac{1}{2\pi(\alpha+in)}.$$

Sumando I_1 con I_2 tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha|t|} e^{-2\pi int} dt = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}.$$

Al sustituir el valor de la integral en el sumatorio el término $\frac{\alpha}{\pi}$ sale fuera y queda justo el segundo miembro de (1.3), y ya la tenemos probada, basta usar (1.1).

El siguiente resultado que veremos es la solución de *El Problema de Basilea*, el cual consiste en encontrar la suma exacta de los inversos de los cuadrados de los enteros positivos. Fue resuelto por Euler en 1735 con tan sólo veintiocho años, algo que le hizo alcanzar la fama en el mundo matemático rápidamente.

Ya hemos visto que (1.3) es cierto, vamos a utilizarlo. Nosotros queremos probar:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}.$$

Nosotros partimos de (1.3), en concreto empezamos dividiendo por $\frac{\alpha}{\pi}$ y centrándonos en lo que queda en el miembro de la derecha:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}.$$

Ahora pasamos al otro lado el $\frac{1}{\alpha^2}$ y lo que nos quedaría por probar es que al tomar límite cuando α tiende a 0 se tiene:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\pi}{\alpha} \frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Para ello, utilizaremos aproximaciones de Taylor de orden 3, ya que es el menor orden que hace que no nos quede el valor del límite $\frac{0}{0}$. Por tanto sustituiremos en nuestra expresión con las siguientes aproximaciones: $e^x + e^{-x} \sim 2 + x^2$ y $e^x - e^{-x} \sim 2x + \frac{x^3}{3}$ con $x = \pi\alpha$. Haciendo el cambio resulta que:

$$(1.4) \quad \left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \frac{2 + (\pi\alpha)^2}{2\pi\alpha + \frac{(\pi\alpha)^3}{3}} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2\pi + \pi^3\alpha^2 - 2\pi - \frac{\pi^3\alpha^2}{3}}{\alpha^2(2\pi + \frac{\pi^3\alpha^2}{3})} = \frac{2\pi^3\alpha^2/3}{2\pi\alpha^2 + \pi^3\alpha^4/3}.$$

Basta con simplificar por α^2 y como $\alpha \rightarrow 0$ llegamos a que (1.4) vale $\frac{\pi^2}{3}$, que es justo lo que buscábamos. Se ve que la *Fórmula de sumación de Poisson* nos permite calcular el valor exacto de sumas que, a priori, parecen complicadas.

Otro resultado que se obtiene a partir de ella es el siguiente:

$$(1.5) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{2\alpha}}.$$

En la aplicación de la *Fórmula de sumación de Poisson* aparecerá una integral que calcularemos con una EDO, no es la única forma de hacerlo, pero quizás sí las más cómoda. Además tendremos en cuenta que damos por conocida la integral $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Llamamos

$$y(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx$$

con $f(x) = e^{-2\pi\alpha x^2}$. Para probar (1.5) lo único que tenemos que ver es que:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\pi\xi^2}{2\alpha}}.$$

Obtención de la EDO:

$$y'(\xi) = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2\pi\alpha x^2} e^{-2\pi i\xi x} dx = \frac{i}{2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi\alpha 2x) e^{-2\pi\alpha x^2} e^{-2\pi i\xi x} dx.$$

Resolvemos la integral por partes, tomamos $u = e^{-2\pi i\xi x}$ y $dv = (-2\pi\alpha 2x)e^{-2\pi\alpha x^2}$ y así obtenemos que:

$$y'(\xi) = \frac{-\pi\xi}{\alpha} y(\xi).$$

Además en $\xi = 0$ tenemos que:

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Es fácil ver que la solución a $y'(\xi) + \frac{\pi\xi}{\alpha}y(\xi) = 0$ es:

$$y(\xi) = y(0)e^{-\frac{\pi\xi^2}{2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\pi\xi^2}{2\alpha}} \quad \text{con lo que ya queda probada (1.5).}$$

Hemos visto varios ejemplos donde la *Fórmula de sumación de Poisson* es muy útil. Veamos, por último, una generalización, demostraremos la *fórmula de sumación de Poisson en progresiones aritméticas*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(qn + a) = \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ian/q} \widehat{f}(n/q).$$

Basta aplicar la fórmula original (1.1) a $f(x) = F(qx + a)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(qn + a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(qx + a) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Hacemos el cambio $t = qx + a$ y obtenemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-2\pi i n (\frac{t-a}{q})} \frac{1}{q} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} e^{2\pi i a \frac{n}{q}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-2\pi i \frac{n}{q} t} dt$$

y ya es evidente que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(qn + a) = \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i a \frac{n}{q}} \widehat{F}\left(\frac{n}{q}\right).$$

Hay versiones de la *Fórmula de sumación de Poisson* que piden muy poca regularidad para la f . Consideramos una función f que cumple las siguientes propiedades:

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty$, es decir, $f \in L^1$.
- $2f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) + f(x-h))$. Por supuesto, esto está asegurado si es continua.
- f sea de variación acotada en todo \mathbb{R}

Que f sea de variación acotada quiere decir que tenemos controlados los crecimientos y decrecimientos de la función, es decir, que la variación total, $V_a^b(f)$, es finita. Definimos $V_a^b(f) = \sup_{p \in P} \sum_{i=0}^{p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ con P el conjunto de particiones del intervalo $[a, b]$.

La idea de la prueba es la siguiente. Llamamos v_k a la variación total de f en el intervalo $I_k = (k, k+1)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se tiene que la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ converge absolutamente en algún $x_0 \in I_0$.

Además esa convergencia absoluta es uniforme en I_0 ya que $|f(x+k) - f(x_0+k)| \leq v_k$ para los $x \in I_0$ y, al ser de variación acotada, $\sum_k v_k < \infty$. Digamos que converge a una suma $F(x)$ que definimos como $\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) = F(x)$. Por supuesto, F es de variación acotada y se cumple que $2F(x) = F(x+0) + F(x-0)$. Por tanto, la *Fórmula de sumación de Poisson* es consecuencia directa ya del Teorema 8.1 del libro de [19] (pág 57).

CAPÍTULO 2

Empaquetamiento de esferas

A lo largo de la historia, los matemáticos se han preguntado acerca de la forma óptima de llenar el espacio con esferas de igual tamaño que no se superponen, es lo que se conoce como el *problema de empaquetamiento de esferas*. Se trata de un problema famoso por la dificultad de las pruebas de hechos intuitivamente obvios. Para entendernos mejor, lo que buscamos es dejar el menor espacio posible entre las esferas, por ello, el problema está muy relacionado con el *kissing number o número osculador* $k(d)$, que nos da la cantidad máxima de esferas que son tangentes a otra, todas del mismo tamaño.

El caso en dimensión 2 lo podríamos hacer nosotros en nuestra casa, basta con tener una mesa, unas cuantas monedas del mismo tamaño y jugar con los espacios entre ellas. La mejor ocupación que encontraríamos sería colocando las monedas en forma de flor con 6 pétalos en la que cada moneda es el centro y está rodeada por 6 círculos que la tocan, así llenaríamos el 91%, no está nada mal. En dimensión 3 ya es más complicado, fue en 1611 cuando Johannes Kepler aportó una forma, la configuración de Kepler, partiendo del caso bidimensional y llenando los huecos con tres esferas por arriba y tres por abajo que toquen a la esfera central. Aunque no lo creamos hemos sido testigos de esa colocación, todos hemos ido alguna vez a la frutería a por naranjas.

No fue hasta casi 400 años después cuando el matemático Thomas Hales consiguió dar una prueba de que Kepler estaba en lo cierto. En dimensiones mayores que 3 no conocíamos nada hasta que el 14 de Marzo de 2016, la matemática ucraniana Maryna Viazovska demostró el caso en dimensión 8. Aparte de la importancia del resultado, lo sorprendente reside en que la prueba que aportó Viazovska fue sencilla para lo complicado que es el problema. Cuando decimos sencilla, nos referimos a que fue rápidamente aceptada por el mundo matemático. El ingrediente clave de la prueba es una función especial que refuerza la optimalidad de $E8$, nombre del grupo de Lie simple excepcional más grande, a través de la *Fórmula de sumación de Poisson*. Tener la demostración del caso en dimensión 8 facilitó el caso en dimensión 24, también resuelto por Viazovska junto a Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko y Henry Cohn.

2.1. El problema de empaquetamiento de esferas

Nos preguntamos por el empaquetamiento más denso con bolas congruentes en \mathbb{R}^n . Primero debemos dar una definición precisa de empaquetamiento de esferas. Un *empaquetamiento de esferas*, P , es un subconjunto de \mathbb{R}^n que consiste en bolas congruentes con interiores disjuntos. Definimos la densidad del empaquetamiento de esferas, $\Delta_{\mathbb{R}}^n$, como el supremo de las densidades superiores de empaquetamientos de esferas, entendiendo por densidad superior de P el

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{|B_r^n(0) \cap P|}{|B_r^n(0)|}$$

donde $B_r^n(x)$ denota la bola cerrada de radio r y centro x . Además, hay un teorema de Groemer que asegura que existe un empaquetamiento P para el cual

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{|B_r^n(x) \cap P|}{|B_r^n(x)|} = \Delta_{\mathbb{R}}^n$$

uniformemente para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Así, el supremo de las densidades superiores se alcanza como la densidad de algún empaquetamiento. Hay que decir que el empaquetamiento más denso no es único, hay formas de modificar un empaquetamiento sin cambiar su densidad.

Ahora viene otra pregunta, ¿a qué se debe que nos preocupemos por el problema de empaquetamiento de esferas? Hay varias razones, la primera es que se trata de un problema geométrico. Además, los empaquetamientos de esferas están relacionados con los códigos de corrección de errores para un canal de comunicación continuo. Nosotros, como buenos matemáticos, justificaremos el problema por sus soluciones.

Partiendo de la dimensión 2, ya mencionamos que podemos encontrar un empaquetamiento óptimo para la dimensión 3. Basta con ir apilando las capas que están empaquetadas de manera óptima en la dimensión 2. A pesar de que aquí nos vale, es completamente falso que esto nos sirva en dimensiones superiores, lo que convierte al problema de *empaquetamiento de esferas* en algo muy difícil de resolver debido a que cada dimensión tiene sus características. Entonces, ¿cómo pudo Viazovska resolver el caso en dimensión 8? La técnica que utilizó se basa en *cotas de programación lineal* para el empaquetamiento de esferas en \mathbb{R}^n , algo que fue desarrollado por Cohn y Elkies basado en trabajos previos de muchos matemáticos durante varias décadas.

Las cotas de programación lineal conjugan las técnicas de programación lineal y de análisis armónico para obtener cotas para la densidad y ahí la *fórmula de suma-ción de Poisson* desempeña un papel principal. Usaremos la *transformada de Fourier*, imprescindible para entender la acción de $(\mathbb{R}^n, +)$ en sí mismo por traslación. Lo relacionado con la *fórmula de suma-ción de Poisson* reside en el siguiente teorema, que demostraremos más adelante tras haber visto todos los resultados necesarios.

Teorema 1 (Cohn y Elkies). *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función Schwartz y $r \in \mathbb{R}, r > 0$ tal que $f(0) = \widehat{f}(0) > 0$, $\widehat{f}(y) \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ y $f(x) \leq 0$ para los $|x| \geq r$. Entonces se tiene que:*

$$\Delta_{\mathbb{R}}^n \leq |B_{r/2}^n|.$$

Nos acostumbraremos a trabajar con retículos, lo que facilitará la prueba del teorema. Se dice que Λ es un *retículo* en \mathbb{R}^d si es un conjunto de la forma

$$\Lambda = \{A\vec{n} : \vec{n} \in \mathbb{Z}^d\} \quad \text{con } A \text{ una matriz real } d \times d \text{ no singular.}$$

Las definiciones habituales de "retículo" son más abstractas, pero esta vale para nuestros propósitos. Las columnas de A son vectores que generan un paralelepípedo que se dice que es el *paralelepípedo fundamental* o la *celda fundamental*. Si pensamos en $d = 2$, el paralelepípedo, en este caso paralelogramo, fundamental da una baldosa que cuando la usamos para embaldosar todo \mathbb{R}^2 resulta que los vértices son los elementos de Λ .

Observaremos que distintas matrices nos permiten generar el mismo retículo, lo que nos indica que las matrices A asociadas a un retículo no son únicas y por tanto tampoco lo son los paralelepípedos fundamentales asociados a ellos. Veamos un ejemplo:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El retículo correspondiente a A_1 es:

$$\Lambda_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ a + b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Se puede comprobar que se consiguen los vectores de la base canónica de \mathbb{Z}^2 , además si la segunda columna de A_1 la transformamos mediante $C'_2 = C_1 + C_2$ tenemos la matriz A_2 . De aquí podemos deducir que $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \mathbb{Z}^2$. Ahora no pensemos que todas las matrices generan el mismo retículo. Consideramos la matriz A_3 y su retículo asociado:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Lambda_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 4a + 5b \\ 2a + 2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\},$$

donde es obvio que no podemos conseguir los puntos de segunda coordenada impar, por lo que no es \mathbb{Z}^2 .

Antes de entrar en terrenos de la *fórmula de sumación de Poisson* debemos hablar del retículo dual. Se llama *retículo dual* de Λ al retículo Λ^* que tiene como matriz la inversa traspuesta $(A^{-1})^t$. Podemos deducir que los volúmenes de los paralelepípedos fundamentales de un retículo y su dual son siempre uno inverso del otro, ya que el volumen es justo el determinante de la matriz que genera el retículo y tenemos que

$$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = \frac{1}{|(A^{-1})^t|}.$$

Ahora ya sí, nos metemos de lleno con Poisson y su fórmula. La *fórmula de sumación de Poisson* se cumple con más de una variable en la forma:

$$\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{n}) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\vec{n}) \quad \text{con} \quad \widehat{f}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot \vec{x}} d\vec{x}.$$

donde $\vec{\xi} \cdot \vec{x}$ es el producto escalar de $\vec{\xi}$ y \vec{x} . Por supuesto se necesitan las condiciones de regularidad correspondientes pero aquí no incidiremos en ello porque solo necesitamos un ejemplo donde están aseguradas porque es de la clase de Schwartz. Se cumple además que si $g(\vec{x}) = f(A\vec{x})$, se tiene que $\widehat{g}(\vec{\xi}) = |A|^{-1} \widehat{f}((A^{-1})^t \vec{\xi})$. Veamos la prueba, consideramos

$$\widehat{g}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot \vec{x}} d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^d} f(A\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot \vec{x}} d\vec{x}.$$

Hacemos un cambio de variable $\vec{t} = A\vec{x}$, y nos queda:

$$\widehat{g}(\vec{\xi}) = |A|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{t}) e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot (A^{-1})^t \vec{t}} d\vec{t} = |A|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{t}) e^{-2\pi i (A^{-1})^t \vec{\xi} \cdot \vec{t}} d\vec{t} = |A|^{-1} \widehat{f}((A^{-1})^t \vec{\xi})$$

donde la igualdad intermedia se deduce de las propiedades de matrices, en concreto sabemos que $\langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle = \vec{x}^t \cdot A\vec{y} = (A^t \vec{x})^t \cdot \vec{y}$, tratándolo como un producto de matrices donde sabemos que $(AB)^t = B^t A^t$.

Ahora veamos la generalización d -dimensional en retículos. Gracias a lo que hemos visto justo antes y la *fórmula de sumación de Poisson* podremos demostrar que se cumple:

$$\sum_{\vec{n} \in \Lambda} f(\vec{n}) = |\Lambda|^{-1} \sum_{\vec{n} \in \Lambda^*} \widehat{f}(\vec{n}).$$

Para probarlo, llamemos a cada cosa por su nombre, para los $x \in \mathbb{Z}^d$, $A\vec{x} = \vec{n} \in \Lambda$ y $(A^{-1})^t \vec{x} = \vec{n} \in \Lambda^*$. Ahora la demostración es sencilla, partimos de la *fórmula de sumación de Poisson* para $g(\vec{x})$ y utilizamos lo que sabemos de antes, si $g(\vec{x}) = f(A\vec{x})$, se tiene que $\widehat{g}(\vec{\xi}) = |A|^{-1} \widehat{f}((A^{-1})^t \vec{\xi})$, además $|A| = |\Lambda|$, usamos esas igualdades en la fórmula de sumación de la g y tenemos lo que buscamos.

Veamos una aplicación práctica de esto, recordemos que ya vimos cómo era la transformada de Fourier unidimensional para la función $f(x) = e^{-2\pi\alpha x}$. Ahora la aprovecharemos para obtener la d -dimensional de la función $f(\vec{x}) = e^{-2\pi\alpha \|\vec{x}\|^2}$. Por lo que hemos visto anteriormente sabemos que

$$\sum_{\vec{n} \in \Lambda} e^{-2\pi\alpha \|\vec{n}\|^2} = |\Lambda|^{-1} \sum_{\vec{n} \in \Lambda^*} \widehat{f}(\vec{n}).$$

Veamos cómo calcular la transformada, nosotros sabemos que en el caso 1-dimensional se cumplía que $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\pi n^2}{2\alpha}}$. Con esto vamos a probar que el miembro de la derecha de lo de arriba nos queda:

$$|\Lambda|^{-1} \sum_{\vec{n} \in \Lambda^*} \widehat{f}(\vec{n}) = |\Lambda|^{-1} (2\alpha)^{-d/2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda^*} e^{-\frac{\pi \|\vec{n}\|^2}{2\alpha}}.$$

Basta con ver lo que nos sale al calcular $\widehat{f}(\vec{\xi})$:

$$\widehat{f}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi\alpha \|\vec{x}\|^2} e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot \vec{x}} d\vec{x} = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2\pi\alpha x_d^2} e^{-2\pi i \xi_d x_d} dx_d) dx_{d-1} \dots dx_1 = \prod_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\pi \xi_i^2}{2\alpha}}.$$

Por tanto se tiene:

$$\widehat{f}(\vec{\xi}) = (2\alpha)^{-d/2} e^{-\frac{\pi \|\vec{\xi}\|^2}{2\alpha}}$$

y por consiguiente:

$$\sum_{\vec{n} \in \Lambda} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2} = |\Lambda|^{-1}(2\alpha)^{-d/2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda^*} e^{-\frac{\pi\|\vec{n}\|^2}{2\alpha}}.$$

2.2. Empaquetamiento de esferas con centros en los puntos de un retículo

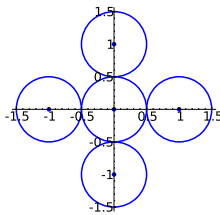
Dado un retículo Λ , llamaremos r_Λ al máximo radio tal que bolas con dicho radio y centros en los elementos de Λ no se solapan, es decir, es la mitad de la mínima distancia entre elementos de Λ . Llamaremos también ℓ_Λ al número de estas bolas que tocan (son tangentes) a la bola en el origen, coincide con el número de puntos cuya norma (distancia al origen) es $2r_\Lambda$. Considerado un empaquetamiento de esferas con centros en un retículo, se llama *lattice kissing number* (*número osculador reticular*) al número $\ell(d)$ que da la cantidad máxima de esferas que pueden ser tangentes a la del origen cuando consideramos todas los posibles retículos de dimensión d . Veamos unos ejemplos para entender bien estas nociones, claramente si estamos en \mathbb{Z}^2 la distancia mínima es mayor o igual que 1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

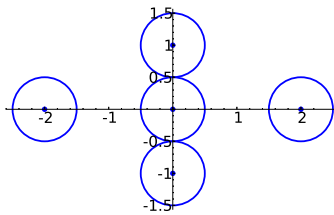
Es obvio que $\Lambda_1 = \mathbb{Z}^2$ por lo que en este caso la $d_{min} = 1$, lo que nos lleva a deducir que $r_\Lambda = \frac{1}{2}$ y $\ell_\Lambda = 4$ que coincide con los 4 puntos (i, j) $i = \pm 1$ $j = 0$ e $i = 0$ $j = \pm 1$. En el caso de Λ_2 ya no se genera todo \mathbb{Z}^2 , sino que los puntos de segunda coordenada impar no están, aquí la $d_{min} = 1$ porque seguimos teniendo puntos como el $(1, 0)$, pero en este caso sólo hay dos de norma 1, y, por tanto, $\ell_\Lambda = 2$. En el caso de Λ_3 podemos encontrar puntos a distancia 2 del $(0, 0)$, como es el caso del $(2, 0)$ ó el $(1, \sqrt{3})$. Veamos que no puede haber puntos a menor distancia. Sabemos que los $(x, y) \in \Lambda_3$ son de la forma $(2m + n, \sqrt{3}n)$ con $m, n \in \mathbb{Z}$. Calculamos su norma al cuadrado, queremos ver si ocurre alguna vez que:

$$4 > \|(2m + n, \sqrt{3}n)\|^2 = (2m + n)^2 + 3n^2.$$

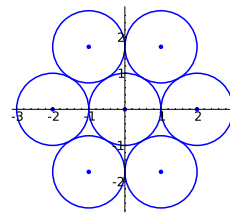
Con $n = 0$ solo vale $m = 0$ y es el punto $(0, 0)$ y con $n = 1$ no existe ningún punto. De aquí podemos deducir fácilmente que $d_{min} = 2$ y podemos encontrar seis puntos a esa distancia del origen lo que nos lleva a $\ell_\Lambda = 6$.



Retículo de A_1



Retículo de A_2



Retículo de A_3

Una pregunta que nos puede venir ahora es que si ocurre que $k(d) = \ell(d)$, entendiendo por $\ell(d)$ el número máximo de esferas que pueden tocarse simultáneamente teniendo sus centros en retículos. Recordemos que $k(d)$ nos da la cantidad máxima de esferas que son tangentes a otra, todas del mismo tamaño. La respuesta es que no, se sabe que en dimensión 9 son diferentes, por tanto, $k(d) \geq \ell(d)$. Además, podemos encontrar un teorema en [17] que nos da una cota para $\ell(d)$.

Teorema 2.

$$\ell(d) \leq \frac{d}{2} e^{d/2+1}.$$

Veamos la prueba, partimos de algo que ya sabemos

$$\sum_{\vec{n} \in \Lambda} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2} = |\Lambda|^{-1} (2\alpha)^{-d/2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda^*} e^{-\frac{\pi\|\vec{n}\|^2}{2\alpha}}.$$

Ahora multiplicamos por $\alpha^{d/2}$, llamamos al miembro de la izquierda $F(\alpha)$ y nos queda:

$$F(\alpha) = \alpha^{d/2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda} e^{-2\pi\alpha\|\vec{x}\|^2} = |\Lambda|^{-1} 2^{-d/2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda^*} e^{-\frac{\pi\|\vec{n}\|^2}{2\alpha}}.$$

Por el miembro de la derecha, si derivamos es fácil ver que $F'(\alpha) > 0$, lo que nos dice que F es creciente. En la izquierda separamos por la norma de los vectores, distinguimos si $\|\vec{n}\|$ es 0,1 ó > 1 . Así tenemos

$$F(\alpha) = \alpha^{d/2} (1 + \ell e^{-2\pi\alpha} + \sum_{\|\vec{n}\|>1} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2}).$$

Derivamos esta expresión y obtenemos

$$0 \leq F'(\alpha) = \frac{d}{2} \alpha^{d/2-1} + \alpha^{d/2-1} \ell e^{-2\pi\alpha} \left(\frac{d}{2} - 2\pi\alpha \right) + \alpha^{d/2-1} \left(\frac{d}{2} \sum_{\|\vec{n}\|>1} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2} - 2\pi\alpha \sum_{\|\vec{n}\|>1} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2} \right).$$

Podemos olvidarnos del último paréntesis si consideramos $\alpha > \frac{d}{4\pi}$ porque sale negativo. Si tomamos exactamente $\alpha = \frac{d+2}{4\pi}$, simplificamos los $\alpha^{d/2-1}$ y sale ya directo que:

$$\ell(d) \leq \frac{d}{2} e^{d/2+1}.$$

Tenemos ya conocimientos suficientes acerca de los retículos como para ver la demostración del teorema de Cohn y Elkies que mencionamos unas páginas atrás. Si indagamos en las cotas obtenidas con métodos de programación lineal nos encontramos que tienen como clave la *fórmula de sumación de Poisson* y su trasladada.

La importancia de la transformada de Fourier en el *empaquetamiento de esferas* es que diagonaliza la traslación mediante vectores, se tiene, a través de la inversión de Fourier, que $f(\vec{x} + \vec{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\vec{y}) e^{2\pi i \vec{t} \cdot \vec{y}} e^{2\pi i \vec{x} \cdot \vec{y}} d\vec{x}$.

La *fórmula de sumación de Poisson* para funciones f Schwartz nos dice que:

$$(2.1) \quad \sum_{\vec{x} \in \Lambda} f(\vec{x}) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\vec{y} \in \Lambda^*} \hat{f}(\vec{y})$$

y en forma trasladada:

$$\sum_{\vec{x} \in \Lambda} f(\vec{x} + \vec{t}) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\vec{y} \in \Lambda^*} \widehat{f}(\vec{y}) e^{2\pi i \vec{y} \cdot \vec{t}}.$$

Tenemos ya todos los ingredientes para demostrar el teorema de Cohn y Elkies. Empezamos demostrando el caso para retículos $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$. Tenemos nuestro $r = r_\Lambda$ y empaquetamos con bolas de radio $r/2$ centradas en los puntos de Λ . Así tenemos que la densidad es $\Delta_{\mathbb{R}}^n = \frac{|B_{r/2}^n|}{|\Lambda|}$. Nuestra cota a probar es $\Delta_{\mathbb{R}}^n \leq |B_{r/2}^n|$, por lo que nos basta ver que $|\Lambda| \geq 1$. Por las restricciones del enunciado:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{x} \in \Lambda} f(\vec{x}) &\leq f(0) \quad \text{ya que } f(\vec{x}) \leq 0 \text{ si } |\vec{x}| \geq r \\ \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\vec{y} \in \Lambda^*} \widehat{f}(\vec{y}) &\geq \frac{\widehat{f(0)}}{|\Lambda|} \quad \text{ya que } \widehat{f}(\vec{y}) \geq 0 \text{ para todo } \vec{y} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Usamos (2.1) y se deduce que $|\Lambda| \geq 1$.

Ahora vemos el caso general, los empaquetamientos periódicos. Consideramos bolas $B_{r/2}^n$ centradas en los puntos trasladados de un retículo Λ por los vectores $\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_N$. Nos salen así N $B_{r/2}^n$ diferentes por cada uno del retículo. Se tiene así que $\Delta_{\mathbb{R}}^n = \frac{N|B_{r/2}^n|}{|\Lambda|}$, por lo que basta con probar que $|\Lambda| \geq N$. Usamos la fórmula trasladada cambiando \vec{t} por $\vec{t}_j - \vec{t}_k$, así tenemos:

$$\sum_{j,k=1}^N \sum_{\vec{x} \in \Lambda} f(\vec{x} + \vec{t}_j - \vec{t}_k) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\vec{y} \in \Lambda^*} \widehat{f}(\vec{y}) \sum_{j,k=1}^N e^{2\pi i \vec{y} \cdot (\vec{t}_j - \vec{t}_k)} = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\vec{y} \in \Lambda^*} \widehat{f}(\vec{y}) \sum_{j=1}^N |e^{2\pi i \vec{y} \cdot \vec{t}_j}|^2.$$

La última igualdad se debe a que $|\sum_{j=1}^N e^{2\pi i \vec{y} \cdot \vec{t}_j}|^2 = \sum_{j=1}^N e^{2\pi i \vec{y} \cdot \vec{t}_j} \sum_{k=1}^N e^{-2\pi i \vec{y} \cdot \vec{t}_k}$. Volvemos a utilizar las desigualdades de f y \widehat{f} , en la izquierda acotamos por arriba sólo con los $j = k$ y $x = 0$ y por la derecha nos quedamos solo con los de $y = 0$, así tenemos

$$Nf(0) \geq \frac{N^2 \widehat{f(0)}}{|\Lambda|}$$

Y eso ya nos lleva a $|\Lambda| \geq N$. Por tanto hemos demostrado ya el teorema y podemos afirmar que la densidad es como mucho $|B_{r/2}^n|$.

CAPÍTULO 3

La ecuación funcional

La función ζ de Riemann es una función de variable compleja que es muy importante para estudiar la distribución de los números primos. La función ζ de Riemann se define como:

$$(3.1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{para } \Re(s) > 0.$$

Gracias a Euler tenemos la siguiente expresión que contiene gran información acerca de los números primos:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad \text{para } \Re(s) > 0.$$

Fue Riemann quien encontró una simetría en torno a la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Lo complicado de esta función reside en la banda que abarca $\Re(s) \in (0, 1)$, la llamada banda crítica. Aquí la función ζ es muy misteriosa, se sabe que ahí vale 0 en muchos puntos. La hipótesis de Riemann, lanzada en 1859 y que se mantiene a día de hoy, nos dice que todos esos puntos donde la ζ se anula están en $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Conocer la posición exacta de los ceros nos aporta información acerca de los primos, por ejemplo, la hipótesis de Riemann es lo que nos permite estimar el número de primos que hay menores que cierto número dado. Nosotros nos centraremos en esa simetría especial, estudiaremos la ecuación funcional.

3.1. La prueba de la ecuación funcional

A pesar de que (3.1) no converge en $\Re(s) < 1$, es posible extender ζ a todo \mathbb{C} a una función meromorfa con un solo polo de orden 1 en $s = 1$. A esto se le llama habitualmente la *continuación analítica* de ζ . Hay una fórmula en [13] que dice:

$$(3.2) \quad \zeta(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} \right) \quad \text{para } \Re(s) > 0.$$

Se ve además que si $\Re(s) > 1$, se tiene la definición original porque $N^{1-s} \rightarrow 0$. Hay una extraña simetría de esta extensión llamada *ecuación funcional* de ζ que se resume en la fórmula

$$(3.3) \quad \Phi(s) = \Phi(1-s) \quad \text{donde} \quad \Phi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s).$$

La prueba de la continuación analítica y de (3.3) la dio Riemann y se puede leer en las páginas 61-62 de [7]. Utiliza la función Γ la cual definimos como:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad \text{para} \quad \Re(s) > 0.$$

En la prueba, Riemann partió de la definición para $\Gamma(\frac{1}{2}s)$, toma un cambio de variable $t = n^2 \pi x$ y se tiene así que:

$$\Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} n^{s-2} (\pi x)^{s/2-1} e^{-n^2 \pi x} n^2 \pi dx.$$

De aquí se deduce que:

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) n^{-s} = \int_0^{\infty} x^{s/2-1} e^{-n^2 \pi x} dx.$$

Así obtuvo que para $\Re(s) > 1$ se tiene:

$$(3.4) \quad \Phi(s) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} dx.$$

Define $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$ y $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$. Es evidente que se cumple que

$$2\omega(x) = \theta(x) - 1.$$

Aprovecha la ω para usarla en (3.4). Separando las integrales entre los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ y haciendo un cambio de x a $1/x$ en el primero de ellos se llega a:

$$(3.5) \quad \Phi(s) = \int_1^{\infty} x^{s/2-1} \omega(x) dx + \int_1^{\infty} x^{-s/2-1} \omega(x^{-1}) dx.$$

Ahora, aprovechamos los resultados obtenidos a través de la *Fórmula de sumación de Poisson*, en concreto, usamos (1.5) para poder afirmar que:

$$(3.6) \quad \theta(x^{-1}) = x^{\frac{1}{2}} \theta(x)$$

De (3.6) se sigue que $\omega(x^{-1}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \omega(x)$. Usamos esto en la segunda integral de (3.5) y tenemos:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} x^{-s/2-1} \omega(x^{-1}) dx &= \int_1^{\infty} x^{-s/2-1} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \omega(x) \right] dx \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \omega(x) dx. \end{aligned}$$

De donde se deduce que para $\Re(s) > 1$

$$(3.7) \quad \Phi(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}})\omega(x) dx.$$

Además, la integral de la derecha converge absolutamente para cualquier s y uniformemente con respecto a s en cualquier conjunto acotado del plano, por tanto $\omega(x) = O(e^{-\pi x})$ cuando $x \rightarrow \infty$. Se tiene que la integral representa una función regular para todo s , tenemos en (3.7) la continuación analítica de ζ y si en la derecha cambiamos s por $1-s$ se tiene la ecuación funcional. En [9] podemos encontrar una traducción de la memoria de Riemann, conservando incluso la notación.

Volvemos a la función Γ . Haciendo una integración por partes se obtiene:

$$(3.8) \quad \Gamma(s) = s^{-1}\Gamma(s+1) \quad \text{para } \Re(s) > 0.$$

De esta manera se puede extender la definición a todos los valores $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Γ se vuelve meromorfa en \mathbb{C} con polos simples en $\mathbb{Z}_{\leq 0}$. Además, una propiedad que utilizaremos y que la podemos encontrar en [1] es que

$$(3.9) \quad \Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}\sqrt{\pi}\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(1-s)\operatorname{sen}(\pi s)}.$$

Con esto deduzcamos el siguiente resultado:

$$(3.10) \quad \frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma((1-s)/2)} = \frac{2\cos(\pi s/2)\Gamma(s)}{2^s\sqrt{\pi}}.$$

Empezamos haciendo un cambio $s \rightarrow 2s+1$, así lo de la izquierda nos queda

$$\frac{\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(-s)}.$$

Usando para el numerador (3.9) y para el denominador (3.8), simplificando se tiene:

$$\frac{-\sin(\pi s)2s\Gamma(2s)}{2^{2s}\sqrt{\pi}} = \frac{-\sin(\pi s)\Gamma(2s+1)}{2^{2s}\sqrt{\pi}}.$$

Deshaciendo el cambio inicial en s y teniendo en cuenta que por las fórmulas de adición sabemos que $\sin(x - \pi/2) = -\cos(x)$ se llega al lado derecho de (3.10). Esto nos permite deducir la forma “asimétrica”

$$(3.11) \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos(\pi s/2)\zeta(s).$$

Veamos cómo se obtiene. Partimos de (3.3) y la definición que dimos ahí para Φ . Se tiene:

$$\frac{\Phi(s)}{\Phi(1-s)} = \frac{\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)}{\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)} = 1.$$

Aprovechando (3.10) y pasando al otro lado $\zeta(1-s)$ se llega a:

$$\zeta(1-s) = \frac{2\cos(\pi s/2)\Gamma(s)}{(2\pi)^s}.$$

Esta no es la única manera de llegar a esta forma “asimétrica”. Veamos ahora cómo llegó Guinand.

3.2. La prueba con la generalización de Guinand

Veamos la prueba que dio Guinand para obtener (3.11), y por tanto, también (3.3) con la siguiente versión de la *Fórmula de sumación de Poisson*, válida incluso para algunas funciones no integrables Lebesgue.

Teorema 3 (Guinand). *Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ se puede escribir como $f(x) = \int_0^x (F_1 + F_2)$ con F_1 y F_2 tales que $\int_0^\infty F_1 = \int_0^\infty F_2 = 0$, $xF_1(x) \in L^p(\mathbb{R}^+)$ para algún $1 < p \leq 2$ y $xF_2(x) \in L^2(\mathbb{R}^+)$, entonces se tiene la siguiente versión de la fórmula de sumación de Poisson:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N f(n) - \int_0^N f(t) dt \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N g(n) - \int_0^N g(t) dt \right)$$

donde $g(x) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(2\pi xt) dt$.

Lo que hace Guinand para probar (3.11) es tomar en su teorema, para un s real $0 < s < 1/2$,

$$F_1(x) = \begin{cases} (s-1)x^{s-2} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ -e^{1-x} & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ (s-1)x^{s-2} + e^{1-x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Así se tiene que $f(x) = x^{s-1}$. Veamos que estamos en las hipótesis del teorema con esta elección de F_1 y F_2 . Comprobamos primero que sus integrales en \mathbb{R}^+ valen 0.

$$\int_0^\infty F_1 = \int_0^1 (s-1)x^{s-2} dx + \int_1^\infty -e^{1-x} dx = 1 - 1 = 0.$$

$$\int_0^\infty F_2 = \int_1^\infty (s-1)x^{s-2} + e^{1-x} dx = -(1-1) = 0.$$

Queremos ver ahora que $xF_1(x) \in L^p(\mathbb{R}^+)$ para algún $1 < p \leq 2$ y $xF_2(x) \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Empezamos con xF_1 . Tomamos $p = \frac{2-s}{2-2s}$ y calculamos:

$$\int_0^\infty |xF_1(x)|^p dx = \int_0^1 |(s-1)x^{s-1}|^p dx + \int_1^\infty |-e^{1-x}x|^p dx.$$

Calculamos las integrales por separado, en la primera simplificamos exponentes usando $p = \frac{s-2}{2(s-1)}$:

$$I_1 = \int_0^1 (1-s)^{\frac{2-s}{2-2s}} x^{\frac{s-2}{2}} dx = (1-s)^{\frac{2-s}{2-2s}} \int_0^1 x^{\frac{s-2}{2}} dx = \frac{2K}{s} < \infty.$$

donde $K = (1-s)^{\frac{2-s}{2-2s}}$

$$I_2 = \int_1^\infty |-xe^{1-x}|^{\frac{2-s}{2-2s}} dx = e^p \int_1^\infty e^{-xp} x^p dx.$$

Haciendo partes dos veces y teniendo en cuenta que $x^{p-2} \leq 1$ en $(1, \infty)$ nos queda:

$$I_2 \leq e^p(c_1 + c_2 + c_3 \int_1^\infty e^{-xp} dx) < \infty$$

donde c_1 , c_2 y c_3 son las constantes que resultan de hacer partes.

Vamos ahora con $x F_2$. Queremos ver que está en $L^2(\mathbb{R}^+)$. Calculamos:

$$\int_0^\infty |x F_2|^2 = \int_1^\infty |(s-1)x^{s-1} + x e^{1-x}|^2 dx = \int_1^\infty [(1-s)x^{s-1} + x e^{1-x}]^2 dx.$$

Desarrollando el cuadrado tenemos:

$$I_1 = \int_1^\infty (1-s)^2 x^{2s-2} dx = \frac{(1-s)^2}{1-2s} < \infty.$$

$$I_2 = 2(1-s) \int_1^\infty x^s e^{1-x} dx \leq 2(1-s)(1+s) \int_1^\infty e^{1-x} dx < \infty$$

El \leq se obtiene después de hacer partes una vez y utilizar que $x^{s-1} \leq 1$ en $(1, \infty)$. Nos queda ver la última:

$$I_3 = \int_1^\infty x^2 e^{2-2x} dx = \frac{5}{4} \quad \text{después de hacer partes dos veces.}$$

Ahora hallamos la g del teorema, para ello utilizaremos la siguiente igualdad bastante conocida y que daremos por supuesta:

$$(3.12) \quad \int_0^\infty t^{s-1} \cos t dt = \cos(\pi s/2) \Gamma(s).$$

Por definición de g tenemos:

$$g(x) = 2 \int_0^\infty t^{s-1} \cos(2\pi x t) dt.$$

Tomamos un cambio $t \mapsto \frac{1}{2\pi x} t$, así $dt \mapsto \frac{1}{2\pi x} dt$ y nos queda:

$$g(x) = \frac{2}{(2\pi x)^s} \int_0^\infty t^{s-1} \cos(t) dt = \frac{2}{(2\pi x)^s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s).$$

Tenemos g y tenemos f , aplicamos el teorema de Guinand. Por un lado se tiene que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N f(n) - \int_0^N f(t) dt \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N n^{s-1} - \frac{N^s}{s} \right) = \zeta(1-s) \quad \text{por (3.2).}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N g(n) - \int_0^N g(t) dt \right) = \frac{2 \cos(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(s)}{(2\pi)^s} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} \right) = \frac{2 \cos(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(s) \zeta(s)}{(2\pi)^s}.$$

Aunque solo hemos probado (3.11) para $0 < s < 1/2$, eso es suficiente porque hay un teorema de variable compleja que dice que si dos funciones meromorfas en \mathbb{C} coinciden en un conjunto con puntos de acumulación, entonces coinciden en todo punto. Así queda probada (3.11), y por tanto, (3.3).

3.3. Equivalencia ecuación funcional-Poisson

Una cosa curiosa es que la ecuación funcional (3.11) implica la fórmula de sumación de Poisson. La prueba original la podemos encontrar en [10]. Nosotros seguiremos una versión que podemos encontrar en <http://www.uam.es/fernando.chamizo/kiosco/files/funcpois.pdf>.

Antes de empezar con ella introduzcamos los ingredientes que tenemos que saber. Lo primero es que ζ tiene un polo simple de orden 1 en $s = 1$ y que $\zeta(0) = -1/2$. Además aplicaremos el teorema de los residuos y la *fórmula de inversión de Mellin*, esta última la presentamos a continuación. Lo que afirma es que para f continua en \mathbb{R}^+

$$(3.13) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)x^{-s} ds \quad \text{donde} \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1} dx.$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un número cualquiera de forma que $F(c - \epsilon)$ exista (que $|f(x)|x^{c-\epsilon-1}$ sea integrable Lebesgue) para algún $\epsilon > 0$. Es una consecuencia más o menos directa de la fórmula de inversión de la transformada de Fourier. Ya tenemos todo, veamos la prueba.

Sabemos que cualquier función f se puede descomponer como suma de una función par y una impar. Probaremos el siguiente resultado en funciones pares $f \in C_0^\infty$ ya que Poisson para las impares es obvio. Queremos ver que:

$$(3.14) \quad \frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(x) dx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}(n)$$

siendo $\tilde{f}(n)$ la transformada coseno $\tilde{f}(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(2\pi\xi x) dx$. Sea F la transformada de Mellin de f , aplicando (3.13) con $x = n$ y sumando en n se tiene que:

$$(3.15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} F(s)\zeta(s) ds$$

donde $\sigma = \Re(s) > 1$. Basta con hacer una integración por partes para ver que $F(s) = -s^{-1} \int_0^{\infty} f'(x)x^s dx$. Por tanto F tiene una extensión meromorfa a $\Re(s) > -1$. Podemos por tanto hacer un cambio en la recta de integración (σ) y tomarla en el intervalo $(-1, 0)$. Hacer este cambio no sale gratis, tenemos que tener en cuenta los polos que hay por el camino, en este caso, en $s = 1$ y $s = 0$. Un simple cálculo de residuos nos permite ver que $\text{Res}(F(s)\zeta(s), 0) = f(0)\zeta(0) = -f(0)/2$, aquí estamos usando que $\zeta(0) = -1/2$, algo que podemos encontrar en [13]. Además $\text{Res}(F(s)\zeta(s), 1) = F(1) = \int_0^{\infty} f$. Teniendo esto en cuenta (3.15) nos queda así:

$$\frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} F(s)\zeta(s) ds$$

con $\sigma \in (-1, 0)$.

Ya lo único que queda por probar entonces es:

$$(3.16) \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} F(s) \zeta(s) ds.$$

Para ello utilizaremos nuestra ecuación (3.11), no podíamos olvidarnos de ella como era de esperar. Denotamos por $C(s)$ a todo lo que acompaña a $2\zeta(s)$ en (3.11). Partimos del segundo miembro de (3.16) y hacemos un cambio $s \rightarrow 1 - s$. Así tenemos:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{(1-\sigma)} F(1-s) \zeta(s) C(s) ds.$$

Como la serie de Dirichlet de ζ converge absolutamente en $1 < 1 - \sigma$ podemos intercambiar el sumatorio de las n en ζ con la integral y nos queda:

$$\frac{1}{\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(1-\sigma)} F(1-s) n^{-s} C(s) ds.$$

Ahora bien, $F(s)$ tiene un polo simple en $s = 0$, entonces $F(1-s)$ tendrá un polo simple en $s = 1$. Como $C(s)$ tiene un cero en $s = 1$ y polo con cero se cancelan, resulta que no hay singularidad. Por lo que $F(1-s)C(s)$ es holomorfa en $\Re(s) \in (0, 2)$. Movemos la recta de integración a $\tau \in (0, 1)$. Así podemos aplicar que $C(s) = \int_0^{\infty} \cos(2\pi x) x^{s-1} dx$ con $s \in (\tau)$ y por tanto se deduce que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} F(s) \zeta(s) ds = \frac{1}{\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(2\pi x) \int_{(\tau)} F(1-s) x^{s-1} n^{-s} ds dx.$$

Tomando un cambio $x \rightarrow nx$ y usando la inversión de Mellin sobre la integral en s eso queda:

$$\frac{1}{\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(2\pi nx) 2\pi i f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(x) \cos(2\pi nx) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}(n).$$

Y así queda demostrado (3.14).

CAPÍTULO 4

Tres aplicaciones breves

Vamos a ver ahora tres teoremas debidos a Gauss, Minkowski y Shannon. Practicaremos con las diferentes formas de la fórmula de sumación de Poisson que hemos visto. En el primer teorema se usa un caso de la versión del libro de Zygmund [19], en el segundo la versión para retículos y en el tercero la usual. Empezamos con ello:

4.1. Teorema de Gauss

El teorema de Gauss está relacionado con la ley de reciprocidad cuadrática. En cualquier curso de teoría de números podemos estudiar el símbolo de Legendre, $\left(\frac{a}{p}\right)$, el cual nos indica si cierto número a es un cuadrado o no módulo p . Aquí entra en juego las sumas de Gauss, consideramos un cuerpo K tal que $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) \subset K$ (basta tomar $K = \mathbb{C}$ por ejemplo). Denotamos la raíz p -ésima de la unidad por $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Entonces la suma de Gauss se define como:

$$G = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{a}{p}\right) \zeta^n = \sum_{n \in R} \zeta^n - \sum_{n \in N} \zeta^n = 1 + 2 \sum_{n \in R} \zeta^n$$

donde R denota los n que son residuos cuadráticos módulo p (distintos de 0), y N los que no. Esto se puede reescribir como:

$$G = \sum_{n=0}^{N-1} \zeta^{n^2}$$

Para evaluar el valor de esta expresión nos vamos ya con Gauss y su teorema.

Teorema 4 (Gauss). *Dado $N \in \mathbb{Z}^+$ se tiene*

$$(4.1) \quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n^2 / N} = \frac{1 + i^{-N}}{1 - i} \sqrt{N}.$$

Demostración. La función $f(x) = e^{2\pi i x^2 / N} \chi_{[0, N]}^*(x)$, donde $\chi_{[a, b]}^*$ indica la función característica de $[a, b]$ con el valor 1/2 en los extremos, está bajo las hipótesis de [19],

p.68] para aplicar la fórmula de sumación de Poisson. Nos detenemos en la que no es obvia, queremos comprobar que:

$$2f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) + f(x-h)).$$

Es fácil ver que $f(0^-) = 0$, $f(0^+) = 1$ y $f(0) = \frac{1}{2}$. En el otro extremo se cumple también, $f(N^-) = 1$, $f(N^+) = 0$ y $f(N) = \frac{1}{2}$. Basta con comprobar sólo esos dos puntos ya que la función es continua en el resto.

Así podemos aplicar la fórmula de sumación de Poisson de [19, p.68]. Por un lado tenemos:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 / N} \chi_{[0, N]}^*(n).$$

Teniendo en cuenta que la función χ se anula fuera del $[0, N]$ y tiene valor $\frac{1}{2}$ en los extremos eso queda

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi i n^2 / N} \chi_{[0, N]}^*(n) + \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n^2 / N} = G_N.$$

Ahora miramos la suma de las transformadas:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{n=0}^N e^{2\pi i (n^2 / N - nx)}.$$

Como la suma es en n podemos cambiar $n \mapsto -n$ y eso queda así:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^N e^{2\pi i (n^2 / N + nx)}.$$

Por tanto de Poisson se deduce que:

$$(4.2) \quad G_N = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^N e^{2\pi i (x^2 / N + nx)} dx$$

donde G_N es la suma en (4.1).

Hacemos el cambio $x \mapsto x\sqrt{N} - nN/2$, $dx \mapsto \sqrt{N}dx$. Calculamos los nuevos límites de integración. Es claro que $x\sqrt{N} - nN/2 = 0$ cuando $x = n\sqrt{N}/2$. Veamos cuando $x\sqrt{N} - nN/2 = N$:

$$x\sqrt{N} = nN/2 + N \implies 2x = n\sqrt{N} + 2\sqrt{N}.$$

Por tanto se tiene que $x = \sqrt{N}/2(n+2)$. Ahora veamos cómo afecta el cambio de variable a la exponencial $e^{2\pi i (x^2 / N + nx)}$. Nos centramos en el $(x^2 / N + nx)$, con el cambio eso pasa a ser:

$$\frac{(x\sqrt{N} - nN/2)^2}{N} + n(x\sqrt{N} - nN/2) = x^2 - \frac{n^2 N}{2}.$$

Así, (4.2) nos queda:

$$\frac{G_N}{\sqrt{N}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi i N n^2 / 2} \int_{n\sqrt{N}/2}^{(n+2)\sqrt{N}/2} e^{2\pi i x^2} dx$$

Separamos la suma en $n = 2k$ y $n = 2k + 1$ y así se tiene

$$\sum_{2|n} + \sum_{2 \nmid n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{k\sqrt{N}}^{(k+1)\sqrt{N}} e^{2\pi i x^2} dx + i^{-N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(k-1/2)\sqrt{N}}^{(k+1/2)\sqrt{N}} e^{2\pi i x^2} dx.$$

donde las constantes de delante de cada sumatorio salen del $e^{-\pi i N n^2 / 2}$ según n sea par o impar. Así tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x^2} dx + i^{-N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x^2} dx.$$

Esto es $1 + i^{-N}$ multiplicado por una constante C dada por una integral. Sabemos que $G_1 = 1$, por tanto dividiendo $G_N/\sqrt{N} = (1 + i^{-N})C$ entre $G_1/\sqrt{1} = (1 + i^{-1})C$, se obtiene:

$$\frac{G_N}{\sqrt{N}} = \frac{1 + i^{-N}}{1 + i^{-1}} = \frac{1 + i^{-N}}{1 - i}.$$

Con lo que ya se tiene (4.1). □

4.2. Teorema de Minkowski

Teorema 5 (Minkowski). *Sea A una matriz real $n \times n$ con $\det(A) \leq 1$, entonces existe $\vec{m} \in \mathbb{Z}^n$ tal que $0 \neq \|A\vec{m}\|_{\infty} \leq 1$.*

Demostración. La función “tienda” $f(x) = \max(1 - |x|, 0)$ cumple $\widehat{f}(0) = 1$, ya que es el área de una función de densidad, y $\widehat{f}(\xi) \geq 0$, por tanto la función de n variables $F(\vec{x}) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n)$ hereda esta propiedad. Por la fórmula de sumación de Poisson para retículos, en este caso para el retículo correspondiente a la matriz A , se tiene

$$\det A \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^n} F(A\vec{m}) \geq \widehat{f}(0) = 1.$$

donde la desigualdad viene de tomar en el dual solamente $\xi = 0$ y usar que $\widehat{f}(\xi) \geq 0$.

Si $\det A < 1$, esto da el resultado porque

$$\sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^n} F(A\vec{m}) > 1$$

y tenemos que $F(\vec{0}) = 1$ y F se anula si alguna coordenada de $A\vec{m}$ es mayor que 1.

Si $\det A = 1$, cambiando A por $A/(1+\epsilon)$ con $\epsilon > 0$, así tenemos que para cada ϵ se tiene un \vec{m}_{ϵ_n} que verifica que $\|A\vec{m}_{\epsilon_n}\|_{\infty} \leq 1 + \epsilon_n$. Se trata de un conjunto compacto el de los $\{\vec{x} : \|A\vec{x}\|_{\infty} \leq \delta\}$. Por tanto, haciendo acto de presencia la topología, toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Definimos $\vec{m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{m}_{\epsilon_n}$. Se deduce que existe $\vec{m} \in \mathbb{Z}^n$ con $0 \neq \|A\vec{m}\|_{\infty} \leq 1 + \epsilon_n$ y permitiendo $\epsilon_n \rightarrow 0$ (haciendo $n \rightarrow \infty$) se obtiene el resultado. \square

4.3. Teorema de Shannon

El teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, también conocido como teorema de muestreo de Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon, es un teorema fundamental de la teoría de la información, de especial interés en las telecomunicaciones. Fue formulado en forma de conjetura por Harry Nyquist en 1928, y fue demostrado formalmente por Claude E. Shannon en 1949. Whittaker y Kotelnikov también consiguieron una prueba del resultado.

El teorema demuestra que la reconstrucción exacta de una señal continua a partir de sus muestras, es matemáticamente posible si la señal es de banda limitada y la tasa de muestreo es superior al doble de su ancho de banda. La información completa de la señal analógica original que cumple el criterio anterior está descrita por la serie total de muestras que resultaron del proceso de muestreo.

Teorema 6 (Shannon). *Sea f una función tal que $\hat{f} \in C^2$ se anula fuera de $[-B, B]$, entonces para cualquier $\nu \geq 2B$ se cumple*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\nu) \operatorname{sinc}(\nu t - n) \quad \text{donde} \quad \operatorname{sinc} x := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

y por continuidad se define $\operatorname{sinc} 0 = 1$.

Demostración. Dado $u \in I = [-\nu/2, \nu/2]$, vamos a aplicar la fórmula de sumación de Poisson a $g(x) = \nu^{-1} f(x/\nu) e^{-2\pi i u x/\nu}$. Por un lado tenemos:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) = \nu^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n/\nu) e^{-2\pi i n u/\nu}.$$

Por otro lado se tiene:

$$\hat{g}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu^{-1} f(x/\nu) e^{-2\pi i u x/\nu} e^{-2\pi i n x} dx.$$

Hacemos un cambio $x \mapsto \nu x$ y eso nos queda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x(u+n\nu)} dx = \hat{f}(u + n\nu).$$

Como teníamos que \widehat{f} se anula fuera de $[-B, B]$ y $\nu \geq 2B$, se ve claro que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(u + n\nu) = f(u)$. Por tanto tenemos que

$$(4.3) \quad \widehat{f}(u) = \nu^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n/\nu) e^{-2\pi i n u / \nu}.$$

Multiplicando por $\chi_I(u) = \chi_{[-1/2, 1/2]}(u/\nu)$ y calculando la transformada inversa de Fourier de ambos miembros se sigue el resultado ya que $\widehat{\chi}_{[-1/2, 1/2]} = \text{sinc}$, y la transformada de una función par coincide con la transformada inversa. Veámoslo:

Empezamos con la prueba de que $\widehat{\chi}_{[-1/2, 1/2]} = \text{sinc}$:

$$\widehat{\chi}_{[-1/2, 1/2]}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1/2, 1/2]}(x) e^{2\pi i x t} dx = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i x t} dx = \frac{2i \operatorname{sen}(\pi t)}{2\pi i t} = \text{sinc } t$$

Multiplicar por $\chi_I(u)$ en el lado izquierdo de (4.3) no cambia nada ya que $\widehat{f} = 0$ fuera de I . Por tanto la transformada inversa de ese lado evidentemente es $f(t)$. Vamos con el lado derecho. Estamos calculando la transformada inversa con respecto a u , por tanto sólo nos interesa calcular la de $e^{-2\pi i n u / \nu} \chi_{[-1/2, 1/2]}(u/\nu)$. Vamos a ello:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n u / \nu} \chi_{[-1/2, 1/2]}(u/\nu) e^{2\pi i t u} du$$

Cambiamos $u \mapsto \nu u$ y nos queda:

$$\nu \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i u (\nu t - n)} \chi_{[-1/2, 1/2]}(u) du = \nu \text{sinc}(\nu t - n).$$

Con esto la transformada del lado derecho de (4.3) es lo que buscábamos. \square

CAPÍTULO 5

Unicidad

Queremos estudiar si cualquier igualdad del tipo

$$(5.1) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(y_n)$$

o incluso del tipo

$$(5.2) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n f(x_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \hat{f}(y_n)$$

se reduce a la fórmula de sumación de Poisson bajo hipótesis naturales. Para evitar problemas de regularidad supondremos que f está en la clase de Schwartz.

Debemos tener precaución con (5.2) al escribir enunciados rigurosos porque por ejemplo se verifica con

$$(5.3) \quad x_n = n, \quad y_n = n/2, \quad a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } 2 \mid n \\ 1 & \text{si } 2 \nmid n \end{cases} \quad \text{y} \quad b_n = \begin{cases} 3/2 & \text{si } 2 \mid n \\ 1/2 & \text{si } 2 \nmid n \end{cases}$$

que no coincide con la fórmula de sumación de Poisson, pero no se considera un contraejemplo de la unicidad porque se deduce de ella de la siguiente forma:

Aplicando la fórmula de sumación de Poisson a $f(x)$ y a $g(x) = f(2x)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n), \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n). \end{aligned}$$

Sumando ambas queremos llegar a que:

$$\sum_{2 \mid n} 2f(n) + \sum_{2 \nmid n} f(n) = \sum_{2 \mid n} \frac{3}{2} \hat{f}\left(\frac{n}{2}\right) + \sum_{2 \nmid n} \frac{1}{2} \hat{f}\left(\frac{n}{2}\right).$$

El lado izquierdo es evidente, sumamos en los pares dos veces y uno en los impares. Vemos el lado derecho, mirando la transformada de g queremos obtener la de f :

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(2x)e^{-2\pi i\frac{\xi}{2}2x} dx = \frac{\widehat{f}(\frac{\xi}{2})}{2}.$$

Por tanto al sumar el lado derecho obtenemos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(\frac{n}{2})}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{3}{2}\widehat{f}(n) + \sum_{2|n} \frac{1}{2}\widehat{f}(\frac{n}{2}) = \sum_{2|n} \frac{3}{2}\widehat{f}(\frac{n}{2}) + \sum_{2\nmid n} \frac{1}{2}\widehat{f}(\frac{n}{2}).$$

Tanto en (5.1) como en (5.2), una hipótesis natural (sobre todo si uno piensa en términos cristalográficos donde los x_n son posiciones de átomos) es que los x_n guarden entre ellos una distancia de separación mínima y lo mismo con los y_n . Matemáticamente

$$(5.4) \quad \inf_{n \neq m} |x_n - x_m| \neq 0 \quad \text{y} \quad \inf_{n \neq m} |y_n - y_m| \neq 0.$$

5.1. Un teorema de A. Córdoba

Encontramos en [6] un resultado que prueba que si se cumple (5.4) la única fórmula del tipo (5.1) es la habitual de Poisson y, también, A. Córdoba avanzó hacia una prueba de algo parecido para (5.2), pero este caso no se ha resuelto hasta recientemente, en [14], donde N. Lev y A. Olevskii probaron que una identidad del tipo (5.2) se obtiene por combinaciones lineales finitas de la fórmula de Poisson escalando o trasladando los enteros. El caso d -dimensional con $d > 1$ es un misterio todavía cuando no se supone cierta positividad de los coeficientes.

Por otro lado, se sabe que hay fórmulas (5.2) que no son de este tipo si uno cambia la condición (5.4) por la condición parecida de que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sean conjuntos discretos, es decir, sin puntos de acumulación. Se trata de una condición más débil, por ejemplo, si elegimos nuestros x_n de la forma $\{\sqrt[5]{n^3 + 1}\}$ para $n \in \mathbb{Z}$, es un conjunto discreto que no verifica (5.4) ya que $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Veamos el resultado básico de unicidad cuando sí se cumple la propiedad de distancia mínima.

Teorema 7 (A. Córdoba). *Si se cumple (5.1) con $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ verificando (5.4) entonces necesariamente $\{x_n\} = \{y_n\} = \mathbb{Z}$ y entonces la única fórmula de este tipo es la habitual de sumación de Poisson.*

Veamos la prueba del caso unidimensional. Tomamos una función que ya vimos en el primer capítulo, $f(x) = e^{-2\pi\alpha x^2}$. Aplicamos (1.5) con x_n e y_n y se tiene:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi\alpha x_n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi y_n^2}{2\alpha}}.$$

Hacemos $\alpha \rightarrow \infty$, si $0 \notin \{x_n\}$ el lado izquierdo es 0 y el derecho no tiene porqué serlo. Por tanto, para que la igualdad anterior tenga sentido es necesario que $x_n = 0$ para algún n . Suponemos que $x_0 = 0$. Llamamos $\mu := d_{\min}(x_k, x_{k+1})$ con $k \in \mathbb{Z}$ y vamos a suponer que se alcanza en $\mu = x_{j_0+1} - x_{j_0}$.

Tomamos ahora la función "tienda de campaña" $\phi(x) = \max(1 - |x|, 0)$, la vimos en el capítulo anterior pero no calculamos su transformada de Fourier, lo haremos ahora porque la vamos a necesitar. Una observación antes de empezar, es claro que ϕ es una función par que no es 0 solamente en $(-1, 1)$. Si nos fijamos bien $e^{-2\pi i \xi x} = \cos(2\pi \xi x) - i \operatorname{sen}(2\pi \xi x)$. Utilizamos que el seno es una función impar y el cálculo de la transformada se reduce a la siguiente integral:

$$\widehat{\phi}(\xi) = 2 \int_0^1 (1-x) \cos(2\pi \xi x) dx.$$

Resolviendo por partes eso nos queda:

$$\widehat{\phi}(\xi) = 2 \left(\frac{1 - \cos(2\pi \xi)}{(2\pi \xi)^2} \right).$$

Utilizando la fórmula del ángulo doble para el coseno se deduce que:

$$\widehat{\phi}(\xi) = \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi \xi)}{\pi \xi} \right)^2.$$

Nos será útil el hecho de que $\widehat{\phi}(0) = 1$ y que $\widehat{\phi} \geq 0$.

Elegimos ahora $f(x) = e^{2\pi i x} \phi\left(\frac{x-x_j}{\mu}\right)$. Si aplicamos (5.1) el primer miembro solo va a tener el término de $x = x_j$ ya que en el resto $|\frac{x-x_j}{\mu}| > 1$ y ϕ se anula. Buscamos la transformada de esta f :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{x-x_j}{\mu}\right) e^{-2\pi i x(\xi-t)} dx.$$

Cambiamos $x \mapsto \mu x + x_j$ y se tiene:

$$\widehat{f}(\xi) = \mu e^{-2\pi i x_j(\xi-t)} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-2\pi i x \mu(\xi-t)} dx = \mu e^{-2\pi i x_j(\xi-t)} \widehat{\phi}(\mu(\xi-t)).$$

Aplicando ahora (5.1) y simplificando los $e^{2\pi i x_j t}$ resulta que:

$$(5.5) \quad 1 = \mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x_j y_n} \widehat{\phi}(\mu(y_n - t)) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Ahora bien, por las propiedades de la $\widehat{\phi}$ esta fórmula tiene sentido comparando los casos $j = 0$ y $j \neq 0$ si $e^{-2\pi i x_j y_n} = 1$. En particular, $x_j y_n \in \mathbb{Z}$, si tomamos $j = j_0 + 1$ y $j = j_0$ y los restamos, obtenemos que $\mu y_n \in \mathbb{Z}$.

Escogemos ahora $t = y_n$ en (5.5), es fácil ver (basta con tomar el caso $j = 0, x_0 = 0$) que $\mu \leq 1$. Ahora integramos (5.5) en $t \in [-1/2, 1/2]$ y seguimos con el $j = 0$ para que no estorbe el término de delante de $\widehat{\phi}$, aprovechamos que $\widehat{\phi}(\mu(y_n - t)) = \widehat{\phi}(\mu(t - y_n))$ y haciendo un cambio de la forma $u = \mu t$, con lo que $dt = \frac{1}{\mu} du$, se llega a que:

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{I_n} \widehat{\phi}$$

siendo $I_n = \left[\mu y_n - \frac{\mu}{2}, \mu y_n + \frac{\mu}{2} \right)$.

Si juntamos que los I_n son disjuntos ($\mu \leq 1$ y $\mu y_n \in \mathbb{Z}$) con que $\int_{I_n} \hat{\phi} = \hat{\phi}(0) = 1$ y encima $\mu \leq 1$ se deduce que $\cup I_n = \mathbb{R}$ y que $\mu = 1$. Esto nos lleva a que $\{\mu y_n\} = \mathbb{Z}$. Ahora volvemos a nuestra fórmula de Poisson (1.1) y, como los $\{y_n\} = \mathbb{Z}$, necesariamente $\{x_n\} = \mathbb{Z}$.

5.2. Un contraejemplo de Y. Meyer

Probado el teorema vamos a buscar un contraejemplo a la unicidad para (5.2) sin (5.4). Este contraejemplo se debe a Y. Meyer [15] y aparte de corresponder a $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ discretos tiene otras propiedades especiales que están en la primera página de [15]. Se trata del resultado que tenemos a continuación:

Teorema 8. *Si f es una función impar, para $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3 - \mathbb{Z}^3$ se cumple*

$$(5.6) \quad \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \frac{e^{2\pi i \vec{\beta} \cdot \vec{n}}}{\|\vec{n} + \vec{\alpha}\|} f(\|\vec{n} + \vec{\alpha}\|) = i e^{-2\pi i \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \frac{e^{-2\pi i \vec{\alpha} \cdot \vec{n}}}{\|\vec{n} + \vec{\beta}\|} \hat{f}(\|\vec{n} + \vec{\beta}\|).$$

Los x_n serían los resultados de hallar $\|\vec{n} + \vec{\alpha}\| = \sqrt{(n_1 + \alpha_1)^2 + (n_2 + \alpha_2)^2 + (n_3 + \alpha_3)^2}$. Para cada $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$ obtendríamos un valor de x_n .

Vamos a comprobar que $C = \{\|\vec{n}\| : \vec{n} \in \mathbb{Z}^3\}$, que serían los $\{x_n\}$ cuando $\vec{\alpha} = \vec{0}$, no cumple (5.4), es decir, $\inf\{|x - y| : x, y \in C, x \neq y\} = 0$, y que C es discreto (no tiene puntos de acumulación). A pesar de que ese valor de $\vec{\alpha}$ no está incluido en el enunciado del teorema nos es útil para ver que no se va a cumplir la propiedad de distancia mínima. El caso $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ es más difícil y no lo veremos aquí.

Cogemos los vectores $\vec{n}_1 = (k, 0, 0)$ $\vec{n}_2 = (k, 1, 0)$ con $k \in \mathbb{N}$. Sus normas asociadas son k y $\sqrt{k^2 + 1}$. Si nosotros tomamos el límite cuando k va a infinito esa diferencia va a 0. Por tanto no se cumple (5.4). Además, nuestro conjunto C está formado por raíces de sumas de enteros al cuadrado, si a eso le añadimos que nosotros simplemente pensamos que si dos \vec{n} dieran el mismo x_n sumaríamos los coeficientes correspondientes, ningún x_n va a ser punto de acumulación ya que siempre hay una distancia entre las raíces de los enteros.

Puede extrañar el hecho de pedir que f sea impar (lo utilizaremos en la prueba). Eso es poco relevante porque una función f impar se puede escribir como $f(x) = g(x) - g(-x)$ con g arbitraria. Con este cambio tendremos una versión de (5.6) para funciones sin restricciones de simetría.

Vamos con la demostración del teorema. Comenzamos definiendo la función de tres variables:

$$g(x, y, z) = e^{2\pi i(\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)} h(x + \alpha_1, y + \alpha_2, z + \alpha_3)$$

donde

$$h(x, y, z) = \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

El primer miembro de (5.6) es $\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} g(\vec{n})$. Ahora bien, teniendo en cuenta que $\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} g(\vec{n}) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} g(-\vec{n})$ y que $i^{-1} = -i$, basta con probar que:

$$(5.7) \quad \widehat{g}(-\vec{n}) = -\frac{e^{-2\pi i \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{n})}}{i \|\vec{n} + \vec{\beta}\|} \widehat{f}(\|\vec{n} + \vec{\beta}\|).$$

Para obtener (5.7) basta demostrar

$$(5.8) \quad \widehat{h}(\vec{\xi}) = -\frac{\widehat{f}(\|\vec{\xi}\|)}{i \|\vec{\xi}\|} \quad \text{para } \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3.$$

La explicación de esta afirmación reside en la relación que existe entre \widehat{g} y \widehat{h} :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\vec{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^3} g(x, y, z) e^{-2\pi i (x, y, z) \vec{\xi}} dx dy dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} h(x + \alpha_1, y + \alpha_2, z + \alpha_3) e^{2\pi i (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)} e^{-2\pi i (x, y, z) \vec{\xi}} dx dy dz. \end{aligned}$$

Cambiamos $x \mapsto x - \alpha_1$, $y \mapsto y - \alpha_2$ y $z \mapsto z - \alpha_3$ y nos queda:

$$\widehat{g}(\vec{\xi}) = e^{2\pi i \vec{\alpha} \cdot (\vec{\xi} - \vec{\beta})} \int_{\mathbb{R}^3} h(x, y, z) e^{-2\pi i (x, y, z) (\vec{\xi} - \vec{\beta})} dx dy dz = e^{2\pi i \vec{\alpha} \cdot (\vec{\xi} - \vec{\beta})} \widehat{h}(\vec{\xi} - \vec{\beta}).$$

Visto esto, si nosotros somos capaces de probar (5.8) eso ya nos lleva directamente a (5.7), así que vamos a ello. Veamos un resultado auxiliar de análisis de Fourier.

Si $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ (que como siempre suponemos de la clase de Schwartz) y A es la matriz de un giro, entonces $G(\vec{x}) = F(A^t \vec{x})$ cumple $\widehat{G}(\vec{\xi}) = \widehat{F}(A\vec{\xi})$.

En realidad esto ya lo vimos en la parte del empaquetamiento de esferas. Recordamos que si nosotros teníamos que $G(\vec{x}) = F(A^t \vec{x})$ se sigue que $\widehat{G}(\vec{\xi}) = |A|^{-1} \widehat{F}((A^{-1})^t \vec{\xi})$. Como las matrices de los giros tiene determinante uno y satisfacen $A^{-1} = A^t$, se tiene el resultado buscado.

Ahora bien, los giros no cambian la norma del vector, como nuestra h depende de la f evaluada en la norma de \vec{x} , se cumple que $h(A^t \vec{x}) = h(\vec{x})$. Podemos suponer perfectamente un giro que nos lleve el vector $\vec{\xi}$ a $A^t \vec{\xi} = (0, 0, \|\vec{\xi}\|)$, por el resultado anterior se tiene que $\widehat{h}(\vec{\xi}) = \widehat{h}(0, 0, \|\vec{\xi}\|)$. Por tanto, nuestro siguiente objetivo es calcular $\widehat{h}(0, 0, \|\vec{\xi}\|)$:

$$\widehat{h}(0, 0, \|\vec{\xi}\|) = \int_{\mathbb{R}^3} h(x, y, z) e^{-2\pi i z \|\vec{\xi}\|} dx dy dz.$$

Usando coordenadas esféricas, $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ y $z = r \cos \theta$ con $\theta \in (0, \pi)$ y $\phi \in [0, 2\pi]$ se tiene:

$$\widehat{h}(0, 0, \|\vec{\xi}\|) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r f(r) e^{-2\pi i r \|\vec{\xi}\| \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi dr.$$

Si integramos en ϕ sale un 2π , y veamos lo que queda cuando integramos en θ :

$$\int_0^\infty \int_0^\pi f(r) 2\pi \sin \theta r e^{-2\pi i r \|\vec{\xi}\| \cos \theta} d\theta dr = \frac{1}{i \|\vec{\xi}\|} \int_0^\infty f(r) (e^{2\pi i r \|\vec{\xi}\|} - e^{-2\pi i r \|\vec{\xi}\|}) dr.$$

Si escribimos $e^{2\pi ir\|\vec{\xi}\|} - e^{-2\pi ir\|\vec{\xi}\|}$ en razones trigonométricas el resultado final es $2i \operatorname{sen}(2\pi r\|\vec{\xi}\|)$, con lo que se llega a que:

$$\widehat{h}(\vec{\xi}) = \widehat{h}(0, 0, \|\vec{\xi}\|) = \frac{2}{\|\vec{\xi}\|} \int_0^\infty f(r) \operatorname{sen}(2\pi r\|\vec{\xi}\|) dr.$$

Si nos fijamos bien, tanto f como sen son funciones impares por lo que $f \operatorname{sen}$ es par. Si además, multiplicamos y dividimos por $-i$ se tiene que:

$$\widehat{h}(\vec{\xi}) = \frac{-1}{i\|\vec{\xi}\|} \int_{-\infty}^\infty f(r) (-i \operatorname{sen}(2\pi r\|\vec{\xi}\|)) dr.$$

Buscamos \widehat{f} , para ello pongamos $e^{-2\pi i\|\vec{\xi}\|r} = \cos(2\pi\|\vec{\xi}\|r) - i \operatorname{sen}(2\pi\|\vec{\xi}\|r)$, integrar f (impar) por \cos (par) en un intervalo simétrico va a dar 0, luego justo la expresión que tenemos encima es la transformada de f y por tanto:

$$\widehat{h}(\vec{\xi}) = \frac{-1}{i\|\vec{\xi}\|} \widehat{f}(\|\vec{\xi}\|).$$

El contraejemplo se debe a que se cumple con esos coeficientes y esas $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ para todas las funciones impares. En realidad como las funciones impares son de la forma $f(x) - f(-x)$ es un contraejemplo para toda f cuando se consideran los $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ con signos positivos y negativos.

Bibliografía

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [2] B. C. Berndt and R. J. Evans. The determination of Gauss sums. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 5(2):107–129, 1981.
- [3] F. Chamizo. Ecuación funcional. <http://www.uam.es/fernando.chamizo/kiosco/files/funcpois.pdf>.
- [4] F. Chamizo and D. Raboso. La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos. *Materials matemàtics*, pages 1–27, 2017.
- [5] H. Cohn. A conceptual breakthrough in sphere packing. *Notices Amer. Math. Soc.*, 64(2):102–115, 2017.
- [6] A. Córdoba. La formule sommatoire de Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 306(8):373–376, 1988.
- [7] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2000. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.
- [8] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Academic Press, New York-London, 1972. Probability and Mathematical Statistics, No. 14.
- [9] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2001. Reprint of the 1974 original [Academic Press, New York; MR0466039 (57 #5922)].
- [10] W. L. Ferrar. Summation formulae and their relation to Dirichlet's series II. *Compositio Math.*, 4:394–405, 1937.
- [11] A. P. Guinand. On Poisson's summation formula. *Ann. of Math. (2)*, 42:591–603, 1941.
- [12] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles.

-
- [13] A. Ivić. *The Riemann zeta-function*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003. Theory and applications, Reprint of the 1985 original [Wiley, New York; MR0792089 (87d:11062)].
- [14] N. Lev and A. Olevskii. Quasicrystals and Poisson's summation formula. *Invent. Math.*, 200(2):585–606, 2015.
- [15] Y. F. Meyer. Measures with locally finite support and spectrum. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 113(12):3152–3158, 2016.
- [16] S. J. Patterson. *An introduction to the theory of the Riemann zeta-function*, volume 14 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [17] N.-P. Skoruppa. Quick asymptotic upper bounds for lattice kissing numbers. *Mathematika*, 49(1-2):51–57 (2004), 2002.
- [18] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.
- [19] A. Zygmund. *Trigonometric series. Vol. I, II*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reprint of the 1979 edition.
- [20] A Breakthrough in Higher Dimensional Spheres. www.youtube.com/watch?v=ciM6wigZK0w, 2016.
- [21] Quadratic gauss sums. <https://faculty.math.illinois.edu/~r-ash/Ant/AntApp.pdf>.
- [22] Quadratic gauss sums. <https://math.stackexchange.com/questions/353109/quadratic-gauss-sums>, 2013.
- [23] Wikipedia. Teorema de muestreo de Nyquist-Shannon — wikipedia, la enciclopedia libre, 2018. [Internet; descargado 20-mayo-2018].