



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Fórmulas de sumación y sus  
aplicaciones

Ignacio Sánchez Herrero

Curso 2025-2026



*A mis tutores, Eva y Fernando, por el inmejorable trato y la atención recibida. A mis padres y hermanos, por hacerme sentir cada día más afortunado. A mis cinco inseparables de la universidad, por haber hecho estos cinco largos años mucho más amenos. Y, finalmente, a Emma, por ser el descubrimiento más bonito de este último año.*



## Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado presenta y analiza diversas fórmulas de sumación fundamentales en matemáticas, poniendo especial énfasis tanto en sus demostraciones como en su aplicación práctica. El objetivo principal es ofrecer una visión unificada y accesible de distintas técnicas de sumación que aparecen en análisis real, análisis complejo y teoría de series. Para cada fórmula se exponen los enunciados formales y se desarrollan ejemplos representativos que ilustran su utilidad. Entre los resultados estudiados se incluyen la sumación por partes, la identidad de Parseval, el teorema de los residuos, la fórmula de Euler–Maclaurin y la fórmula de sumación de Poisson. El trabajo muestra cómo estos métodos permiten aproximar, transformar o evaluar sumas de interés teórico y aplicado, destacando las conexiones entre ellos y su relevancia en distintas áreas de la matemática.

## Abstract

This Final Degree Project presents and analyzes several fundamental summation formulas, with particular emphasis on both their proofs and their practical applications. The main goal is to offer a unified and accessible view of different summation techniques arising in real analysis, complex analysis, and series theory. For each formula, formal statements are provided along with representative examples that illustrate their usefulness. The results discussed include summation by parts, Parseval's identity, the residue theorem, the Euler–Maclaurin formula, and the Poisson summation formula. The work highlights how these methods make it possible to approximate, transform, or evaluate sums of theoretical and applied interest, emphasizing the connections among them and their relevance across various areas of mathematics.



# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Sumación por partes</b>	<b>3</b>
1.1 Un argumento elemental . . . . .	3
1.2 Los resultados de Abel . . . . .	3
1.3 Convergencia uniforme de series de Fourier . . . . .	6
<b>2 La fórmula de Euler-Maclaurin</b>	<b>9</b>
2.1 Preliminares . . . . .	9
2.2 Euler-Maclaurin con series de Fourier . . . . .	10
2.3 Euler-Maclaurin con polinomios de Bernoulli . . . . .	11
2.4 Números y polinomios de Bernoulli . . . . .	13
2.5 La fórmula de Faulhaber . . . . .	14
2.6 Aceleración de series . . . . .	15
<b>3 El teorema de los residuos</b>	<b>17</b>
3.1 Marco teórico del teorema . . . . .	17
3.2 Sumación de series mediante residuos . . . . .	18
3.3 Polinomios $N$ -pares . . . . .	19
3.4 Transformadas integrales y sumas finitas . . . . .	22
<b>4 La identidad de Parseval</b>	<b>25</b>
4.1 Conceptos previos y enunciado . . . . .	25
4.2 Revisitando $\zeta(4)$ . . . . .	25
4.3 Una suma combinatoria . . . . .	26
4.4 Una identidad clásica . . . . .	27
4.5 La desigualdad de Wirtinger . . . . .	29
<b>5 La fórmula de sumación de Poisson</b>	<b>33</b>
5.1 Fundamentos analíticos y geométricos . . . . .	33
5.2 El teorema fundamental en retículos . . . . .	36
5.3 Representación de enteros como suma de cuadrados . . . . .	37
5.4 La proposición de Minkowski . . . . .	38
5.5 El Teorema de Shannon . . . . .	38
<b>A Resultados auxiliares</b>	<b>41</b>
A.1 Análisis de la tercera derivada de $f(x)$ . . . . .	41
A.2 Funciones holomorfas, meromorfas y residuos . . . . .	42
A.3 El cuadrado de la función $\zeta$ . . . . .	43
A.4 La transformada de Fourier . . . . .	44



# Introducción

---

Las fórmulas de sumación constituyen herramientas esenciales en diversas áreas de la matemática, ya que permiten evaluar sumas de manera exacta, aproximarlas con alta precisión o transformarlas en expresiones de naturaleza distinta pero más manejables. Estas técnicas aparecen de forma recurrente en análisis matemático, teoría de series, análisis complejo, teoría de Fourier y numerosos contextos aplicados. Su estudio no solo resulta útil para la resolución de problemas concretos, sino que además revela conexiones profundas entre diferentes ramas de la disciplina.

Siguiendo las directrices de la propuesta, este trabajo se organiza en cinco capítulos, cada uno dedicado a una fórmula de sumación específica. En ellos se presenta el enunciado formal del resultado, acompañado de una demostración rigurosa que permita comprender su alcance y sus limitaciones. Cuando corresponde, se incluyen también variantes o extensiones que enriquecen su marco teórico.

Además de los aspectos puramente formales, se incorporan aplicaciones seleccionadas con el objetivo de ilustrar la potencia y elegancia de estas herramientas. Dichos ejemplos muestran cómo fórmulas como la sumación por partes, la identidad de Parseval, el teorema de los residuos, la fórmula de Euler–Maclaurin o la fórmula de sumación de Poisson permiten abordar problemas que, a primera vista, podrían resultar de difícil acceso.



# CAPÍTULO 1

## Sumación por partes

---

Comenzamos este primer capítulo con la *sumación por partes*, la más sencilla de nuestro estudio, cuyo carácter elemental contrasta con el alcance de sus aplicaciones. El nombre queda justificado por ser una versión discreta de la integración por partes que sustituye integrales por sumas e incrementos por derivadas.

### 1.1. Un argumento elemental

**Teorema 1.1** (Sumación por partes). *Para cualquier par de sucesiones  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  (reales o complejas) se cumple*

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = a_N \sum_{n=1}^N b_n - \sum_{k=1}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) \sum_{n=1}^k b_n \quad \text{para todo } N \in \mathbb{Z}^+.$$

*Demostración.* Definimos las sumas parciales  $B_n := \sum_{k=1}^n b_k$ , con  $B_0 := 0$ . Observamos que  $b_n = B_n - B_{n-1}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n b_n &= \sum_{n=1}^N a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=1}^N a_n B_n - \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_N B_N - \sum_{k=1}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) B_k = a_N \sum_{n=1}^N b_n - \sum_{k=1}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) \sum_{n=1}^k b_n. \end{aligned}$$

□

### 1.2. Los resultados de Abel

Es frecuente aplicar el resultado anterior a sucesiones reales no crecientes, derivando en la, a veces llamada, *desigualdad de Abel* [16, §2.2], término que también designa a su variante compleja.

**Corolario 1.2.** *Si  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_N \geq 0$  y  $b_1, b_2, \dots, b_N \in \mathbb{R}$  entonces para  $N \in \mathbb{Z}^+$*

$$a_1 \min_{1 \leq k \leq N} \sum_{n=1}^k b_n \leq \sum_{n=1}^N b_n a_n \leq a_1 \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{n=1}^k b_n.$$

*Demostración.* Definimos  $B_n$  de la misma manera que en la demostración del Teorema 1.1, y por el mismo tenemos que:

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = a_N B_N + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \quad \forall N \in \mathbb{Z}^+.$$

Llamando  $m = \min_{1 \leq k \leq N} B_k$  y  $M = \max_{1 \leq k \leq N} B_k$ , como  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_N \geq 0$ , tenemos  $a_k - a_{k+1} \geq 0$ , y en consecuencia, podemos afirmar que  $(a_k - a_{k+1}) B_k \leq (a_k - a_{k+1}) M$  y  $(a_k - a_{k+1}) B_k \geq (a_k - a_{k+1}) m$ , obteniendo así:

$$\left( a_N + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) \right) m \leq \sum_{n=1}^N a_n b_n \leq \left( a_N + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) \right) M,$$

y desarrollando el sumatorio entre paréntesis obtenemos

$$a_1 m \leq \sum_{n=1}^N a_n b_n \leq a_1 M,$$

como queríamos probar. □

Existe una variante del Teorema 1.1 con integrales, también asociada a Abel, cuya relevancia en teoría de números es tal que el término “sumación por partes” suele designar específicamente a esta versión en esa área.

**Teorema 1.3** (fórmula de sumación de Abel). *Sea  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión y  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 1})$ , entonces para cualquier  $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$*

$$\sum_{1 \leq n \leq x} c_n \varphi(n) = \varphi(x) \sum_{1 \leq n \leq x} c_n - \int_1^x \varphi'(t) \sum_{1 \leq n \leq t} c_n dt.$$

*Demostración.* Probamos primero el caso para  $x = N \in \mathbb{Z}^+$ . Tomando  $a_n = \varphi(n)$  y  $b_n = c_n$  podemos aplicar el Teorema 1.1 y obtenemos,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N c_n \varphi(n) &= \varphi(N) \sum_{n=1}^N c_n - \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi(k+1) - \varphi(k)) \sum_{n=1}^k c_n \\ &= \varphi(N) \sum_{n=1}^N c_n - \sum_{k=1}^{N-1} \left( \int_k^{k+1} \varphi'(t) dt \right) \sum_{n=1}^k c_n \\ &= \varphi(N) \sum_{n=1}^N c_n - \int_1^N \varphi'(t) \left( \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} c_n \right) dt \\ &= \varphi(N) \sum_{n=1}^N c_n - \int_1^N \varphi'(t) \sum_{1 \leq n \leq t} c_n dt. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Probamos ahora el caso general para  $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ . Para ello, obsérvese que,

$$\int_1^x \varphi'(t) \sum_{1 \leq n \leq t} c_n dt = \underbrace{\int_1^{\lfloor x \rfloor} \varphi'(t) \sum_{1 \leq n \leq t} c_n dt}_{(1)} + \underbrace{\int_{\lfloor x \rfloor}^x \varphi'(t) \sum_{1 \leq n \leq t} c_n dt}_{(2)}.$$

Como  $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}^+$ , por (1.1): (1) =  $\varphi(\lfloor x \rfloor) \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} c_n - \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} c_n \varphi(n)$ . En (2), no se recorre ningún entero nuevo, así que  $\sum_{1 \leq n \leq t} c_n = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} c_n$ . En consecuencia,

$$(2) = \left( \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} c_n \right) \int_{\lfloor x \rfloor}^x \varphi'(t) dt = \left( \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} c_n \right) (\varphi(x) - \varphi(\lfloor x \rfloor)).$$

Sustituyendo (1) y (2) por los resultados que hemos obtenido, cancelando y reorganizando términos, llegamos a la expresión que estábamos buscando.  $\square$

Veamos cómo aplicar este resultado. Para ello, usaremos la *fórmula de Mertens*, un resultado clásico en teoría de números que garantiza la existencia de una constante  $C$  tal que  $|\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} - \log x| < C$  para todo  $x \geq 1$ , donde  $p$  recorre los primos.

**Proposición 1.4.** *Existe una constante  $C' > 0$  tal que, para todo  $x \geq 1$ , se cumple*

$$\left| 2 \sum_{p \leq x} \frac{\log^2 p}{p} - \log^2 x \right| < C' \log x,$$

donde la suma se extiende sobre todos los números primos  $p \leq x$ .

*Demostración.* Tomando  $\varphi(x) = 2 \log x$ ,  $c_n = n^{-1} \log n$  si  $n$  es primo y  $c_n = 0$  si no lo es, por el Teorema 1.3, tenemos que,

$$\sum_{1 \leq n \leq x} c_n \varphi(n) = 2 \sum_{1 \leq p \leq x} \frac{\log^2 p}{p} = 2 \log x \sum_{1 \leq p \leq x} \frac{\log p}{p} - \int_1^x \frac{2}{t} \sum_{1 \leq p \leq t} \frac{\log p}{p} dt.$$

Si definimos  $E(x) := \sum_{1 \leq p \leq x} \frac{\log p}{p} - \log x$ , teniendo en cuenta que  $2 \int_1^x \frac{\log t}{t} dt = \log^2 x$  se tiene que

$$\begin{aligned} 2 \sum_{1 \leq p \leq x} \frac{\log^2 p}{p} - \log^2 x &= 2 \log x \sum_{1 \leq p \leq x} \frac{\log p}{p} - \int_1^x \frac{2}{t} \sum_{1 \leq p \leq t} \frac{\log p}{p} dt - \log^2 x \\ &= 2 \log x (E(x) + \log x) - \int_1^x \frac{2}{t} (E(t) + \log t) dt - \log^2 x \\ &= 2E(x) \log x + 2 \log^2 x - 2 \int_1^x \frac{E(t)}{t} dt - 2 \log^2 x \\ &= 2E(x) \log x - 2 \int_1^x \frac{E(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Tomando valor absoluto en la identidad anterior y al ser  $x \geq 1$ , por la *fórmula de Mertens* llegamos a:

$$\begin{aligned} \left| 2 \sum_{p \leq x} \frac{\log^2 p}{p} - \log^2 x \right| &= \left| 2E(x) \log x - 2 \int_1^x \frac{E(t)}{t} dt \right| \\ &\leq 2|E(x)| \log x + 2 \int_1^x \frac{|E(t)|}{t} dt \\ &\leq 2C \log x + 2 \int_1^x \frac{C}{t} dt = 4C \log x. \end{aligned}$$

Finalmente, eligiendo  $C' = 4C$  tenemos el resultado buscado.  $\square$

### 1.3. Convergencia uniforme de series de Fourier

A continuación, aplicaremos el Teorema 1.1 a las series de Fourier, cuya convergencia suele requerir condiciones de regularidad estrictas sobre sus coeficientes. En este contexto, resulta notable la caracterización exacta de la convergencia uniforme para series de Fourier en senos con coeficientes monótonos positivos, demostrada en [7].

**Teorema 1.5.** *Si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión positiva y decreciente, entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi nx)$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}$  si y solo si  $\lim n a_n = 0$ .*

En la prueba usaremos las conocidas desigualdades (*desigualdad de Jordan* [24])

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x \quad \text{para } x \in [0, \pi/2]. \quad (1.2)$$

La primera se sigue de que  $2x/\pi - \sin x$  es convexa en el intervalo y se anula en los extremos, la segunda se obtiene de que  $x - \sin x$  es creciente y se anula en  $x = 0$ .

*Demostración.* Definimos las sumas parciales como  $S_N(x) := \sum_{n=1}^N a_n \sin(2\pi nx)$ .

Como  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  con la distancia usual es un espacio métrico completo, para estudiar la convergencia uniforme de la serie, basta comprobar que la sucesión  $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$  es uniformemente de Cauchy en  $\mathbb{R}$ . Entonces, el estudio se reduce a comprobar si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall M > N > N_0 \quad \Rightarrow \quad |S_M(x) - S_N(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Debido a la periodicidad de los sumandos, la serie  $S_N(x)$  es 1-periódica, lo que permite restringir su estudio al intervalo  $[0, 1)$ . Además, la imparidad de la función seno implica que  $S_N(x) = -S_N(1-x)$  para todo  $x \in [0, 1]$ , pues:

$$\sin(2\pi nx) = \sin(2\pi n - 2\pi n(1-x)) = \sin(-2\pi n(1-x)) = -\sin(2\pi n(1-x)).$$

De aquí se obtiene la antisimetría respecto a  $x = \frac{1}{2}$ , pero tanto como para este punto como para  $x = 0$  la serie converge y es igual a 0, de manera que podemos restringir el estudio a  $(0, \frac{1}{2})$ , llegando así a la conclusión de que la serie converge para todo  $x \in \mathbb{R}$  si y solo si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall M > N > N_0 \quad \Rightarrow \quad |S_M(x) - S_N(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Por otro lado, de la fórmula del producto de senos, se tiene que

$$2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(2nt) = \cos((2n-1)t) - \cos((2n+1)t).$$

Sumando esta igualdad para  $n = N+1, \dots, M$ , y cancelando los términos intermedios en el sumatorio queda:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} t \sum_{n=N+1}^M \operatorname{sen}(2nt) &= \sum_{n=N+1}^M (\cos((2n-1)t) - \cos((2n+1)t)) \\ &= \cos((2N+1)t) - \cos((2M+1)t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Vamos ahora con la implicación hacia la izquierda. Sabemos, que si  $n a_n \rightarrow 0$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $N_0 \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $n a_n < \varepsilon/4$  para  $n > N_0$ .

Probamos primero la convergencia para  $x \in [\frac{1}{4N_0+4}, \frac{1}{2})$ . Aplicando la desigualdad de Abel (Corolario 1.2), obtenemos

$$|S_M(x) - S_N(x)| \leq a_{N+1} \max_{N+1 \leq k \leq M} \left| \sum_{n=N+1}^k \operatorname{sen}(2\pi n x) \right|.$$

Usando (1.3) y (1.2), obsérvese que

$$\left| \sum_{n=N+1}^k \operatorname{sen}(2n\pi x) \right| = \left| \frac{\cos((2N+1)\pi x) - \cos((2k+1)\pi x)}{2 \operatorname{sen} \pi x} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi x)} \leq \frac{1}{2x}.$$

Sustituyendo esto en la desigualdad anterior, y usando el hecho de que  $x \geq \frac{1}{4N_0+4}$ , y  $M > N > N_0$ ,

$$|S_M(x) - S_N(x)| \leq 2a_{N+1}(N+1) \leq 2\frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Supongamos ahora que  $x \in (0, \frac{1}{4N_0+4})$ . Sabemos que  $g(k) = \frac{1}{4(N_0+k)}$  con  $k \geq 1$ , es estrictamente decreciente. Dado que  $x > 0$ , el conjunto  $\{k \in \mathbb{Z}^+ : g(k) \geq x\}$  no es vacío. Sea  $L := \max\{k \in \mathbb{Z}^+ : g(k) \geq x\}$ , entonces  $g(L) \geq x > g(L+1)$ , lo que implica que

$$\frac{1}{4(N_0+L)} \geq x > \frac{1}{4(N_0+L+1)}. \quad (1.4)$$

De esta manera, podemos escribir

$$|S_M(x) - S_N(x)| \leq \underbrace{\left| \sum_{\substack{N < n \leq M \\ n \leq N_0+L}} a_n \operatorname{sen}(2\pi n x) \right|}_{(1)} + \underbrace{\left| \sum_{\substack{N < n \leq M \\ n > N_0+L}} a_n \operatorname{sen}(2\pi n x) \right|}_{(2)},$$

donde, como es habitual, los sumatorios vacíos se consideran nulos. Usando (1.2), (1.4),  $n a_n < \varepsilon/4$  y que como  $N_0 < N < n < N_0 + L$ , a lo sumo hay  $L$  términos,

$$(1) \leq \sum_{\substack{N < n \leq M \\ n \leq N_0+L}} |a_n \operatorname{sen}(2\pi n x)| \leq \sum_{\substack{N < n \leq M \\ n \leq N_0+L}} \frac{2\pi x \varepsilon}{4} \leq \sum_{\substack{N < n \leq M \\ n \leq N_0+L}} \frac{\pi x \varepsilon}{2} \leq L \cdot \frac{\pi \varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{4(N_0+L)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para el sumatorio (2), procedemos de manera análoga al caso  $x \in [\frac{1}{4N_0+4}, \frac{1}{2})$ . Aplicando la desigualdad de Abel (Corolario 1.2), y usando (1.3), (1.2) y (1.4),

$$(2) \leq a_{N_0+L+1} \frac{1}{2x} \leq a_{N_0+L+1} \frac{4(N_0 + L + 1)}{2} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Concluimos que  $|S_M(x) - S_N(x)| < \epsilon$  para todo  $x \in (0, \frac{1}{2})$ , de manera que la serie converge uniformemente.

Para terminar la prueba del Teorema 1.5, resta probar que si  $na_n \not\rightarrow 0$  entonces la serie no converge uniformemente. Si  $na_n \not\rightarrow 0$ , existe una constante  $c_0 > 0$  y  $M$  arbitrariamente grande tal que  $Ma_M > c_0$ . Vamos a demostrar que la serie no es de Cauchy.

Sabemos que  $|S_M(x) - S_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^M a_n \sin(2\pi nx) \right|$ . Si tomamos  $x = \frac{1}{4M}$  y fijamos  $N = \lfloor M/2 \rfloor$ , se tiene que para  $n \in [N+1, M]$ , entonces  $n \geq M/2$ , lo que implica que  $2\pi nx = \frac{\pi n}{2M} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ , y podemos aplicar (1.2). De esta manera, y teniendo en cuenta que la sucesión  $\{a_n\}$  es decreciente y positiva, se cumple que

$$\begin{aligned} \left| S_M \left( \frac{1}{4M} \right) - S_N \left( \frac{1}{4M} \right) \right| &\geq \sum_{n=N+1}^M a_n \frac{n}{M} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^M a_n \\ &\geq \frac{1}{2} (M - N) a_M \geq \frac{Ma_M}{4} > \frac{c_0}{4}. \end{aligned}$$

En consecuencia, la serie no es de Cauchy, por lo que no converge uniformemente, y la implicación inversa queda demostrada.  $\square$

Vamos a finalizar esta sección con el estudio de la aplicación del Teorema 1.5 a un ejemplo.

**Ejemplo 1.6.** Consideremos la función  $f(x) = \frac{1}{2} - x + \lfloor x \rfloor$ . Como es una función 1-periódica e impar, su serie de Fourier será de la forma  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2\pi nx)$ , cuyos coeficientes  $a_n$  verifican:

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(2\pi nx) dx = 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - x \right) \sin(2\pi nx) dx = \frac{1}{\pi n}.$$

La sucesión que nos queda es claramente positiva y decreciente, por lo que podemos aplicar el Teorema 1.5. Tenemos que  $na_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \neq 0$ , de manera que la serie de Fourier resultante no converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

El propósito del ejemplo ha sido ilustrar el resultado. Se podría haber deducido la falta de convergencia uniforme de que  $f$  no es continua.

## CAPÍTULO 2

# La fórmula de Euler-Maclaurin

---

### 2.1. Preliminares

Esta sección se centra en la fórmula de Euler-Maclaurin, ideada originalmente por Euler para optimizar la aproximación numérica de series [10]. Pese a que existe una deducción elemental [3], optaremos por un enfoque alternativo que permite obtener resultados estrechamente vinculados a este trabajo.

Previamente, conviene recordar que  $\zeta(s)$  denota la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ , de la cual consideraremos únicamente valores de  $s \in \mathbb{N}$  pares. Cabe señalar que, en el estudio de la distribución de los números primos, resulta indispensable tratar a  $\zeta(s)$  como una función de variable compleja, conocida como la *función  $\zeta$  de Riemann*.

Esencialmente la fórmula de Euler-Maclaurin indica cuánto difiere una suma de una integral. Bajo esta premisa, para  $a \leq b$  enteros y una función  $f$  integrable en el intervalo  $[a, b]$ , definimos el error de aproximación como:

$$E(f, a, b) = \sum_{n=a}^b f(n) - \int_a^b f(t) dt - \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Obsérvese que este término coincide, salvo el signo, con el error de la *regla del trapecio* [4, §5.1] cuando el paso es 1.

La fórmula de Euler-Maclaurin se define en función de un parámetro  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . El siguiente ejemplo corresponde al caso  $N = 0$  que es el más elemental y frecuente; tanto es así, que ciertos autores llaman fórmula de Euler-Maclaurin solo a este caso.

**Lema 2.1.** *Para  $a \leq b$  enteros y  $f \in C^1([a, b])$ , entonces*

$$E(f, a, b) = \int_a^b \psi(t) f'(t) dt \quad \text{con} \quad \psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}.$$

*Demostración.* Para cada  $t \in [n, n+1]$ , se observa que  $\psi(t) = t - n - \frac{1}{2}$ , e integrando por partes, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(t) f'(t) dt &= \sum_{n=a}^{b-1} \int_n^{n+1} \psi(t) f'(t) dt = \sum_{n=a}^{b-1} \left( \frac{f(n) + f(n+1)}{2} - \int_n^{n+1} f(t) dt \right) \\ &= \sum_{n=a}^b f(n) - \int_a^b f(t) dt - \frac{f(a) + f(b)}{2} = E(f, a, b). \end{aligned}$$

□

## 2.2. Euler-Maclaurin con series de Fourier

La función  $\psi$  es integrable de periodo 1 y, por tanto, tiene una serie de Fourier. Si nos fijamos en el Ejemplo 1.6 de la sección anterior, tenemos que

$$\psi(x) = - \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}(2\pi n x) \right) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n} \quad \forall x \notin \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

El único propósito del siguiente resultado, que da el caso base de la fórmula, es allanar el camino para probar el Teorema 2.3.

**Lema 2.2.** *Para  $a \leq b$  enteros y  $f \in C^3([a, b])$ , entonces*

$$E(f, a, b) = \frac{\zeta(2)}{2\pi^2} (f'(b) - f'(a)) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{\operatorname{sen}(2\pi n t)}{(2\pi n)^3} f'''(t) dt.$$

*Demostración.* Sustituyendo  $\psi(t)$  por su serie de Fourier en el Lema 2.1, usando la definición de  $\zeta(2)$  e integrando por partes dos veces, obtenemos:

$$\begin{aligned} E(f, a, b) &= \int_a^b -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n} f'(t) dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( -f'(t) \frac{\cos(2\pi n t)}{2\pi n} \Big|_a^b + \int_a^b f''(t) \frac{\cos(2\pi n t)}{2\pi n} dt \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{f'(a) - f'(b)}{2\pi n} - \int_a^b f'''(t) \frac{\operatorname{sen}(2\pi n t)}{(2\pi n)^2} dt \right) \\ &= \frac{\zeta(2)}{2\pi^2} (f'(b) - f'(a)) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{\operatorname{sen}(2\pi n t)}{(2\pi n)^3} f'''(t) dt. \end{aligned}$$

□

Con esto ya tenemos todos los preliminares necesarios para abordar el caso general.

**Teorema 2.3** (Euler-Maclaurin, 1.<sup>a</sup> versión). *Para  $a \leq b$  enteros,  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  y  $f \in C^{2N+1}([a, b])$  se cumple*

$$E(f, a, b) = \sum_{n=1}^N c_n (f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)) + R_N,$$

donde

$$c_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n) \quad y \quad R_N = 2(-1)^{N+1} \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n t)}{(2\pi n)^{2N+1}} f^{(2N+1)}(t) dt.$$

Para  $N = 0$  entendemos (como es habitual) que una suma vacía es nula. Para  $N > 0$  está claro que en  $R_N$  suma e integral se pueden intercambiar por la convergencia uniforme  $\left( \left| \frac{\operatorname{sen}(2\pi n t)}{(2\pi n)^{2N+1}} \right| \leq \frac{1}{(2\pi n)^{2N+1}} \right)$ .

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $N$ . Los casos  $N = 0, 1$  se siguen de los Lemas 2.1 y 2.2. Para comprobar que se cumple para  $N + 1$  asumiendo la hipótesis para  $N$ , basta comprobar que  $R_N = c_{N+1} (f^{(2N+1)}(b) - f^{(2N+1)}(a)) + R_{N+1}$ . Para ello, realizamos una doble integración por partes en  $R_N$ :

$$\begin{aligned} R_N &= 2(-1)^{N+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^{2N+2}} f^{(2N+1)}(t) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^{2N+2}} f^{(2N+2)}(t) dt \right] \\ &= 2(-1)^{N+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{f^{(2N+1)}(a) - f^{(2N+1)}(b)}{(2\pi n)^{2N+2}} - \int_a^b \frac{\sin(2\pi nt)}{(2\pi n)^{2N+3}} f^{(2N+3)}(t) dt \right] \\ &= c_{N+1} \left( f^{(2N+1)}(b) - f^{(2N+1)}(a) \right) + R_{N+1}. \end{aligned}$$

□

### 2.3. Euler-Maclaurin con polinomios de Bernoulli

A continuación, se realiza una transición de métodos analíticos a algebraicos al sustituir las series de Fourier por los *polinomios de Bernoulli*  $B_m(x) \in \mathbb{Q}[x]$ . Este enfoque permite obtener la fórmula de Euler-Maclaurin en su versión más extendida. Una forma constructiva de definir dichos polinomios es mediante la recurrencia:

$$B_{m+1}(x) = (m+1) \int_0^x B_m(t) dt - (m+1) \int_0^1 \int_0^t B_m(u) du dt, \quad \text{con } B_1(x) = x - \frac{1}{2}. \quad (2.2)$$

En términos prácticos, cada polinomio de grado  $m + 1$  se obtiene integrando el anterior y ajustando la constante de integración de modo que la integral de  $B_{m+1}$  en el intervalo  $[0, 1]$  sea nula. Los términos independientes  $b_m = B_m(0)$  se denominan *números de Bernoulli*.

Para ilustrar este proceso, se presenta el siguiente código en MATLAB, que calcula los coeficientes de los primeros cinco y sus respectivos números de Bernoulli:

Listing 2.1: Cálculo de polinomios y números de Bernoulli.

```

1 B = {[1, -1/2]}; M = 5;
2
3 for m = 1:M-1
4     Pint = polyint(B{m});
5     Pint2 = polyint(Pint);
6
7     B{m+1} = (m+1) * Pint;
8     B{m+1}(end) = B{m+1}(end) - (m+1) * (polyval(Pint2,1) -
9         polyval(Pint2,0));
10
11 fprintf('Polinomios y números de Bernoulli (1 ≤ m ≤ %d): \n\n',
12     M);
13 for m = 1:M
14     fprintf('B_%d(x) = [%s]\n', m, num2str(B{m}, '%g'));
15     fprintf('b_%d = %g\n\n', m, polyval(B{m},0));
16 end

```

```

Polinomios y numeros de Bernoulli (1 <= m <= 5):

B_1(x) = [1 -0.5]
  b_1 = -0.5

B_2(x) = [1          -1 0.166667]
  b_2 = 0.166667

B_3(x) = [1          -1.5          0.5 -4.16334e-17]
  b_3 = -4.16334e-17

B_4(x) = [1          -2          1 -1.66533e-16  -0.0333333]
  b_4 = -0.0333333

B_5(x) = [1          -2.5          1.66667 -4.16334e-16  -0.166667          0]
  b_5 = 0

```

Figura 2.1: Salida del programa anterior.

Una vez ejecutado, nos dará una salida como la que muestra la Figura 2.1. Una curiosidad es que, en contra de lo que sugieren los primeros valores, a la larga los números de Bernoulli de índice par tienen un crecimiento muy rápido. Por ejemplo, la parte entera de  $b_{200}$  tiene más de 200 cifras. Por otro lado, veremos más adelante que los de índice impar son todos nulos excepto  $b_1$ .

Así, la expresión se aproxima a la versión original de Euler y Maclaurin, quienes omitieron en su análisis el término integral del error [15].

Previo al teorema, veamos un lema que nos será de gran ayuda en su demostración:

**Lema 2.4.** Para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$  y  $x \in [0, 1]$  se tiene

$$\frac{(-1)^{k+1} B_{2k}(x)}{2(2k)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{(2\pi n)^{2k}} \quad y \quad \frac{(-1)^{k+1} B_{2k+1}(x)}{2(2k+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi nx)}{(2\pi n)^{2k+1}}.$$

*Demostración.* Lo demostramos por inducción, basándonos en la recursión definida en 2.2. Para  $x \in [0, 1]$ ,  $B_1(x) = \psi(x)$ , entonces, usando (2.1), es fácil ver que se cumple el caso base para el caso par,  $B_2$ , y para el impar,  $B_3$ . Una vez comprobada la hipótesis para los casos base  $n = 2$  y  $n = 3$ , supongamos que el resultado es cierto para cierto  $K \in \mathbb{N}$  y veamos que entonces también lo es para  $K + 1$ .

Asumimos primero que el caso base es par:

$$\begin{aligned} B_{2k+1}(x) &= (2k+1)!(-1)^{k+1} 2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos(2\pi nt)}{(2\pi n)^{2k}} dt - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^t \frac{\cos(2\pi nu)}{(2\pi n)^{2k}} dudt}_0 \right) \\ &= (2k+1)!(-1)^{k+1} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi nx)}{(2\pi n)^{2k+1}}. \end{aligned}$$

Si asumimos que el caso base es impar, se obtiene la expresión par con un argumento similar al caso anterior.  $\square$

A partir estas igualdades, vamos a deducir ahora una nueva versión del Teorema 2.3.

**Teorema 2.5** (Euler-Maclaurin, 2.<sup>a</sup> versión). Para  $a \leq b$  enteros,  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  y  $f \in C^{2N+1}([a, b])$  se cumple

$$E(f, a, b) = \sum_{n=1}^N \frac{b_{2n}}{(2n)!} (f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)) + \int_a^b B_{2N+1}(t - [t]) \frac{f^{(2N+1)}(t)}{(2N+1)!} dt.$$

La equivalencia entre ambas versiones depende de la relación entre los polinomios de Bernoulli y ciertas series de Fourier.

*Demostración.* Evaluando la primera igualdad del Lema 2.4 en  $x = 0$  obtenemos:

$$\frac{(-1)^{k+1} b_{2k}}{2(2k)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{2k}} = \frac{\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}} \implies \zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}, \quad (2.3)$$

y sustituyendo en la expresión de  $c_n$  del Teorema 2.3, obtenemos  $c_n = \frac{b_{2n}}{(2n)!}$ .

Dado que la suma en  $R_N$  se evalúa en  $t$  arbitrario, podemos escribir la segunda igualdad del Lema 2.4 de la siguiente manera:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi nt)}{(2\pi n)^{2N+1}} = \frac{(-1)^{N+1} B_{2N+1}(t - [t])}{2(2N+1)!} \quad \text{para } t \in \mathbb{R},$$

y al sustituirla en la fórmula de  $R_N$  queda

$$\begin{aligned} R_N &= 2(-1)^{N+1} \int_a^b \left( \frac{(-1)^{N+1}}{2(2N+1)!} B_{2N+1}(t - [t]) \right) f^{(2N+1)}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{B_{2N+1}(t - [t])}{(2N+1)!} f^{(2N+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Reemplazando las expresiones de  $c_n$  y  $R_N$  en el Teorema 2.3, obtenemos exactamente la nueva versión del teorema.  $\square$

Tras haber consolidado el marco teórico de la fórmula de Euler-Maclaurin, procedemos ahora a explorar algunas de sus aplicaciones.

## 2.4. Números y polinomios de Bernoulli

Esta aplicación es, en realidad, un subproducto de la demostración anterior más que de la fórmula en sí. Recordamos que el problema de Basilea, resuelto por Euler, consiste en la identidad  $\zeta(2) = \pi^2/6$ . A partir de los resultados obtenidos, tenemos una fórmula general para  $\zeta(2n)$ , la identidad (2.3). Por el contrario, no se conocen fórmulas similares para  $\zeta(2n+1)$ .

**Proposición 2.6.** Sea  $m \geq 1$ , entonces

$$B_m(1/2) = (2^{1-m} - 1)b_m.$$

*Demostración.* Por la definición de  $B_1(x)$  dada en (2.2), está claro que  $B_1(1/2) = 0$ . Para el caso general usamos las identidades del Lema 2.4. Para el caso impar mayor que uno, debido a que  $\sin(n\pi) = 0$ , se tiene que  $B_{2k+1}(1/2) = 0$  y, por otro lado,  $b_{2k+1} = B_{2k+1}(0) = 0$ . Veamos ahora que se cumple para el caso par.

De la identidad obtenida en (2.3), se deduce directamente que  $\zeta(2k)$  es un múltiplo racional de  $\pi^{2k}$ . Además, es fácil encontrar una relación entre  $\zeta(2k)$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-2k}$ .

Sabemos que las dos series definidas convergen absolutamente. En consecuencia, podemos manipularlas término a término. Separamos la serie  $\zeta(2k)$  en términos impares y pares:

$$\zeta(2k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^{2k}} + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^{2k}}}_{2^{-2k}\zeta(2k)} \implies \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^{2k}} = (1 - 2^{-2k})\zeta(2k).$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k}} = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^{2k}}}_{2^{-2k}\zeta(2k)} - \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^{2k}}}_{(1-2^{-2k})\zeta(2k)} = (2^{1-2k} - 1)\zeta(2k). \quad (2.4)$$

De estos resultados, veamos que es fácil deducir la fórmula para  $B_m(1/2)$  con  $m = 2k$ . Usando (2.4), se obtiene:

$$\frac{(-1)^{k+1} B_{2k}(1/2)}{2(2k)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\pi n)^{2k}} = \frac{(2^{1-2k} - 1)\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}.$$

Combinando esto con la identidad (2.3), se tiene que  $B_{2k}(1/2) = (2^{1-2k} - 1)b_{2k}$ .  $\square$

## 2.5. La fórmula de Faulhaber

Recordemos las expresiones clásicas para las sumas de potencias enteras, tales como  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  y  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ . Si bien estas identidades son elementales y su demostración suele abordarse mediante el principio de inducción en cursos introductorios, surge de manera natural el interrogante sobre el comportamiento de estas sumas para potencias de orden superior.

**Proposición 2.7** (Fórmula de Faulhaber). *Para cualesquiera  $n, m \in \mathbb{Z}^+$  se tiene que:*

$$\sum_{k=1}^n k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{b_{2k}}{2k} \binom{m}{2k-1} n^{m-2k+1}.$$

*Demostración.* Eligiendo  $a = 0$ ,  $b = n$  y  $f(x) = x^m$ , y usando el Teorema 2.5, tenemos para  $N = 0$ :

$$E(f, 0, n) = \sum_{k=0}^n f(k) - \int_0^n f(t) dt - \frac{f(0) + f(n)}{2},$$

y para  $N = \lfloor m/2 \rfloor$ :

$$E(f, 0, n) = \sum_{k=1}^N \frac{b_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)) + \int_0^n B_{2N+1}(t - \lfloor t \rfloor) \frac{f^{(2N+1)}(t)}{(2N+1)!} dt.$$

Como  $f^{(2N+1)}(x) = 0$  para  $m$  par y  $f^{(2N+1)}(x) = m!$  para  $m$  impar, entonces  $\int_0^n B_{2N+1}(t - \lfloor t \rfloor) \frac{f^{(2N+1)}(t)}{(2N+1)!} dt = 0$ . Además,  $f(0) = 0$  y  $f(n) = n^m$ , de manera que, igualando las dos identidades anteriores y despejando términos, obtenemos:

$$\sum_{k=1}^n k^m = \int_0^n t^m dt + \frac{n^m}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{b_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)).$$

Usando que  $f^{(2k-1)}(x) = \frac{m!}{(m-2k+1)!} x^{m-2k+1} = (2k-1)! \binom{m}{2k-1} x^{m-2k+1}$ , llegamos a la *fórmula de Faulhaber*.  $\square$

Para  $m = 5$  se tiene  $\lfloor m/2 \rfloor = 2$  y los números de Bernoulli necesarios son  $b_2 = \frac{1}{6}$  y  $b_4 = -\frac{1}{30}$ . Sustituyendo entonces en la fórmula de Faulhaber obtenemos:

$$\sum_{k=1}^n k^5 = \frac{2n^6 + 6n^5}{12} + \frac{b_2}{2} \binom{5}{1} n^4 + \frac{b_4}{4} \binom{5}{3} n^2 = \frac{n^2 (2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1)}{12}.$$

## 2.6. Aceleración de series

Esta última aplicación va en la línea de lo que tenía en mente Euler al crear la fórmula. Por motivos prácticos (todas las cuentas se hacían a mano), quiso diseñar un método para acelerar la convergencia de las series y que se va a ilustrar mediante el siguiente ejemplo.

Supongamos que queremos aproximar el valor de la serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{donde} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Una posibilidad es tomar una suma parcial. Por ejemplo  $S_{10}$ , la suma de los diez primeros términos, que sería asequible con una calculadora (o con la habilidad numérica de Euler). Se cumple

$$S - S_{10} = \sum_{n=11}^{\infty} f(n) > \int_{11}^{\infty} f(t) dt = 0,0906 \dots,$$

de modo que el error es mayor que 9 centésimas. Veamos como reducirlo drásticamente.

Elegimos  $a = 11$  y  $b = B$ , y combinamos, igual que antes, el Teorema 2.3 para  $N = 0$  ( $a \leq b$  enteros) y para  $N = 1$ , obteniendo así:

$$\sum_{n=11}^B f(n) = \int_{11}^B f(t) dt + \frac{f(11) + f(B)}{2} + \frac{\zeta(2)}{2\pi^2} (f'(B) - f'(11)) + R_1.$$

Pasando al límite,  $B \rightarrow \infty$ , teniendo en cuenta que  $\frac{\zeta(2)}{2\pi^2} = \frac{1}{12}$ , y sumando  $S_{10}$  a ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$S = S_{10} + \frac{\pi}{2} - \arctan(11) + \frac{1}{2}f(11) - \frac{1}{12}f'(11) + R_1.$$

Podemos acotar el resto usando que

$$|R_1| \leq 2 \int_{11}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi nt)}{(2\pi n)^3} f'''(t) \right| dt \leq \int_{11}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2|f'''(t)|}{(2\pi n)^3} dt = \frac{2\zeta(3)}{(2\pi)^3} \int_{11}^{\infty} |f'''(t)| dt.$$

Como  $-f'''(t)$  es positiva y decreciente en  $[11, \infty)$  (véase la demostración detallada en la Sección A.1), entonces:

$$|R_1| \leq \frac{2\zeta(3)}{(2\pi)^3} f''(11) = 3,86 \dots \cdot 10^{-6}.$$

En definitiva, incluyendo a  $S_{10}$  los términos de corrección integral y las derivadas de la fórmula de Euler-Maclaurin hemos reducido el error a menos de 4 millonésimas. De hecho, un análisis más cuidadoso muestra que el error es algo menor que  $2 \cdot 10^{-7}$ .

## CAPÍTULO 3

# El teorema de los residuos

---

Vamos a tratar ahora el teorema de los residuos, uno de los teoremas centrales y más importantes del análisis complejo. En el curso de variable compleja, se estudia su utilidad para evaluar algunas integrales reales complicadas, sin embargo, nosotros vamos a centrarnos en el valor que tiene al aplicarlo sobre series.

### 3.1. Marco teórico del teorema

Comenzamos con el enunciado y una breve demostración del teorema con aspecto meramente introductorio, con el objetivo de disponer de él para aplicarlo posteriormente. En la demostración se hará referencia a definiciones y teoremas que se pueden encontrar enunciados en el apéndice.

**Teorema 3.1** (Teorema de los residuos). *Sea  $\gamma$  una curva simple, cerrada y orientada positivamente, y sea  $f$  una función holomorfa en un entorno de  $\gamma$  y de su interior salvo en un conjunto finito de singularidades aisladas  $z_1, \dots, z_N$  situadas en el interior de  $\gamma$ .*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}(f, z_k).$$

*Demostración.* Tomamos discos pequeños, disjuntos dos a dos, centrados en cada singularidad  $z_k$  y contenidos en el interior de  $\gamma$ . Denotemos por  $\gamma_k$  las circunferencias frontera de esos discos, orientadas positivamente.

La función  $f$  es holomorfa en la región delimitada por  $\gamma$  y las circunferencias  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ . Por el teorema integral de Cauchy (Teorema A.1) aplicado a esta región “perforada” se tiene

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Basta calcular cada una de estas integrales. Fijemos una de las singularidades aisladas  $z_k$ , entonces existe un radio  $R > 0$  tal que  $\gamma_k \subset D^*(z_k, R) := D(z_k, R) \setminus \{z_k\}$  y  $f$  admite un desarrollo de Laurent en  $D^*(z_k, R)$ ,  $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z - z_k)^m$ . La serie de Laurent converge uniformemente sobre compactos del anillo (ver Teorema

A.4) y, en particular, sobre  $\gamma_k$ , por lo tanto podemos integrar término a término

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int_{\gamma_k} (z - z_k)^m dz.$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{\gamma_k} (z - z_k)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } m = -1 \\ 0 & \text{si } m \neq -1 \end{cases}$$

y  $a_{-1} = \text{Res}(f, z_k)$  (ver Definición A.5), se tiene que

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \text{Res}(f, z_k),$$

como se quería demostrar.  $\square$

La identidad del teorema anterior se conoce como la **fórmula de los residuos**.

Vamos a ver a continuación algunos ejemplos en los que aplicaremos los conceptos que hemos enunciado.

### 3.2. Sumación de series mediante residuos

Sea  $g$  una función meromorfa en  $\mathbb{C}$  (ver Definición A.3), sin polos en  $\mathbb{Z}$ , definimos la función  $f(z) = \pi g(z) \cot(\pi z)$ . Como  $g$  no tiene polos en  $\mathbb{Z}$ , es holomorfa en un entorno de cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Como  $\text{sen}(\pi z)$  tiene un cero simple en  $z = n$ , la función  $f(z)$  también tiene un polo simple en  $n$ . Por tanto, utilizando la Proposición A.6 y la definición de derivada para la función seno, obtenemos:

$$\text{Res}(f, n) = \lim_{z \rightarrow n} (z - n) \pi g(z) \frac{\cos(\pi z)}{\text{sen}(\pi z)} = \pi g(n) \cos(\pi n) \lim_{z \rightarrow n} \frac{z - n}{\text{sen}(\pi z) - \text{sen}(\pi n)} = g(n). \quad (3.1)$$

Así, si los residuos en los enteros equivalen a  $g(n)$  y la función  $g$  presenta un decaimiento suficiente en el infinito, es posible evaluar la suma  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n)$  mediante el resto de los residuos de  $f$ . Para ello, se integra sobre un contorno cuya extensión tiende a infinito, de modo que la contribución de la integral se anule en el límite.

Desarrollando la idea anterior, vamos a probar el siguiente lema:

**Lema 3.2.** *Se cumple que*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \pi + \frac{2\pi}{e^{2\pi} - 1}.$$

*Demostración.* Sea la función auxiliar  $f(z) = \pi \cot(\pi z) g(z)$ , con  $g(z) = (z^2 + 1)^{-1}$ . Esta función es meromorfa en  $\mathbb{C}$  y presenta dos tipos de singularidades aisladas: un conjunto de polos en los enteros  $z = n$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , derivados de los ceros simples de  $\text{sen}(\pi z)$  en la expresión de la cotangente, donde  $\text{Res}(f, n) = g(n) = (n^2 + 1)^{-1}$  por

(3.1); y dos polos simples adicionales en  $z = i$  y  $z = -i$ , correspondientes a las raíces del denominador de  $g(z)$ .

Aplicando la Proposición A.6:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \pi \cot(\pi z) \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \pi \cot(i\pi) \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{-\pi i \cot(i\pi)}{2}.$$

Por antisimetría de  $\cot(z)$ ,  $\operatorname{Res}(f, -i) = \operatorname{Res}(f, i)$ , y como  $\cot(i\pi) = -i \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{e^\pi - e^{-\pi}}$ ,  $\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i) = -\pi \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{e^\pi - e^{-\pi}} = -\pi - \frac{2\pi}{e^{2\pi} - 1}$ .

Sea  $C_N$ , con  $N \in \mathbb{Z}^+$ , un contorno cuadrado con vértices  $\pm(N+1/2) \pm i(N+1/2)$ , el cual mantiene los polos en su interior. En este contorno,  $|\cot(\pi z)|$  permanece acotado por una constante  $M$  independiente de  $N$ . Dado que  $|g(z)| \leq \frac{1}{N^2}$  para  $z \in C_N$ , podemos acotar la integral:

$$\left| \oint_{C_N} f(z) dz \right| \leq \text{Longitud}(C_N) \cdot \max_{z \in C_N} |f(z)| \leq (8N + 4) \frac{\pi M}{N^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Puesto que la integral se anula en el límite, la suma de todos los residuos debe ser cero:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}(f, n) + \operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i) = 0 \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \pi + \frac{2\pi}{e^{2\pi} - 1}.$$

□

### 3.3. Polinomios $N$ -pares

Este método es generalizable al cálculo de sumas de la forma  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} R(n)$ , siempre que la función racional  $R$  posea un grado total menor que  $-1$  para garantizar su convergencia. Cabe señalar que, por lo general, no existe un procedimiento estándar para evaluar estas series sobre el conjunto de los naturales,  $\sum_{n=1}^{\infty} R(n)$ . Por ejemplo, no se conoce una fórmula explícita para  $\zeta(3)$ . No obstante, en casos como el anterior, la simetría permite establecer que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (n^2 + 1)^{-1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 1)^{-1}$ . En lo que sigue, se explorará cómo una generalización de este principio de simetría resulta eficaz en otros escenarios. Por simplicidad, a pesar de no ser esencial, restringiremos el análisis al caso en que  $R$  es el inverso de un polinomio con raíces simples.

**Definición 3.3.** Un polinomio  $P$  es  $N$ -par si  $P^{(2k-1)}(N) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

Veamos que estos polinomios son exactamente los que verifican el siguiente lema.

**Lema 3.4.** Sea  $P \in \mathbb{C}[x]$  un polinomio, entonces  $P$  es  $N$ -par si y solo si  $P(N+x) = P(N-x)$ . En particular, todo polinomio  $N$ -par tiene grado par.

*Demostración.* Considerando la expansión de Taylor de  $P$  en torno a  $x = N$ , tenemos  $P(N+x) = \sum_{m=0}^d a_m x^m$  y  $P(N-x) = \sum_{m=0}^d a_m (-1)^m x^m$ , donde  $a_m = P^{(m)}(N)/m!$ . La igualdad  $P(N+x) = P(N-x)$  se cumple si y solo si  $a_m = (-1)^m a_m$  para todo  $m$ . Esto implica que  $a_m = 0$  cuando  $m$  es impar, lo cual equivale a  $P^{(2k-1)}(N) = 0$ . Puesto que el coeficiente principal de un polinomio de grado impar correspondería a una derivada impar no nula, concluimos que  $\deg(P)$  debe ser par. □

Como ilustración vemos que  $P_1(x) = (x-2)^4 + (x-2)^2$  y  $P_2(x) = (x-1)^2(x-3)^2$  son dos ejemplos de polinomios 2-pares de grado 4 en  $\mathbb{R}[x]$ , ya que  $P_1(2+x) = P_1(2-x) = x^4 + x^2$  y  $P_2(2+x) = (1+x)^2(-1+x)^2 = (1-x)^2(-1-x)^2 = P_2(2-x)$ .

Dado  $P(x) = a_{2n}x^{2n} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$  que es  $N$ -par, entonces  $P(x)^{(2n-1)} = (2n)!a_{2n}x + (2n-1)!a_{2n-1}$  y  $P(N)^{(2n-1)} = (2n)!a_{2n}N + (2n-1)!a_{2n-1} = 0$  que implica  $N = -\frac{a_{2n-1}}{2na_{2n}}$ .

Sin embargo, el cálculo de  $N$  mediante esta fórmula constituye únicamente una condición necesaria. Para confirmar que el polinomio es efectivamente  $N$ -par, se requiere verificar que todas sus derivadas de orden impar se anulan en dicho punto:  $P^{(1)}(N) = P^{(3)}(N) = \dots = P^{(2n-1)}(N) = 0$ . Esto equivale a comprobar que los coeficientes impares de la expansión de Taylor centrada en  $N$  del polinomio sean todos 0.

Teniendo esto en cuenta, podemos codificar en matlab, una función que recibiendo los coeficientes del polinomio, determine si es  $N$ -par o no. Aquí se muestra el código completo de la función:

Listing 3.1: Comprobación de si un polinomio es  $N$ -par.

```

1 function [isP, N] = checkNPar(c)
2     % c: vector de coeficientes [a_d, a_{d-1}, ..., a_0]
3     d = length(c)-1;
4     if mod(d,2) || isempty(c), isP=false; N=nan; return; end
5     N = -c(2)/(d*c(1));
6     % Cambio de base mediante expansion binomial
7     sh = zeros(1,d+1);
8     for i = 0:d
9         p = d-i; ex = zeros(1,p+1);
10        for k = 0:p, ex(end-k) = nchoosek(p,k)*N^(p-k); end
11        sh(end-p:end) = sh(end-p:end) + c(i+1)*ex;
12    end
13    isP = all(abs(sh(end-1:-2:1)) < 1e-10);
14 end

```

A pesar de la notación, para polinomios de  $\mathbb{C}[x]$ , en principio,  $N$  podría ser cualquier número complejo. Para estudiar fórmulas de sumación nos vamos a centrar en el caso  $N \in \mathbb{Z}$ .

Con lo visto hasta ahora, vamos a demostrar la siguiente fórmula de sumación:

**Proposición 3.5.** *Sea  $P \in \mathbb{C}[x]$  de grado  $d \geq 2$  con raíces  $r_1, \dots, r_d \in \mathbb{C}$  distintas y no enteras. Si  $P$  es  $N$ -par con  $N \in \mathbb{Z}$  entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)} = \frac{1}{2P(N)} - \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^d \frac{\cot(\pi r_j)}{P'(r_j)} + \begin{cases} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{P(n)} & \text{si } N > 0, \\ \sum_{n=N}^0 \frac{-1}{P(n)} & \text{si } N \leq 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Utilizando la función auxiliar  $f(z) = \pi \cot(\pi z)g(z)$  con  $g(z) = P(z)^{-1}$ , podemos usar (3.1) para afirmar que  $\text{Res}(f, n) = P(n)^{-1}$ . Por otro lado, por las hipótesis del enunciado, podemos usar la fórmula de la Proposición A.6 para ver que

$$\text{Res}(f, r_j) = \lim_{z \rightarrow r_j} (z - r_j)f(z) = \pi \cot(\pi r_j) \cdot \left( \lim_{z \rightarrow r_j} \frac{z - r_j}{P(z) - P(r_j)} \right) = \pi \frac{\cot(\pi r_j)}{P'(r_j)}.$$

El hecho de que  $\deg(P) \geq 2$ , permite usar el mismo argumento que en (3.2) para acotar la integral, por lo que el teorema de los residuos implica:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{P(n)} = -\pi \sum_{j=1}^d \frac{\cot(\pi r_j)}{P'(r_j)}.$$

Dada la  $N$ -paridad de  $P$ , se cumple  $P(N+k) = P(N-k)$ , permitiendo expresar la suma bilateral como:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{P(n)} = \frac{1}{P(N)} + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{P(n)}.$$

Para  $N > 0$ , podemos escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{P(n)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{P(n)} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{P(n)} - \frac{1}{P(N)} \right) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{P(n)}.$$

Simplificando los términos constantes  $1/P(N)$ , llegamos a la expresión deseada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)} = \frac{1}{2P(N)} - \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^d \frac{\cot(\pi r_j)}{P'(r_j)} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{P(n)}.$$

El caso  $N \leq 0$  se deduce de manera análoga, utilizando ahora que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P(n)} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{P(n)} - \sum_{n=N+1}^0 \frac{1}{P(n)}$ .  $\square$

En conclusión, la simetría que impone la  $N$ -paridad permite la evaluación explícita de la serie correspondiente a la suma sobre los naturales. Hay un resultado del mismo tipo para  $N$  semientero, pero no entraremos en ello aquí.

Para ejemplificar la proposición anterior, vamos a hallar una fórmula explícita para:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{120}{36n^4 + 144n^3 + 203n^2 + 118n + 24}.$$

```
>> [isP, N] = checkNPar([36 144 203 118 24]); fprintf('isP = %s, N = %d\n', mat2str(isP), N)
isP = true, N = -1
```

Figura 3.1: Salida de la función de comprobación.

Hemos comprobado que, efectivamente, el denominador es  $-1$ -par utilizando el código que hemos desarrollado anteriormente. Vamos ahora a calcular las raíces del denominador. Si  $P(x)$  un polinomio  $N$ -par, por la propiedad de simetría  $P(N+x) = P(N-x)$ , si  $r$  es una raíz de  $P(x)$ , existe un valor  $\alpha$  tal que  $r = N+\alpha$  y  $P(N+\alpha) = 0$ . En consecuencia,  $P(N-\alpha) = 0$ . Definiendo la raíz reflejada como  $r' = N-\alpha$ , y sustituyendo  $\alpha = r-N$ , obtenemos:

$$r' = N - (r - N) = 2N - r$$

Así, el conjunto de raíces de un polinomio  $N$ -par es siempre simétrico respecto al punto  $N$  en el plano complejo. Como sabemos que  $r_1 = -1/2$  y  $N = -1$ , por lo que acabamos de enunciar, tenemos directamente que  $r_2 = -3/2$ . Las restantes raíces serán también de la forma  $-1 \pm \beta$ , y por la relación de Vieta:  $1 - \beta^2 = 8/9$ , de donde  $\beta = \pm \frac{1}{3}$ , y por tanto  $r_3 = -2/3$  y  $r_4 = -4/3$ .

Para  $N = -1$ , la fórmula de la Proposición 3.5 es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{120}{P(n)} = 120 \left[ \frac{1}{2P(-1)} - \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^4 \frac{\cot(\pi r_j)}{P'(r_j)} + \sum_{n=-1}^0 \frac{-1}{P(n)} \right].$$

Calculando y sustituyendo los valores en la fórmula obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{120}{P(n)} = 120 \left[ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{5} \right) - 1 - \frac{1}{24} \right] = 12\pi\sqrt{3} - 65.$$

### 3.4. Transformadas integrales y sumas finitas

Mientras que la proposición anterior simplifica series infinitas, en este apartado utilizaremos el teorema de los residuos para el proceso inverso: transformar una suma finita en una expresión integral que involucra una serie infinita. Esta estrategia es fundamental en teoría de números, ya que permite trasladar un problema desde un contexto aritmético o combinatorio hacia uno analítico, facilitando su manipulación. A continuación, presentamos un lema técnico necesario para la demostración del siguiente teorema, seguido de un ejemplo ilustrativo

**Lema 3.6.** Sean  $\mathcal{C}_+$  y  $\mathcal{C}_-$  los cuadrados  $\mathcal{C}_{\pm} = \{s \in \mathbb{C} : |\Re(s \mp N - c)| \leq N, |\Im(s)| \leq N\}$  donde  $2N > c + 1$ . Si  $\alpha \geq 1$  entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}_-} \frac{\alpha^{s+1}}{s(s+1)} ds = \alpha - 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}_+} \frac{\alpha^{-s-1}}{s(s+1)} ds = 0,$$

donde  $\partial$  indica la frontera con la orientación positiva.

*Demostración.* Consideremos la función  $h_1(s) = \frac{\alpha^{s+1}}{s(s+1)}$ , que cuenta con dos polos simples en  $s = 0$  y  $s = -1$ . Para  $\mathcal{C}_-$ , la condición  $|\Re(s) + N - c| \leq N$  define el intervalo  $[-2N + c, c]$ . Dado que  $c > 0$  y  $2N > c + 1$ , se garantiza que  $-2N + c < -1$ , incluyendo así ambos polos. Calculando sus residuos mediante la Proposición A.6:

$$\text{Res}(h_1, 0) = \left[ \frac{\alpha^{s+1}}{s+1} \right]_{s=0} = \alpha, \quad \text{Res}(h_1, -1) = \left[ \frac{\alpha^{s+1}}{s} \right]_{s=-1} = -1.$$

Por el teorema de los residuos,  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}_-} \frac{\alpha^{s+1}}{s(s+1)} ds = \text{Res}(h_1, 0) + \text{Res}(h_1, -1) = \alpha - 1$ .

Por otro lado, para la función  $h_2(s) = \frac{\alpha^{-s-1}}{s(s+1)}$ , observamos que para  $\mathcal{C}_+$ , la condición  $|\Re(s) - N - c| \leq N$  implica  $\Re(s) \in [c, 2N + c]$ . Al ser  $c > 0$ , este semiplano excluye estrictamente las singularidades. Al no contener singularidades en su interior, podemos afirmar por el Teorema A.1 que  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{C}_+} \frac{\alpha^{-s-1}}{s(s+1)} ds = 0$ .  $\square$

**Proposición 3.7.** Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión real o compleja tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|n^{-c} < \infty$  para cierto  $c > 0$ . Si  $M \in \mathbb{Z}^+$ , se tiene

$$\sum_{n=1}^M (M-n) a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(s)M^{s+1}}{s(s+1)} ds \quad \text{donde} \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

*Demostración.* Dada la convergencia absoluta de la serie  $\sum a_n n^{-c}$ , podemos expresar la integral como:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \frac{M^{s+1}}{s(s+1)} ds = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(M/n)^{s+1}}{s(s+1)} ds \right).$$

Sea  $\alpha = M/n$ , definimos la función

$$g(s) = \begin{cases} \frac{\alpha^{s+1}}{s(s+1)} & \text{si } n \leq M \\ \frac{\alpha^{-s-1}}{s(s+1)} & \text{si } n > M \end{cases}$$

y, para cada término de la serie, extendemos la integral sobre la línea vertical  $\Re(s) = c$  cerrando el contorno mediante tres lados adicionales  $L_N$  para formar los cuadrados  $\mathcal{C}_{\pm}$  del Lema 3.6:

$$I_n := \frac{a_n n}{2\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_{c-iN}^{c+iN} g(s) ds + \int_{L_N} g(s) ds \right).$$

Vamos demostrar que la contribución de los tres lados adicionales  $L_N$  se anula cuando  $N \rightarrow \infty$ , aplicando la desigualdad fundamental:

$$\left| \int_{L_N} g(s) ds \right| \leq \text{Longitud}(L_N) \cdot \max_{s \in L_N} |g(s)|.$$

Dado que  $|\alpha^{s+1}| = \alpha^{\Re(s)+1}$  y  $|\alpha^{-s-1}| = \alpha^{-\Re(s)-1}$ , el término permanece acotado por una constante  $K$  en el semiplano correspondiente. Para  $n \leq M$  ( $\Re(s) \rightarrow -\infty$ ) y para  $n > M$  ( $\Re(s) \rightarrow +\infty$ ), por lo que el numerador decae exponencialmente o se mantiene bajo el límite impuesto por  $\Re(s) = c$ . En el contorno  $L_N$ , se tiene en el denominador que  $|s(s+1)| \sim N^2$ .

Dado que la longitud de cada tramo es  $2N$ , la integral queda acotada por:

$$\left| \int_{L_N} g(s) ds \right| \leq \frac{(6N) \cdot K}{N^2} = \frac{6K}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Para  $n \leq M$ : Cerramos hacia la izquierda. Esto significa que la integral sobre la línea infinita es exactamente igual a la integral sobre el cuadrado cerrado  $\partial\mathcal{C}_-$  cuando  $N$  es muy grande, resultando en:

$$I_n = a_n \cdot n \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{C}_-} \frac{\alpha^{s+1}}{s(s+1)} ds \right) = a_n \cdot n(\alpha - 1) = a_n(M - n).$$

Para  $n > M$ : Cerramos hacia la derecha. La integral sobre la línea se convierte en el cuadrado  $\partial\mathcal{C}_+$ , por lo que  $I_n = 0$ .  $\square$

Veamos un ejemplo aritmético de la proposición anterior.

**Corolario 3.8.** Denotando por  $\tau(n)$  la función divisor, que cuenta el número de divisores positivos del entero  $n$ , es decir,  $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ , se tiene que

$$\sum_{n=1}^M (M-n) \tau(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} F(s) ds \quad \text{con} \quad F(s) = \frac{(\zeta(s))^2 M^{s+1}}{s(s+1)}.$$

Además, existe una constante  $C$  tal que

$$\left| \sum_{n=1}^M (M-n) \tau(n) - M^2 \left( \frac{1}{2} \log M + \gamma - \frac{3}{4} \right) \right| \leq CM^{3/2}.$$

*Demostración.* Elegimos la sucesión  $a_n = \tau(n)$ . Por la Proposición A.8 se tiene que  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)n^{-s} = \zeta^2(s)$ , la cual converge absolutamente para  $\Re(s) > 1$ .

Tomando  $c = 3$ , se satisface la condición de convergencia absoluta. Sustituyendo  $f(s)$  en la fórmula general de la Proposición 3.7:

$$\sum_{n=1}^M (M-n) \tau(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} \zeta^2(s) \frac{M^{s+1}}{s(s+1)} ds,$$

que coincide con la integral de  $F(s)$  definida en el enunciado.

Es conocido que  $(\zeta(s))^2$  tiene una extensión meromorfa a  $\mathbb{C}$  con un solo polo en  $s = 1$  donde su desarrollo de Laurent es  $\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma}{s-1} + \dots$  con  $\gamma$  la constante de Euler-Mascheroni [23]. Además, es posible aplicar el teorema de los residuos en la banda  $\frac{1}{2} \leq \Re(s) \leq 3$  a cambio de pagar con un error de orden  $M^{3/2}$  por la frontera izquierda, es decir, existe cierta constante  $C$  tal que  $\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} F(s) ds - \text{Res}(F, 1) \right| \leq CM^{3/2}$ .

Usando la identidad  $M^{s+1} = M^2 \cdot M^{s-1} = M^2 e^{(s-1)\log M}$  y la función auxiliar  $g(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ , al realizar un desarrollo de Taylor en  $s = 1$  obtenemos  $\frac{M^{s+1}}{s(s+1)} = M^2 \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \log M - \frac{3}{4} \right) (s-1) + O(s-1)^2 \right]$ . Al multiplicar esto por la serie de Laurent de  $(\zeta(s))^2$ , obtenemos la serie de Laurent de  $F(s)$ . En consecuencia por la Definición A.5:

$$\text{Res}(F, 1) := a_{-1} = M^2 \left( \frac{1}{2} \log M + \gamma - \frac{3}{4} \right).$$

Entonces

$$\left| \sum_{n=1}^M (M-n) \tau(n) - M^2 \left( \frac{1}{2} \log M + \gamma - \frac{3}{4} \right) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{3-i\infty}^{3+i\infty} F(s) ds - \text{Res}(F, 1) \right| \leq CM^{3/2},$$

y obtenemos una desigualdad aritmética a partir de información analítica.  $\square$

## CAPÍTULO 4

# La identidad de Parseval

---

La *identidad de Parseval* o *teorema de Parseval* es una fórmula básica del análisis de Fourier que tiene interés en ingeniería. Aquí veremos diferentes ejemplos y aplicaciones matemáticas.

### 4.1. Conceptos previos y enunciado

Recordemos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que sea 1-periódica y que tenga regularidad suficiente coincide con su serie de Fourier; esto es,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x} \quad \text{con} \quad a_n = \int_{-1/2}^{1/2} f(t) e^{-2\pi i n t} dt. \quad (4.1)$$

Equivalentemente, el desarrollo en serie de Fourier puede expresarse en términos de senos y cosenos, utilizando la relación  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . Lo que afirma el teorema de Parseval es que

$$\int_{-1/2}^{1/2} |f|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

Mediante un argumento de densidad, esta identidad es válida siempre que la integral tenga sentido, esto es, para  $f \in L^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ , incluso si no se tiene la igualdad de  $f$  y su serie de Fourier en todo punto. Fuera de estos casos patológicos, la demostración es simple: basta integrar término a término en  $|f|^2 = \bar{f}f$ .

A lo largo de este capítulo, además, asumiremos (salvo indicación contraria) que las funciones que desarrollamos por Fourier son al menos Lipschitz, con lo que la convergencia no es un problema; para ellas, la serie de Fourier converge uniformemente a la función [20, 13].

Una vez introducida y enunciada la identidad, podemos pasar a estudiar algunas de sus aplicaciones más notables.

### 4.2. Revisitando $\zeta(4)$

Comenzaremos analizando nuevamente el cálculo de  $\zeta(4)$ . Si bien se abordó en el Capítulo 2 este problema mediante la fórmula de Euler-Maclaurin, la identidad de Parseval ofrece una alternativa más eficiente y directa, aunque menos general.

**Proposición 4.1.** *Se cumple que*

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

*Demostración.* Sea  $f(x) = 12x^2 - 1$  definida en el intervalo  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  y extendida de manera 1-periódica. Una vez calculados sus coeficientes de Fourier, obtenemos  $a_0 = 0$  e, integrando por partes dos veces,  $a_n = \frac{6(-1)^n}{\pi^2 n^2}$  para  $n \neq 0$ .

Por otro lado,  $\int_{-1/2}^{1/2} (12t^2 - 1)^2 dt = \frac{4}{5}$  y como  $a_0 = 0$  y  $|a_n|^2 = |a_{-n}|^2$ , tenemos que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{6(-1)^n}{\pi^2 n^2} \right|^2 = \frac{72}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

Aplicando ahora la identidad de Parseval, obtenemos:

$$\frac{4}{5} = \frac{72}{\pi^4} \zeta(4) \implies \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

### 4.3. Una suma combinatoria

La identidad de Parseval también se puede utilizar para obtener algunas sumas finitas de matemática discreta o combinatoria, como indica el siguiente resultado.

**Proposición 4.2.** *Para  $n \in \mathbb{Z}^+$ , se tiene la identidad*

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n},$$

y; además,  $\int_I \cos^{2n}(\pi x) dx = 2^{-2n} \binom{2n}{n}$  para cualquier intervalo  $I$  de longitud 1.

*Demostración.* Definimos  $f(x) = (1 + e^{2\pi i x})^n$ . Utilizando el binomio de Newton, podemos expandir la función como:  $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{2\pi i x})^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2\pi i k x}$ .

Comparando esta expresiones con su serie de Fourier, identificamos los coeficientes de Fourier:  $a_k = \binom{n}{k}$  para  $0 \leq k \leq n$  y  $a_k = 0$  para cualquier otro valor de  $k$ .

Tenemos además, usando el binomio de Newton y que  $|f(x)|^2 = f(x) \cdot \overline{f(x)}$ , que

$$|f(x)|^2 = (1 + e^{2\pi i x})^n (1 + e^{-2\pi i x})^n = (1 + e^{2\pi i x})^{2n} e^{-2\pi i n x} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} e^{2\pi i (j-n)x}.$$

Si integramos esta expresión sobre un intervalo  $I$  de longitud 1, por la periodicidad de la exponencial, la integral de  $e^{2\pi i m x}$  es nula para todo entero  $m \neq 0$ , y es igual a 1 si  $m = 0$ . Por lo tanto, el único término que sobrevive en el sumatorio es aquel donde  $j - n = 0$  (es decir,  $j = n$ ). En consecuencia, tenemos

$$\int_I |f(x)|^2 dx = \int_I \binom{2n}{j} e^{2\pi i (j-n)x} dx = \binom{2n}{n} \implies \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2,$$

al haber aplicado la identidad de Parseval.

Por otro lado,  $|1 + e^{2\pi ix}| = |e^{\pi ix}(e^{-\pi ix} + e^{\pi ix})| = |e^{\pi ix}| \cdot |2 \cos(\pi x)| = 2|\cos(\pi x)|$ . Por lo tanto,  $|f(x)|^2 = (2 \cos(\pi x))^{2n} = 2^{2n} \cos^{2n}(\pi x)$ , que es 1-periódica, resultando entonces

$$2^{2n} \int_I \cos^{2n}(\pi x) dx = \int_I |f(x)|^2 dx = \binom{2n}{n}.$$

□

#### 4.4. Una identidad clásica

Pasemos ahora a una identidad clásica con relevancia en la teoría de las *wavelets*, que son señales o formas de onda de duración limitada y valor medio nulo. Las *wavelets* pueden ser irregulares y asimétricas, características que les otorgan una mejor adaptación en el análisis de señales en comparación con la transformada de Fourier.

Aquí las utilizaremos para dar una nueva solución del problema de Basilea, aunque hay maneras más rápidas de proceder. Este es el único caso en que desarrollaremos una función de  $L^2$  no continua.

**Proposición 4.3.** *Para  $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ , se tiene que*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi r)}{(r+n)^2} = \pi^2. \quad (4.2)$$

*Demostración.* Definimos  $f(x) = \pi e^{-2\pi irx}$  en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  y su extensión de periodo uno en el resto. Sus coeficientes de Fourier, una vez calculados, son:  $a_n = \frac{(-1)^n \operatorname{sen}(\pi r)}{r+n}$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .

Por otro lado, tenemos:  $\int_{-1/2}^{1/2} |\pi e^{-2\pi irx}|^2 dx = \int_{-1/2}^{1/2} \pi^2 dx = \pi^2$ , así que, aplicando la identidad de Parseval, llegamos al resultado. □

De la identidad anterior podemos obtener  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(r+n)^2} = \pi^2 \operatorname{csc}^2(\pi r)$  y, desarrollando el lado izquierdo:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(r+n)^2} = \frac{1}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(r+n)^2} + \frac{1}{(r-n)^2} \right) = \pi^2 \operatorname{csc}^2(\pi r).$$

Si tomamos el límite cuando  $r \rightarrow 0$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(-n)^2} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \pi^2 \operatorname{csc}^2(\pi r) - \frac{1}{r^2} \right] \Rightarrow \zeta(2) = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} [\pi^2 \operatorname{csc}^2(\pi r) - r^{-2}],$$

de manera que, al evaluar el límite utilizando convenientemente el desarrollo de Taylor de  $\operatorname{sen}(\pi x)$ :

$$\zeta(2) = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi r)} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi r)} + \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\pi^2 r}{6 - \pi^2 r^2} \right) \left( \frac{2}{r} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Por continuación analítica (principio de unicidad) la identidad (4.2) es también válida para  $r \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ . Usaremos este hecho para probar la siguiente fórmula de sumación que es parte de un proceso empleado en teoría de números llamado *sumación de Lipschitz*.

Enunciamos primero un lema que utilizaremos en la demostración a continuación.

**Lema 4.4.** Tomando  $r = i + x$  en con  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+i+n)^2} = 2\pi i \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi} e^{2\pi i x}} \right) = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{2\pi i n x}}{e^{2\pi n}}.$$

*Demostración.* Sabemos, por (4.2), que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+i+n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi(x+i))}$ . Usando la relación  $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ , tenemos:  $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi(x+i))} = \frac{-4\pi^2 e^{2\pi} e^{2\pi i x}}{(e^{2\pi} - e^{2\pi i x})^2}$ . Es fácil ver que

$$\frac{-4\pi^2 e^{2\pi} e^{2\pi i x}}{(e^{2\pi} - e^{2\pi i x})^2} = 2\pi i \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi} e^{2\pi i x}} \right).$$

Además, como  $|e^{-2\pi} e^{2\pi i x}| < 1$ , podemos definir:  $\frac{1}{1 - e^{-2\pi} e^{2\pi i x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{e^{2\pi i x}}{e^{2\pi}} \right)^n$ . De esta manera, tenemos:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+i+n)^2} = 2\pi i \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi} e^{2\pi i x}} \right) = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{2\pi i n x}}{e^{2\pi n}}.$$

□

**Proposición 4.5.** Sea  $f$  de periodo 1, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{e^{2\pi n}} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{(x-i)^2}$$

donde  $i = \sqrt{-1}$  y  $a_n$  son los coeficientes de Fourier de  $f$ .

*Demostración.* Para esta demostración, únicamente debemos conjugar, multiplicar por  $f(x)$  e integrar en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  la identidad del Lema 4.4.

En el lado izquierdo, usando que  $f$  es de periodo 1 en el cambio de variable, tenemos que

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x) \overline{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+i+n)^2}} dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-i+n)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u-i)^2} du.$$

En el lado derecho, usando la definición de los coeficientes de Fourier, se tiene

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x) \overline{\left( -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{2\pi i n x}}{e^{2\pi n}} \right)} dx = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{e^{2\pi n}}.$$

□

Presentamos ahora un ejemplo que evita la complejidad adicional que supondría su análisis a través del teorema de los residuos.

Vamos a calcular  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sen}^3(2\pi x)}{(x-i)^2} dx$  mediante la Proposición 4.5. Utilizando la fórmula del ángulo triple para el seno:  $\operatorname{sen}^3 \theta = \frac{3 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}(3\theta)}{4}$ ; y sustituyendo  $\theta = 2\pi x$  tenemos:  $f(x) = \operatorname{sen}^3(2\pi x) = \frac{3 \operatorname{sen}(2\pi x) - \operatorname{sen}(6\pi x)}{4}$ .

Para obtener los coeficientes  $a_n$ , escribimos los senos en forma de exponenciales complejas mediante la relación  $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ :

$$f(x) = \underbrace{-\frac{3i}{8}}_{a_1} e^{2\pi i x} + \underbrace{\frac{3i}{8}}_{a_{-1}} e^{-2\pi i x} + \underbrace{\frac{i}{8}}_{a_3} e^{2\pi i(3)x} - \underbrace{\frac{i}{8}}_{a_{-3}} e^{-2\pi i(3)x}.$$

De esta manera,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{e^{2\pi n}} = -\frac{3i}{8} (e^{-2\pi} - e^{-6\pi})$  y, aplicando la Proposición 4.5:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3(2\pi x) dx}{(x-i)^2} = -4\pi^2 \cdot \left(-\frac{3i}{8}\right) (e^{-2\pi} - e^{-6\pi}) = \frac{3\pi^2 i}{2} (e^{-2\pi} - e^{-6\pi}).$$

## 4.5. La desigualdad de Wirtinger

La última aplicación es un famoso resultado que tiene interesantes consecuencias. Vamos a introducir primero algo de notación y un lema que usaremos más adelante.

**Definición 4.6.** Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado, definimos

$$\mathcal{F}(I) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es } C^1 \text{ a trozos, } f|_{\partial I} = 0 \text{ y } f \not\equiv 0 \text{ en } I\}.$$

**Lema 4.7.** Sea  $J = [0, \frac{1}{2}]$  y  $\mathcal{G}$  el conjunto de funciones impares de  $\mathcal{F}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ . Se tiene que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(I)} \frac{\int_I |f|^2}{\int_I |f'|^2} = 4|I|^2 \sup_{f \in \mathcal{F}(J)} \frac{\int_J |f|^2}{\int_J |f'|^2} = 4|I|^2 \sup_{f \in \mathcal{G}} \frac{\int_{-1/2}^{1/2} |f|^2}{\int_{-1/2}^{1/2} |f'|^2}.$$

*Demostración.* Sea  $I = [a, b]$  con  $|I| = b - a$ . Definimos el cambio de variable lineal  $x(t) = a + 2|I|t$ , con  $t \in J$ . Consideramos  $f \in \mathcal{F}(I)$  y definimos la función  $g : J \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $g(t) := f(x) = f(a + 2|I|t)$ , de modo que  $g \in \mathcal{F}(J)$ . Sustituimos entonces en las integrales del cociente:

$$\left. \begin{aligned} \int_I |f(x)|^2 dx &= 2|I| \int_J |g(t)|^2 dt \\ \int_I |f'(x)|^2 dx &= \frac{1}{2|I|} \int_J |g'(t)|^2 dt \end{aligned} \right\} \implies \frac{\int_I |f(x)|^2 dx}{\int_I |f'(x)|^2 dx} = 4|I|^2 \frac{\int_J |g(t)|^2 dt}{\int_J |g'(t)|^2 dt}.$$

Como además el cambio de variable  $x(t)$  define una biyección entre  $J$  e  $I$ , la aplicación  $f \mapsto g = f \circ x$  define una correspondencia biyectiva entre  $\mathcal{F}(I)$  y  $\mathcal{F}(J)$ , sus respectivos supremos coinciden:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(I)} \frac{\int_I |f(x)|^2 dx}{\int_I |f'(x)|^2 dx} = 4|I|^2 \sup_{g \in \mathcal{F}(J)} \frac{\int_J |g(t)|^2 dt}{\int_J |g'(t)|^2 dt}.$$

Dada cualquier  $g \in \mathcal{F}(J)$ , podemos definir su extensión impar  $\tilde{g}$  en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  como:

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ -g(-t) & \text{si } t \in [-1/2, 0). \end{cases}$$

Por definición es continua, y se cumple que  $\tilde{g} \in \mathcal{G}$ . Entonces:  $\int_{-1/2}^{1/2} |\tilde{g}|^2 = 2 \int_0^{1/2} |g|^2$  y  $\int_{-1/2}^{1/2} |\tilde{g}'|^2 = 2 \int_0^{1/2} |g'|^2$ , y el cociente no cambia.

Inversamente, si tenemos una función impar  $f \in \mathcal{G}$ , esta debe cumplir necesariamente  $f(0) = 0$ . Por lo tanto, su restricción al intervalo  $[0, 1/2]$  pertenece a  $\mathcal{F}(J)$ .

La extensión impar y la restricción establecen una correspondencia que preserva el cociente. En consecuencia, los conjuntos de valores del cociente sobre  $\mathcal{F}(J)$  y  $\mathcal{G}$  coinciden, lo que implica que sus supremos son iguales.  $\square$

**Teorema 4.8** (Desigualdad de Wirtinger). *Se cumple que*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(I)} \frac{\int_I |f|^2}{\int_I |f'|^2} = \frac{|I|^2}{\pi^2}.$$

El nombre proviene de que normalmente se presenta escribiendo que el cociente de las integrales es menor o igual que el segundo miembro y quitando denominadores [9].

*Demostración.* Es fácil ver que, para las funciones 1-periódicas impares o pares de promedio cero, se cumple que  $a_0 = 0$  y  $|a_n| = |a_{-n}|$ , por lo que aplicando la identidad de Parseval, llegamos a  $\int_{-1/2}^{1/2} |f|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ .

Si  $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$ , entonces  $f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi i n a_n e^{2\pi i n x}$  y, aplicando Parseval a  $f'$ :

$$\int_{-1/2}^{1/2} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |2\pi i n a_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 4\pi^2 n^2 |a_n|^2 = 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2.$$

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ , partiendo del cociente  $\frac{\int_{-1/2}^{1/2} |f|^2}{\int_{-1/2}^{1/2} |f'|^2}$  y tomando supremos, obtenemos:

$$\sup_{f \in \mathcal{G}} \frac{\int_{-1/2}^{1/2} |f|^2}{\int_{-1/2}^{1/2} |f'|^2} \leq (2\pi)^{-2}.$$

Para finalizar, si tomamos  $f(x) = \sin(2\pi x) \in \mathcal{G}$  y, usando la exponencial compleja, llegamos a:  $f(x) = \left(\frac{-i}{2}\right) e^{2\pi i(1)x} + \left(\frac{i}{2}\right) e^{2\pi i(-1)x}$ . En consecuencia, los únicos coeficientes no nulos son  $a_1$  y  $a_{-1}$ , de manera que  $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2} = 1$  y, por el Lema 4.7:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(I)} \frac{\int_I |f|^2}{\int_I |f'|^2} = 4|I|^2 \sup_{f \in \mathcal{G}} \frac{\int_{-1/2}^{1/2} |f|^2}{\int_{-1/2}^{1/2} |f'|^2} = 4|I|^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2} = \frac{|I|^2}{\pi^2}.$$

$\square$

A. Hurwitz encontró en 1901 una bella aplicación de la desigualdad de Wirtinger para probar la *desigualdad isoperimétrica*.

**Teorema 4.9** (Desigualdad isoperimétrica). *Si una curva cerrada plana simple (digamos  $C^1$  a trozos) de longitud  $L$  encierra un área  $A$ , entonces*

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

*Hay generalizaciones a todas las dimensiones y la igualdad se alcanza para las esferas [17].*

*Demostración.* Veamos que podemos suponer que la curva tiene una parametrización  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  por longitud de arco con  $y(0) = 0$  de modo que  $y$  sea una función  $L$ -periódica impar.

Para simplificar la geometría de la curva, primero aplicamos giros y traslaciones (que preservan el área  $A$  y la longitud  $L$ ) hasta que el eje  $x$  divida el área encerrada por la curva en dos regiones de área  $A/2$ . Si uno de los dos arcos que componen la curva tiene mayor longitud que el otro, lo sustituimos por la reflexión respecto al eje  $x$  del más corto, obteniendo una nueva curva simétrica respecto al eje  $x$  que encierra el mismo área pero de longitud total menor o igual a la original (ver figura 4.1).

A continuación, parametrizamos esta nueva curva por longitud de arco,  $\sigma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  con periodo  $L$  y elegimos  $\sigma(0) = (x(0), y(0))$  uno de los puntos del eje  $x$ , por lo tanto  $y(0) = 0$ . Además, por simetría respecto del eje  $x$  podemos escoger la parametrización tal que  $\sigma(-t) = (x(t), y(-t))$ , entonces, por cada punto  $(x(t), y(t))$  existe un punto correspondiente  $(x(-t), -y(-t))$ . Esto implica directamente que la componente vertical  $y(t)$  es una función impar y, al ser  $L$ -periódica,  $y(t)$  también lo es.

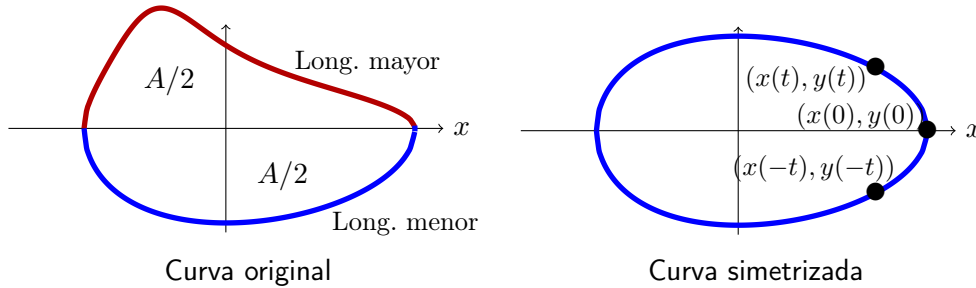


Figura 4.1: Simetrización de la curva original respecto del eje  $x$ .

Consideramos ahora el campo vectorial  $\vec{F}(x, y) = (y, 0)$ . Sustituyendo  $P = y$  y  $Q = 0$  en el Teorema de Green, el área  $A$  de la región  $D$  encerrada por la curva  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  cumple, parametrizando la integral de línea en el intervalo  $t \in [-L/2, L/2]$ :

$$\oint_{\partial D} y \, dx = \int_{-L/2}^{L/2} y(t)x'(t) \, dt = \iint_D (-1) \, dA = -A \implies A = - \int_{-L/2}^{L/2} y(t)x'(t) \, dt.$$

Puesto que la curva está parametrizada por longitud de arco, se tiene que  $\|\sigma'(t)\| = 1$ . Integrando sobre el periodo  $L$ , tenemos que  $L^2 = L \int_{-L/2}^{L/2} \|\sigma'(t)\|^2 \, dt$ . Combinando esto con el área:

$$L^2 - 4\pi A = L \int_{-L/2}^{L/2} (x'(t)^2 + y'(t)^2) \, dt + 4\pi \int_{-L/2}^{L/2} y(t)x'(t) \, dt.$$

Realizando el cambio de variable  $t = Lu$  (escalando el intervalo a  $[-1/2, 1/2]$ ) y completando el cuadrado para los términos en  $x'$  e  $y$ , la expresión se transforma en:

$$L^2 - 4\pi A = \int_{-1/2}^{1/2} (Lx'(Lt) + 2\pi y(Lt))^2 dt + \int_{-1/2}^{1/2} [(Ly'(Lt))^2 - (2\pi y(Lt))^2] dt.$$

Para terminar la prueba, demostremos que el segundo término es no negativo. Definimos  $f(t) = y(Lt)$ , con  $t \in [-1/2, 1/2]$ , por tanto  $f$  es impar, 1-periódica y  $f(-1/2) = f(1/2) = 0$ , por lo que  $f \in \mathcal{G}$ . Aplicando la desigualdad de Wirtinger a  $f(t)$ , sabemos que  $\int_{-1/2}^{1/2} |f'|^2 \geq (2\pi)^2 \int_{-1/2}^{1/2} |f|^2$ . Dado que  $f'(t) = Ly'(Lt)$ , se tiene que  $\int_{-1/2}^{1/2} [(Ly'(Lt))^2 - (2\pi y(Lt))^2] dt \geq 0$ .

Al ser la suma de dos términos no negativos, se tiene que  $L^2 - 4\pi A \geq 0$ , lo que implica  $L^2 \geq 4\pi A$ . Para que se cumpla la igualdad, las dos integrales deben ser 0.

Para que la primera integral se anule, el integrando debe anularse en todo el dominio:  $Lx'(Lt) = -2\pi y(Lt)$ . Si deshacemos el cambio de variable ( $s = Lt$ ), obtenemos la relación entre la derivada horizontal y la posición vertical:  $x'(s) = -\frac{2\pi}{L}y(s)$ .

Hemos visto en la demostración de la desigualdad de Wirtinger que la igualdad se cumple cuando  $f(t) = y(Lt) = R \operatorname{sen}(2\pi t)$ , así que, cuando esto se cumple, la segunda integral se anula. Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos:  $y(s) = R \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{L}\right)$ .

Usando la relación obtenida en la otra integral ( $x' = -\frac{2\pi}{L}y$ ), integrando respecto a  $s$  obtenemos:  $x(s) = R \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) + C$  (Podemos asumir  $C = 0$  mediante una traslación en el eje  $x$ ).

Llegamos así a la conclusión de que la parametrización de la curva que cumple la igualdad es la de una circunferencia.  $\square$

## CAPÍTULO 5

# La fórmula de sumación de Poisson

---

La *fórmula de sumación de Poisson* es una fórmula del análisis de Fourier que posee aplicaciones en diversas áreas. En este capítulo exploraremos dos de ellas; para profundizar en otras utilidades, se recomienda consultar [6].

### 5.1. Fundamentos analíticos y geométricos

A continuación, se introduce la notación y definiciones necesarias para el desarrollo del capítulo, facilitando su consulta y aplicación en los resultados posteriores.

**Definición 5.1.** Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  una función integrable (es decir,  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ). Se define su *transformada de Fourier*, denotada por  $\hat{f}$ , como la función  $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  dada por la integral:

$$\hat{f}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot \vec{x}} d\vec{x},$$

donde  $\vec{\xi} \cdot \vec{x}$  representa el producto escalar. En el caso particular de una variable ( $d = 1$ ), la expresión se reduce a:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Recordamos también la *fórmula de inversión* [9], la cual afirma que la transformada de Fourier de  $\hat{f}(-\vec{\xi})$  recupera la función  $f$  (ver Teorema A.9).

**Definición 5.2.** Sea  $E$  un subconjunto de  $X$ . Se define la *función característica* de  $E$ , denotada por  $\chi_E$ , como la función  $\chi_E : X \rightarrow \{0, 1\}$  dada por:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

**Definición 5.3.** Se define la función *seno cardinal*, denotada por  $\text{sinc}(x)$ , como la función continua dada por:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La relevancia de esta función radica en el siguiente resultado:

**Proposición 5.4.** Sea  $\chi_{[-1/2,1/2]}$ . Su transformada de Fourier viene dada por:

$$\widehat{\chi}_{[-1/2,1/2]}(\xi) = \text{sinc}(\xi).$$

*Demostración.* Aplicando la definición de la transformada de Fourier, tenemos:

$$\widehat{\chi}_{[-1/2,1/2]}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1/2,1/2]}(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Si tomamos  $\xi = 0$ , el exponente es nulo y la integral resulta en la longitud del intervalo, es decir,  $\widehat{\chi}_{[-1/2,1/2]}(0) = 1$ .

Por otro lado, si  $\xi \neq 0$ , utilizando la exponencial compleja obtenemos:

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{e^{-\pi i \xi} - e^{\pi i \xi}}{-2\pi i \xi} = \frac{1}{\pi \xi} \left( \frac{e^{i\pi \xi} - e^{-i\pi \xi}}{2i} \right) = \frac{\text{sen}(\pi \xi)}{\pi \xi}.$$

□

Con el fin de facilitar el cálculo explícito de las transformadas en  $d = 1$  en las secciones posteriores, exponemos sus propiedades principales:

**Proposición 5.5.** Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \neq 0$ . Se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Linealidad:**  $\widehat{\alpha f + \beta g}(\xi) = \alpha \widehat{f}(\xi) + \beta \widehat{g}(\xi)$ .
2. **Traslación:** Si  $h(x) = f(x - b)$ , entonces  $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i b \xi}$ , y si  $h(x) = f(x) e^{2\pi i b x}$ , entonces  $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi - b)$ .
3. **Escalado:** Si  $h(x) = f(ax)$ , entonces  $\widehat{h}(\xi) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$ .
4. **Convolución:** Si  $h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y) dy$ , entonces  $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi)$ .

*Demostración.* La primera resulta inmediatamente de la linealidad de la integral.

Para la segunda, si  $h(x) = f(x - b)$ , realizamos un cambio de variable:

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - b) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \xi (u+b)} du = \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi i b \xi}.$$

Por otro lado, si  $h(x) = f(x) e^{2\pi i b x}$ :

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i b x} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i (\xi - b)x} dx = \widehat{f}(\xi - b).$$

Para la tercera, sea  $u = ax$ , entonces  $dx = du/a$ .

- Si  $a > 0$ , se tiene que  $\widehat{h}(\xi) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \xi (u/a)} du = \frac{1}{a} \widehat{f}(\xi/a)$ .

- Si  $a < 0$ , se tiene que  $\widehat{h}(\xi) = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i \xi(u/a)} du = \frac{1}{|a|} \widehat{f}(\xi/a)$ .

En el caso de la última, aplicando el Teorema de Fubini a la definición de transformada y realizando un cambio de variable, obtenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy \right] e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[ \int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-2\pi i \xi(u+y)} du \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-2\pi i \xi u} du = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \quad \square \end{aligned}$$

Dando por conocido que  $e^{-\pi x^2}$  coincide con su transformada [9, §2.5], veamos un par de ejemplos que sirven como ilustración de estas propiedades.

**Ejemplo 5.6.** Vamos a calcular la transformada de Fourier de  $g(x) = e^{-a^2(x-b)^2}$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Reescribimos  $g(x)$  como  $f(a(x-b))$  donde  $f(u) = e^{-u^2}$ . Puesto que  $e^{-u^2} = e^{-\pi(u/\sqrt{\pi})^2}$ , aplicando la segunda propiedad de la Proposición 5.5 con factor  $1/\sqrt{\pi}$ :

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\pi(\sqrt{\pi}\xi)^2} = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2}.$$

Ahora, aplicando a  $g(x)$  las propiedades 3 y 2 de la Proposición 5.5 con factor escala  $a$  y el parámetro de traslación  $b$  respectivamente, se obtiene:

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} e^{-\pi^2(\xi/a)^2} e^{-2\pi i b \xi} = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{a^2} - 2\pi i b \xi\right).$$

**Ejemplo 5.7.** Definimos la *función tienda*  $T(x)$  como  $T(x) := \max(1-|x|, 0)$ . Geométricamente, el área encerrada al deslizar un rectángulo de lado 1 sobre sí mismo genera una forma triangular de base 2 y altura 1, por lo que, si definimos  $I = [-1/2, 1/2]$ , tenemos que  $T(x) = (\chi_I * \chi_I)(x)$ . Usando la Proposición 5.4 y la propiedad 4 de la Proposición 5.5, podemos entonces afirmar que:

$$\widehat{T}(\xi) = \text{sinc}^2(\xi).$$

Para poder comenzar a enunciar y demostrar la fórmula, necesitamos dar algunas definiciones más:

**Definición 5.8.** Se dice que  $\Lambda$  es un *retículo* en  $\mathbb{R}^d$  si  $\Lambda = \{n_1 \vec{v}_1 + \dots + n_d \vec{v}_d \mid n_j \in \mathbb{Z}\}$  para ciertos vectores fijados  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d \in \mathbb{R}^d$  linealmente independientes. De una manera más concisa, un retículo es un conjunto de la forma  $A\mathbb{Z}^d$  con  $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$  (las matrices  $d \times d$  no singulares).

**Definición 5.9.** Se llama *covolumen* de  $\Lambda$  al valor  $V(\Lambda) = |\det(A)|$ . La motivación del nombre reside en que  $\Lambda$  recubre el espacio  $\mathbb{R}^n$  mediante la repetición de “teselas” idénticas denominadas *dominios fundamentales*. Así,  $V(\Lambda)$  coincide con el volumen del paralelepípedo  $n$ -dimensional generado por los vectores de la base de  $\Lambda$ , el cual constituye uno de estos dominios [25].

**Definición 5.10.** Se llama *retículo dual* a  $\Lambda^* = (A^t)^{-1} \mathbb{Z}^d$ , ya que se calcula de manera análoga a la base dual de un espacio vectorial.

## 5.2. El teorema fundamental en retículos

Una vez establecido el marco teórico sobre retículos y transformadas, procedemos a presentar el resultado central de este capítulo: la identidad que vincula la suma de una función sobre un retículo con la suma de su transformada sobre el retículo dual.

**Teorema 5.11** (Fórmula de sumación de Poisson). *Si  $\Lambda$  es un retículo y  $f$  está en la clase de Schwartz (de funciones de decaimiento rápido) se cumple*

$$\sum_{\vec{r} \in \Lambda} f(\vec{r}) = \frac{1}{V(\Lambda)} \sum_{\vec{r} \in \Lambda^*} \widehat{f}(\vec{r}).$$

En realidad, pedir que  $f$  esté en la clase de Schwartz es más fuerte de lo necesario. La fórmula de sumación de Poisson sigue siendo válida bajo condiciones de regularidad y decaimiento más débiles. Sin embargo, para simplificar la exposición, en este capítulo trabajaremos con funciones de la clase de Schwartz, lo que garantiza la convergencia absoluta de las series y permite justificar los intercambios de suma e integral que aparecen en la demostración.

*Demostración.* Si  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ , entonces  $\sum_{\vec{r} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{r}) = \sum_{\vec{r} \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\vec{r})$ . Veamos ahora que si se cumple para este retículo se cumple para un retículo general.

Sea  $\Lambda = A\mathbb{Z}^d$  con  $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$  y sea  $g$  una función en la clase de Schwartz. Si Definimos la función auxiliar  $f(\vec{r}) = g(A\vec{r})$ , tenemos que:

$$\sum_{\vec{r} \in \Lambda} g(\vec{r}) = \sum_{\vec{r} \in \mathbb{Z}^d} g(A\vec{r}) = \sum_{\vec{r} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{r}) = \sum_{\vec{r} \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\vec{r}). \quad (5.1)$$

Calculamos ahora la transformada de Fourier de  $f$  procediendo de manera análoga a la demostración de la propiedad 3 de la Proposición 5.5:

$$\widehat{f}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} g(A\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot \vec{x}} d\vec{x} = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^d} g(\vec{y}) e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot (A^{-1}\vec{y})} d\vec{y}.$$

Utilizando  $\vec{\xi} \cdot (A^{-1}\vec{y}) = ((A^t)^{-1}\vec{\xi}) \cdot \vec{y}$  y la definición de retículo dual en (5.1), obtenemos:

$$\widehat{f}(\vec{\xi}) = \frac{1}{V(\Lambda)} \widehat{g} \left( (A^t)^{-1}\vec{\xi} \right) \implies \sum_{\vec{r} \in \Lambda} g(\vec{r}) = \frac{1}{V(\Lambda)} \sum_{\vec{r} \in \mathbb{Z}^d} \widehat{g} \left( (A^t)^{-1}\vec{r} \right) = \frac{1}{V(\Lambda)} \sum_{\vec{r} \in \Lambda^*} \widehat{g}(\vec{r}).$$

Ahora consideramos  $F(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{x} + \vec{m})$ . Dado que  $F$  es 1-periódica en cada variable, admite un desarrollo en serie de Fourier de la forma  $F(\vec{x}) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\vec{n}} e^{2\pi i \vec{n} \cdot \vec{x}}$ . Los coeficientes  $c_{\vec{n}}$  se calculan como vimos en (4.1), definiendo  $I = [-1/2, 1/2]^d$ , intercambiando el sumatorio y la integral ( $f$  es de clase Schwartz) y realizando un cambio de variable:

$$c_{\vec{n}} = \int_I \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{\xi} + \vec{m}) e^{-2\pi i \vec{n} \cdot \vec{\xi}} d\vec{\xi} = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} \int_{I + \vec{m}} f(\vec{u}) e^{-2\pi i \vec{n} \cdot (\vec{u} - \vec{m})} d\vec{u}.$$

Como  $e^{2\pi i \vec{n} \cdot \vec{m}} = 1$  para todo  $\vec{n}, \vec{m} \in \mathbb{Z}^d$ , y la unión de  $I + \vec{m}$  recubre  $\mathbb{R}^d$  sin solapamientos, resulta:

$$c_{\vec{n}} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{u}) e^{-2\pi i \vec{n} \cdot \vec{u}} d\vec{u} = \widehat{f}(\vec{n}).$$

Sustituyendo los coeficientes en la serie de Fourier original, y evaluando en  $\vec{x} = \vec{0}$ , se obtiene la fórmula de sumación de Poisson se cumple para el retículo  $\mathbb{Z}^d$ :

$$\sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{x} + \vec{m}) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\vec{n}) e^{2\pi i \vec{n} \cdot \vec{x}} \implies \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{m}) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\vec{n}).$$

□

### 5.3. Representación de enteros como suma de cuadrados

En teoría de números se utiliza a veces el Teorema 5.11 para contar de una manera no convencional que puede ser más ventajosa. Comencemos con un ejemplo que involucra la definición de la siguiente función:

**Definición 5.12.** Llamamos  $r_d(N)$  al número de representaciones como suma de cuadrados (de enteros), es decir, la función aritmética

$$r_d(N) = \{ \vec{n} \in \mathbb{Z}^d : N = n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_d^2 \}.$$

**Proposición 5.13.** Para cualquier  $\alpha > 0$ , se cumple la identidad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_d(n) e^{-\pi \alpha n} = \alpha^{-d/2} \sum_{n=0}^{\infty} r_d(n) e^{-\pi n/\alpha}.$$

*Demostración.* Consideramos  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(\vec{x}) = e^{-\pi \alpha \|\vec{x}\|^2}$ . Como se puede reescribir como un producto de funciones con variables separadas usando las propiedades de la exponencial, aplicando el Teorema de Fubini y teniendo en cuenta la propiedad 3 de la Proposición 5.5, su transformada de Fourier viene dada por:

$$\hat{f}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi \alpha \|\vec{x}\|^2} e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot \vec{x}} d\vec{x} = \alpha^{-d/2} e^{-\pi \|\vec{\xi}\|^2/\alpha}.$$

Aplicando la fórmula de sumación de Poisson al retículo  $\mathbb{Z}^d$ :

$$\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{n}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\vec{k}) \implies \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} e^{-\pi \alpha \|\vec{n}\|^2} = \alpha^{-d/2} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^d} e^{-\pi \|\vec{k}\|^2/\alpha}.$$

Agrupamos los términos de los sumatorios según el valor de la norma al cuadrado. Para cada entero  $n \geq 0$ , el número de vectores  $\vec{m} \in \mathbb{Z}^d$  tales que  $\|\vec{m}\|^2 = n$  es  $r_d(n)$ , y obtenemos la identidad deseada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_d(n) e^{-\pi \alpha n} = \alpha^{-d/2} \sum_{n=0}^{\infty} r_d(n) e^{-\pi n/\alpha}.$$

□

Notemos que para  $\alpha$  pequeño la primera suma es costosa de aproximar computacionalmente porque converge muy lento, mientras que la segunda lo hace muy rápido.

Tras haber introducido la fórmula, vamos a estudiar algunos resultados derivados.

## 5.4. La proposición de Minkowski

La primera aplicación es un resultado de H. Minkowski en *geometría de números*, no tan famoso como otros suyos en este campo que combina geometría y aritmética.

**Proposición 5.14** (Minkowski). *Sea  $A$  una matriz real  $d \times d$  con  $0 < \det(A) < 1$ , entonces existe un vector entero  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$  tal que  $0 \neq \|A\vec{n}\|_\infty < 1$ .*

*Demostración.* Sea  $f(\vec{x}) = T(x_1)T(x_2) \cdots T(x_d)$ , donde  $T$  es la función tienda definida en el Ejemplo 5.7. Es inmediato que  $f(\vec{0}) = 1$  y que  $f(\vec{x}) > 0$  si y solo si  $\|\vec{x}\|_\infty < 1$ . Como  $f(x)$  es producto de funciones de variables separadas, aplicando Fubini, su transformada de Fourier queda  $\widehat{f}(\vec{\xi}) = \prod_{j=1}^d \text{sinc}^2(\xi_j)$ , lo que implica  $\widehat{f}(\vec{0}) = 1$  y  $\widehat{f}(\vec{\xi}) \geq 0$  para todo  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^d$ . En consecuencia, aplicando la fórmula de sumación de Poisson al retículo  $\Lambda = AZ^d$  se tiene que

$$\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} f(A\vec{n}) = \sum_{\vec{r} \in \Lambda} f(\vec{r}) = \frac{1}{\det(A)} \sum_{\vec{r} \in \Lambda^*} \widehat{f}(\vec{r}) \geq \frac{1}{\det(A)} \widehat{f}(\vec{0}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Dado que  $0 < \det(A) < 1$ , se sigue que  $\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} f(A\vec{n}) > 1$ . Como el término para  $\vec{n} = \vec{0}$  contribuye con  $f(\vec{0}) = 1$ , debe existir necesariamente algún vector entero  $\vec{n} \neq \vec{0}$  tal que  $f(A\vec{n}) > 0$ . Por la definición de  $f$ , esto equivale a decir que  $0 < \|A\vec{n}\|_\infty < 1$ .  $\square$

## 5.5. El Teorema de Shannon

Lo siguiente es una aplicación clásica del caso  $d = 1$  con gran impacto en ingeniería. Según el teorema de Shannon [18] (probado inicialmente por Whittaker [22]), una señal de banda limitada, es decir, con transformada de Fourier con soporte compacto, puede reconstruirse íntegramente a partir de sus muestras periódicas, siempre que la frecuencia de muestreo sea suficientemente elevada.

**Teorema 5.15** (de muestreo de Shannon). *Sea  $f$  tal que  $\widehat{f} \in C^2(\mathbb{R})$  y  $\widehat{f}$  tiene soporte incluido en  $[-B, B]$ ,  $B > 0$ . Si  $\nu \geq 2B$  entonces se cumple*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\nu) \text{sinc}(\nu t - n).$$

En [12] hay muchos comentarios históricos sobre este teorema y otros relacionados.

*Demostración.* Definimos  $g(x) = f(x/\nu)e^{-2\pi i(u/\nu)x}$ , donde  $u \in \mathbb{R}$ . Aplicando las propiedades de escalado y traslación de la transformada de Fourier, obtenemos:

$$\widehat{g}(\xi) = \nu \widehat{f}(\nu(\xi + u/\nu)) = \nu \widehat{f}(\nu\xi + u).$$

Usando el Teorema 5.11 para el retículo  $\mathbb{Z}$ , obtenemos la siguiente identidad:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n/\nu) e^{-2\pi i u n/\nu} = \nu \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n\nu + u) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(u + n\nu) = \nu^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n/\nu) e^{-2\pi i u n/\nu}. \quad (5.2)$$

Puesto que  $\text{sop}(\widehat{f}) \subseteq [-B, B]$ , las réplicas de la transformada  $\widehat{f}(u + n\nu)$  en la suma izquierda no se solapan, ya que la distancia entre los centros es  $\nu \geq 2B$ . Si definimos de nuevo  $I = [-1/2, 1/2]$ , al multiplicar en (5.2) por  $\chi_I(u/\nu)$ , en el lado izquierdo solo el término con  $n = 0$  es no nulo, ya que para  $|u| \leq \nu/2$  y  $n \neq 0$ , se tiene que  $|u + n\nu| \geq \nu/2 \geq B$ , por lo que  $u + n\nu$  está fuera del soporte de  $\widehat{f}$  y, por tanto,  $\widehat{f}(u + n\nu) = 0$ . Resulta así

$$\widehat{f}(u) = \chi_I(u/\nu) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n/\nu) e^{-2\pi i u n / \nu}.$$

De nuevo, multiplicando por  $e^{2\pi i u t}$  a ambos lados e integrando respecto a  $u$  tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u) e^{2\pi i u t} du = \frac{1}{\nu} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n/\nu) \int_{-\nu/2}^{\nu/2} e^{2\pi i u (t - n/\nu)} du.$$

Por la fórmula de inversión (Teorema A.9), el lado izquierdo es  $f(t)$ . Para la parte derecha, realizando un cambio de variable y utilizando la Proposición 5.4, obtenemos:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\nu) \text{sinc}(\nu t - n).$$

□

Terminemos analizando cómo funciona el Teorema 5.15 en un ejemplo aproximado.

**Ejemplo 5.16.** Sea  $f(x) = 2e^{-\pi(4x+1)^2} - 2e^{-\pi(4x-1)^2}$ . Por las propiedades de linealidad, escalado y traslación de la Propiedad 5.5, su transformada es:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} e^{-\pi\xi^2/16} \left( e^{i\pi\xi/2} - e^{-i\pi\xi/2} \right) = \frac{1}{2} e^{-\pi\xi^2/16} 2i \text{sen}(\pi\xi/2) = i \text{sen}(\pi\xi/2) e^{-\pi\xi^2/16}.$$

Observamos que  $|\widehat{f}(\xi)| = |\text{sen}(\pi\xi/2)| e^{-\pi\xi^2/16}$  es despreciable fuera de  $[-5, 5]$ . Mientras que el máximo ocurre cerca de  $\xi = 1$  con  $|\widehat{f}(1)| \approx 0,82$ , en el borde del intervalo  $|\widehat{f}(5)| \approx 0,0074$ . Dado que el valor máximo es más de cien veces superior al valor en  $\xi = 5$  ( $\frac{0,82}{0,0074} \approx 110,8$ ), concluimos que  $\widehat{f}$  se comporta como una función de soporte compacto en  $[-5, 5]$ . Así, el Teorema 5.15 garantiza una reconstrucción fiel de  $f$  para una frecuencia de muestreo  $\nu \geq 10$ .

Para comprobarlo, desarrollamos un código en Python que genere las reconstrucciones para distintos valores de  $\nu$ . Dado que  $f$  es una combinación lineal de  $e^{-\pi(4t \pm 1)^2}$ , sus valores en los puntos de muestreo  $f(n/\nu)$  decrecen de forma exponencial a medida que  $|n|$  aumenta. Por ejemplo, para  $\nu = 10$  y  $n = 20$ , el valor  $f(2)$  es del orden de  $10^{-11}$ , lo que lo hace despreciable frente al máximo de la función, lo que hace razonable truncar la serie en  $n = 20$ .

Listing 5.1: Código para generar las gráficas comparativas.

```

1 import numpy as np, matplotlib.pyplot as plt
2
3 def f(t):

```

```

4     return 2*np.exp(-np.pi * (4*t + 1)**2) - 2*np.exp(-np.pi *
5         (4*t - 1)**2)
6
7 def shannon_approx(t, nu, n_terms=20):
8     n, res = np.arange(-n_terms, n_terms + 1), 0
9     for val_n in n:
10        res += f(val_n / nu) * np.sinc(nu * t - val_n)
11
12 t_vals, f_original = np.linspace(-2/3, 2/3, 400), f(t_vals)
13 nus = [4, 6, 8, 10]
14 fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(12, 8))
15
16 for i, nu in enumerate(nus):
17     ax = axes[i//2, i%2]
18     f_rec = shannon_approx(t_vals, nu)
19     ax.plot(t_vals, f_original, 'k', label='Original', lw=2)
20     ax.plot(t_vals, f_rec, 'r--', label=f'Reconstrucción (nu={nu
21         })')
22     ax.set_title(f'Frecuencia de muestreo nu = {nu}')
23     ax.legend()

```

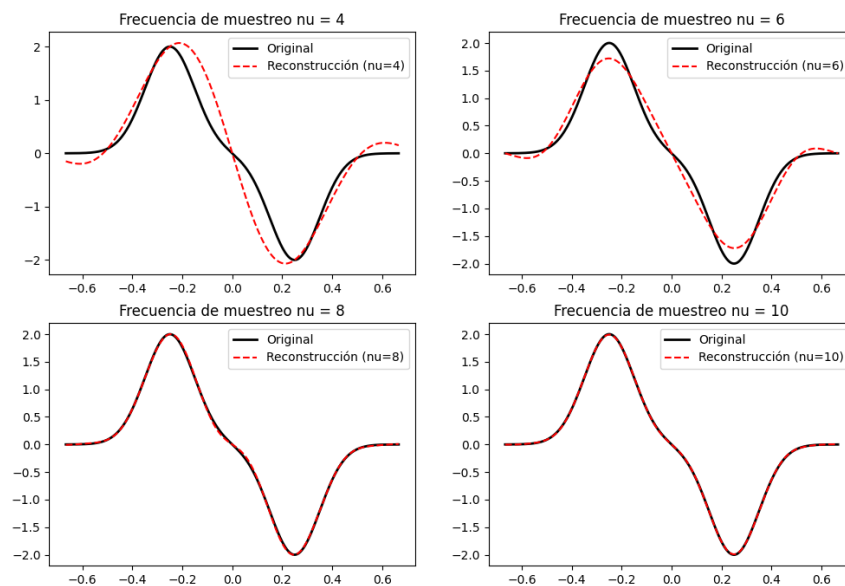


Figura 5.1: Gráficas generadas por el código anterior.

Como se observa en la Figura 5.1, la fidelidad de la reconstrucción de Shannon depende críticamente de la relación entre  $\nu$  y el soporte efectivo de  $\hat{f}$ . Para  $\nu = 10$ , es decir, cuando se cumplen las hipótesis del Teorema 5.15, la identidad se verifica con alta precisión, confirmando que las frecuencias fuera de  $[-5, 5]$  son despreciables.

# APÉNDICE A

## Resultados auxiliares

---

En este apéndice recopilamos algunas definiciones, lemas y demostraciones auxiliares que se utilizan a lo largo del texto. Aunque la mayoría de estos resultados son bien conocidos, los incluimos aquí para mayor claridad y comodidad del lector.

### A.1. Análisis de la tercera derivada de $f(x)$

Sea  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ , vamos a ver que  $-f'''(x)$  es positiva y decreciente en  $[11, \infty)$ . Consideramos el desarrollo de  $f(x)$  como una serie de potencias de  $x^{-2}$  para  $|x| > 1$ :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{1+x^{-2}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{-2n-2}.$$

Como la serie converge uniformemente en  $[11, \infty)$ , se puede derivar término a término respecto a  $x$  tres veces para obtener:

$$-f'''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n(x), \quad \text{donde } a_n(x) = (2n+2)(2n+3)(2n+4)x^{-2n-5}.$$

Para un  $x \geq 11$  fijo, la serie  $\sum (-1)^n a_n(x)$  es una serie alternada. Analizamos el cociente de términos consecutivos:

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{(2n+4)(2n+5)(2n+6)}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)} \cdot \frac{x^{-2n-7}}{x^{-2n-5}} = \frac{(2n+5)(2n+6)}{(2n+2)(2n+3)} \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Como  $R_n = \frac{(2n+5)(2n+6)}{(2n+2)(2n+3)}$  es decreciente, cumple que  $R_n \leq R_0 \leq 5$ , por lo tanto para  $x \geq 11$ , se tiene que  $\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \leq \frac{5}{x^2} \leq \frac{5}{121} < 1$ , entonces la sucesión  $\{a_n(x)\}$  es positiva, monótona decreciente y tiende a 0. Por el criterio de Leibnitz, la serie tiene el signo del primer término,  $a_0(x) = \frac{24}{x^5} > 0$ , por lo tanto  $-f'''(x) > 0$  con  $x \geq 11$ .

Además, derivando de nuevo término a término

$$(-f'''(x))' = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n(x), \quad \text{donde } b_n(x) = (2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)x^{-2n-5}.$$

Como en el caso anterior, se puede comprobar que  $\frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)} \leq \frac{7}{121} < 1$  y, una vez más, por Leibnitz tenemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n(x) > 0$  y, por tanto,  $(-f'''(x))' < 0$ . De esta forma, concluimos que  $-f'''(x)$  es decreciente en  $[11, \infty)$ .

## A.2. Funciones holomorfas, meromorfas y residuos

**Teorema A.1** (Teorema Integral de Cauchy). *Sea  $f$  una función holomorfa en un conjunto abierto conexo  $\Omega$ . Si  $\gamma$  es un contorno cerrado simple tal que  $\gamma$  y su interior están contenidos en  $\Omega$ , entonces:*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Definición A.2.** Dado un abierto  $\Omega$  del plano complejo, un punto  $z_0 \in \Omega$  es una *singularidad aislada* de  $f$ , si  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ . Si  $z_0$  es una singularidad aislada de  $f$ , solo puede ocurrir una de las tres siguientes posibilidades:

1.  $z_0$  es una *singularidad evitable* de  $f$  si  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z) = 0$ .
2.  $z_0$  es un *polo* de  $f$  si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .
3. En caso contrario (no se cumple ninguna de las dos anteriores),  $z_0$  es una *singularidad esencial* de  $f$ .

**Definición A.3.** Una función  $f$  es *meromorfa* en el abierto  $\Omega$  si sólo tiene singularidades aisladas en  $\Omega$ , y estas son evitables o polos.

**Teorema A.4** (Desarrollo de Laurent). *Sea  $f$  una función holomorfa en un anillo  $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$  con  $0 \leq r < R \leq \infty$ . Entonces  $f$  admite en  $A$  un desarrollo en serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

que converge uniformemente sobre compactos de  $A$ .

Además, los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

donde  $\gamma$  es cualquier circunferencia centrada en  $z_0$  contenida en el anillo  $A$  y orientada positivamente.

### Caracterización de las singularidades en términos de la Serie de Laurent.

Si  $z_0$  es una singularidad aislada de  $f$ , entonces

1.  $f$  tiene una singularidad evitable en  $z_0$  si y sólo si  $a_n = 0$  para todo  $n < 0$ , es decir,  $f$  tiene una serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

en un disco  $D(z_0, r)$ .

2.  $f$  tiene un polo de orden  $k$  en  $z_0$  si y sólo si existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{-k} \neq 0$  y  $a_n = 0$  para todo  $n < -k$ , es decir,  $f$  tiene una serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad a_{-k} \neq 0,$$

en un disco “perforado”  $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ .

3.  $f$  tiene en  $z_0$  una singularidad esencial si y sólo si  $f$  tiene una serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

con infinitos coeficientes  $a_{-n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) distintos de cero.

**Definición A.5.** Sea  $f$  una función holomorfa en  $0 < |z - z_0| < R$  y sea  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  su desarrollo de Laurent en  $z_0$ . El número

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1}$$

se denomina *residuo de  $f$  en  $z_0$* .

**Proposición A.6** (Residuo en un polo simple). *Sea  $f$  una función meromorfa en un entorno de  $z_0$  y supongamos que  $z_0$  es un polo de orden 1 (es decir, un polo simple) de  $f$ . Entonces*

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

*Demostración.* Por el Teorema A.4 y la caracterización de un polo simple en términos de la Serie de Laurent,  $f$  admite un desarrollo de Laurent en un entorno de  $z_0$  de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n.$$

Multiplicando por  $z - z_0$ , obtenemos

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0) \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n.$$

Entonces,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = a_{-1} = \text{Res}(f, z_0).$$

□

### A.3. El cuadrado de la función $\zeta$

Hemos introducido ya en el Capítulo 2 la notación de  $\zeta(s)$ . Vamos a demostrar en esta sección una identidad importante asociada a esta última. Pero antes, introduzcamos una definición:

**Definición A.7.** Llamamos  $\tau(n)$  a la función que cuenta el número de divisores positivos de  $n$ , con  $n \in \mathbb{Z}^+$ , es decir,

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

**Proposición A.8.** Para todo  $s \in \mathbb{C}$  con  $\Re(s) > 1$ , se cumple la identidad

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}.$$

*Demostración.* Puesto que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  converge absolutamente en  $\Re(s) > 1$ , podemos multiplicarla término a término y reordenar los sumandos, de tal forma que

$$\zeta(s)^2 = \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j^s k^s}.$$

Definimos  $n = j \cdot k$ . Para un valor de  $n$  fijo, los pares  $(j, k)$  que cumplen esta condición son precisamente aquellos donde  $j$  es un divisor de  $n$ , en consecuencia,  $k = n/j$ . Por tanto, para cada  $n$  hay exactamente  $\tau(n)$  pares  $(j, k)$  tal que  $n = j \cdot k$  y, en consecuencia,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j^s k^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \left( \sum_{j \cdot k = n} 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}.$$

□

## A.4. La transformada de Fourier

En esta sección, enunciaremos algunos conceptos relacionados con la transformada de Fourier que nos servirán como soporte para los desarrollos realizados en el Capítulo 5.

**Teorema A.9** (Fórmula de Inversión de Fourier). Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  tal que su transformada de Fourier  $\widehat{f}$  también es integrable ( $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ). Entonces,  $f$  puede recuperarse a partir de  $\widehat{f}$  mediante la expresión:

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\vec{\xi}) e^{2\pi i \vec{x} \cdot \vec{\xi}} d\vec{\xi}.$$

En el caso particular de una variable ( $d = 1$ ), la fórmula de inversión es:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

---

# Bibliografía

---

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.
- [2] T. M. Apostol. *Mathematical analysis*. 2nd ed. World Student Series Edition. Reading, Mass. etc.: Addison -Wesley Publishing Company. 483 p. \$ 14.95 (1974)., 1974.
- [3] T. M. Apostol. An elementary view of Euler's summation formula. *Amer. Math. Monthly*, 106(5):409–418, 1999.
- [4] K. E. Atkinson. *An introduction to numerical analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1989.
- [5] A. F. Beardon. Sums of powers of integers. *Amer. Math. Monthly*, 103(3):201–213, 1996.
- [6] F. Chamizo and D. Raboso. La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos. *Materials matemàtics*, pages 1–27, 2017. <https://mat.uab.cat/web/matmat/wp-content/uploads/sites/23/2020/05/v2017n02.pdf>.
- [7] T. W. Chaundy and A. E. Joliffe. The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)*, 15:214–216, 1916.
- [8] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Complex variables and applications*. McGraw-Hill Book Co., New York, fourth edition, 1984.
- [9] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier series and integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 14. Academic Press, New York-London, 1972.
- [10] G. Ferraro. Some aspects of Euler's theory of series: inexplicable functions and the Euler-Maclaurin summation formula. *Historia Math.*, 25(3):290–317, 1998.
- [11] G. B. Folland. *Fourier analysis and its applications*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992.
- [12] J. R. Higgins. Five short stories about the cardinal series. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 12(1):45–89, 1985.

- [13] Y. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2004.
- [14] T. W. Körner. *Fourier analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2022. With a foreword by T. Tao.
- [15] S. Mills. The independent derivations by Leonhard Euler and Colin Maclaurin of the Euler-Maclaurin summation formula. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 33(1-3):1–13, 1985.
- [16] D. S. Mitrinović and P. M. Vasić. *Analytic inequalities*, volume 165 of *Grundlehren Math. Wiss.* Berlin: Springer-Verlag, 1970.
- [17] R. Osserman. The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(6):1182–1238, 1978.
- [18] C. E. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 37(1):10–21, 1949.
- [19] M. Spivak. *Calculus*. Cambridge: Cambridge University Press, corrected 3rd ed. edition, 2006.
- [20] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier analysis*, volume 1 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. An introduction.
- [21] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [22] E. T. Whittaker. On the functions which are represented by the expansions of the interpolation-theory. *Proc. R. Soc. Edinburgh*, 35:181–194, 1914.
- [23] Wikipedia contributors. Euler’s constant — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler%27s\\_constant&oldid=1328532599](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler%27s_constant&oldid=1328532599), 2025.
- [24] Wikipedia contributors. Jordan’s inequality — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Jordan%27s\\_inequality&oldid=1285635807](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Jordan%27s_inequality&oldid=1285635807), 2025.
- [25] Wikipedia contributors. Lattice (group) — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lattice\\_\(group\)&oldid=1335361541](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lattice_(group)&oldid=1335361541), 2026. [Online; accessed 7-March-2026].
- [26] Wikipedia contributors. List of trigonometric identities — Wikipedia, the free encyclopedia. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List\\_of\\_trigonometric\\_identities&oldid=1337063226](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_trigonometric_identities&oldid=1337063226), 2026. [Online; accessed 12-February-2026].