



---

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

---

# Geometría y Relatividad General: una introducción.

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Departamento de Matemáticas



*Autor:* Carlos Gómez Cabello

*Tutor:* Fernando Chamizo Lorente

Curso 2018-2019

*Se marchita la virtud sin adversario.*  
Séneca, *De Providentia*

# Resumen

Si bien las revolucionarias modificaciones introducidas por parte de la Relatividad Especial en la manera de entender el espacio y el tiempo fueron incontestables, ésta resultaba un tanto insuficiente a la hora de justificar y superar las más que evidentes limitaciones planteadas por la teoría newtoniana en su explicación de la naturaleza Universo. Consciente de ello, Einstein inició en 1905 una auténtica travesía intelectual en búsqueda de la que posteriormente sería conocida como Relatividad General. La sustanciación matemática de todas las implicaciones físicas que de ella se desprendieron fueron las *ecuaciones de campo*, publicadas por Albert Einstein en 1915, y elemento vertebrador de la presente memoria. De esta manera, iniciamos la exposición tratando de reproducir el innegable *tour de force* intelectual acometido por el genio alemán que habría de llevarle a la intuición de la Relatividad General: “*la idea más feliz de mi vida*” en palabras del propio Einstein. La sección concluye con la introducción del *límite newtoniano*, recurrente en las cuestiones posteriores de la memoria y de gran utilidad gracias a la simplificación computacional que supone en ciertos contextos. A continuación, tras introducir las pertinentes herramientas de Geometría Riemanniana, se procede a la deducción de las insignes ecuaciones de campo. La sintética y elegante formulación de las mismas, contrasta fuertemente con su complejidad. Tanto es así, que las soluciones exactas que albergan un verdadero interés físico brillan por su escasez. De esta guisa, la memoria concluye con el estudio cualitativo y analítico de dos de las soluciones conocidas más notables: la *solución de Schwarzschild*, desde la que se presentarán los llamados test clásicos de la Relatividad General, y la *solución de Kerr*.



# Abstract

In spite of the undeniable and revolutionary modifications introduced by Einstein's Special Relativity in the understanding of space and time, it did not suffice to overcome the obvious limitations showed by Newton's theory in their explanation of the Universe's nature. Einstein, aware of it, initiated a true intellectual journey in search of the later known as General Relativity. The physical conclusions deduced from it crystallized in the *Einstein's field equations*, published in 1915 and cornerstone of the document. We, thus, begin the paper reproducing the incontestable mental *tour de force* carried out by the german genius which took him to the intuition of General Relativity: "*The happiest thought of my life*" as Einstein stated. The section concludes with an analytical treatment of the so-called *newtonian limit*, recurring in the forthcoming chapters and useful tool to simplify computations in certain contexts. We then proceed to introduce the corresponding Riemannian Geometry definitions letting us to properly infer the field equations. Nonetheless, the syntetic and elegant formulation of these are in sharp contrast with their complexity. This results in a small number of exact solutions with a considerable physical significance. We conclude the exposition with a qualitative and analytical study of two of the most prominent solutions: Schwarzschild's, which will let us illustrate the *classical tests of General Relativity*, and the one due to Kerr.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 La Relatividad General</b>	<b>3</b>
1.1 Hacia una teoría gravitatoria . . . . .	3
1.2 El límite newtoniano . . . . .	13
<b>2 Las ecuaciones de campo</b>	<b>15</b>
2.1 La derivada covariante . . . . .	15
2.2 Tensor de Riemann y tensor de Ricci . . . . .	20
2.3 Deducción de las ecuaciones de campo . . . . .	27
2.3.1 El tensor energía-momento . . . . .	27
<b>3 La solución de Schwarzschild</b>	<b>31</b>
3.1 Deducción de la solución de Schwarzschild . . . . .	31
3.2 Geodésicas radiales en la solución de Schwarzschild . . . . .	37
3.3 Test clásicos de la Relatividad General . . . . .	39
3.3.1 Corrimiento al rojo gravitatorio . . . . .	40
3.3.2 La rotación del perihelio de Mercurio . . . . .	41
3.3.3 La deflexión de la luz . . . . .	44
<b>4 La solución de Kerr</b>	<b>47</b>
4.1 Vectores de Killing y <i>frame dragging</i> . . . . .	47
4.2 Singularidades, horizontes y coordenadas . . . . .	49
4.3 Proceso de Penrose . . . . .	52
<b>A De Maxwell a la Relatividad Especial</b>	<b>53</b>
A.1 Ecuaciones de Maxwell y transformaciones de Lorentz . . . . .	53
A.2 Consecuencias cinemáticas de las transformaciones de Lorentz . . . . .	57
<b>B Bases de Geometría Diferencial</b>	<b>59</b>
B.1 Introducción a la Geometría Riemanniana . . . . .	62

<b>C</b>		<b>67</b>
C.1	Vectores tangentes espaciales, temporales y nulos . . . . .	67
C.2	Breve diccionario terminológico . . . . .	67
<b>D</b>		<b>69</b>
D.1	Símbolos de Christoffel y cambio de carta . . . . .	69
D.2	Sistema inercial local: un lema . . . . .	69
D.3	Ejercicios . . . . .	70
<b>E</b>		<b>73</b>
E.1	Ejemplos . . . . .	73
E.2	Breves reseñas históricas . . . . .	75
	E.2.1 Corrimiento hacia el rojo gravitatorio . . . . .	75
	E.2.2 Deflexión de la luz . . . . .	75
<b>F</b>		<b>77</b>
F.1	Frame dragging en el plano ecuatorial . . . . .	77



# Introducción

La publicación de las célebres *ecuaciones de campo* en 1915 por parte del científico alemán Albert Einstein, supuso una ruptura definitiva con la manera hasta entonces vigente de entender la gravedad y el espacio-tiempo en particular, y, el Universo, en general. Esta novedosa perspectiva, inauguró el enfoque geométrico del Universo, estableciendo un íntimo vínculo entre Geometría y Relatividad General: la una no se entiende sin la otra. Es en virtud de este nexo que cabe interpretar las distintas lecturas que la memoria, como si de una modesta versión de *Rayuela* se tratara, ofrece. La primera de ellas, pensada para el lector poco familiarizado con los rudimentos de la Relatividad Especial y de la Geometría Diferencial, comienza con la lectura introductoria del Apéndice A, dedicado a la deducción de las transformaciones de Lorentz y sus consecuencias cinemáticas. Por su parte, la lectura del Apéndice B, al presentar los conocimientos geométricos mínimos necesarios, que no suficientes, se torna imprescindible para la correcta comprensión de la ulterior exposición. Naturalmente, el lector instruido podrá dar comienzo directamente por el capítulo primero. El resto de Apéndices quedan consagrados a recoger todo el contenido que, por cuestiones de extensión, no ha podido quedar reflejado en el cuerpo principal. Por lo general, se trata de resultados que completan, sistematizan o pulen distintas afirmaciones que, desde el punto de vista formal, pueden resultar menos rigurosas. También es posible encontrar diversos ejemplos ilustrativos que ayudan a fijar las distintas ideas y conceptos.



# Capítulo 1

## La Relatividad General

El propósito del presente capítulo no es otro que el de tratar de guiar la intuición, en palabras del propio Einstein, por el camino "psicológicamente natural" ([Ein97]), de tal modo que sea posible la introducción de la Relatividad General en tanto que solución lógica a las objeciones que plantearemos en las próximas páginas. De esta manera, cabe señalar que no se tratará de un capítulo al uso desde un punto de vista matemático. Si bien, habrá cabida para algunas definiciones y ejemplos analíticos que permitirán fijar la intuición, el formato será eminentemente expositivo y, sobre todo, didáctico. En lo que a las fuentes se refiere, la sección se nutre principalmente de la recopilación de los escritos originales de Einstein ([Ein97]) y de las notas [Cha01]. En menor medida, se ha recurrido a otros manuales tales como [Wei72] o [Sch85] a modo de complemento.

### 1.1 Hacia una teoría gravitatoria

Antes de entrar en materia, recordemos las principales ideas asociadas a la Relatividad Especial. Esta teoría fue la original solución que Einstein brindó para salvar el manifiesto conflicto existente entre la cinemática y las ecuaciones de Maxwell<sup>1</sup>. El *principio de relatividad especial* afirma que dado un sistema de coordenadas  $K$ , escogido tal que las leyes físicas se verifican, entonces, estas mismas leyes se cumplen para cualquier otro sistema coordenado  $K'$  desplazándose con velocidad constante respecto a  $K$ . O si se prefiere una formulación más sintética e intuitiva: "las leyes de la Física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales, esto es, en los sistemas no acelerados". A la propiedad anterior se la conoce como *covarianza*, la cual, junto con la constancia de la velocidad de la luz *in vacuo*, a saber: cualquier rayo de luz se propaga en un sistema de coordenadas en reposo relativo con velocidad constante  $c$ , independientemente de que haya sido emitido por un cuerpo estacionario o por uno en movimiento, constituyen la piedra angular de la Relatividad Especial de Einstein. Ésta, comportaría una profunda reformulación de las leyes relacionadas con el movimiento de cuerpos y relojes, de implicaciones nada baladíes.

---

<sup>1</sup>Véase el Apéndice A.

No obstante, pese a las rompedoras implicaciones desprendidas de la Relatividad Especial a la hora de entender el espacio y el tiempo, Einstein era muy consciente de su incapacidad para superar las limitaciones planteadas por la formulación gravitacional newtoniana. Teoría, que si bien brindaba un detallado marco cuantitativo, flaqueaba a la hora de detallar la naturaleza de la gravedad: ¿cómo actuaba esta fuerza? ó ¿cómo era posible que ésta se transmitiera de manera instantánea? Ello llevó al insigne físico alemán a la búsqueda de un nuevo marco teórico capaz de ofrecer una explicación y comprensión más profundas de aquélla. Búsqueda que habría de concluir en una nueva y teoría de gravitación: la Relatividad General.

A continuación, pasamos a la presentación de los tres puntos sobre los que Einstein, presumiblemente, basó su tránsito de una teoría, la ya conocida Relatividad Especial, a otra, de efectos difícilmente perceptibles y de escurridiza comprobación experimental.

### 1. Identidad entre la masa inercial y la masa gravitatoria.

Esta identidad entre las masas, demostrada por Galileo, Huygens, Bessel, Newton y Eötvös ([Wei72, §3.1]) es la base sobre la que se apoya el llamado *principio de equivalencia débil*, sustanciación del célebre experimento mental (*Gedankenexperiment*) del ascensor de Einstein: para un sujeto en el interior de un ascensor en caída libre, el efecto del campo gravitatorio es indetectable<sup>2</sup>. No obstante, este enunciado precisa de una ligera matización. Es preciso exigir unas *condiciones de localidad*. Efectivamente: el ascensor ha de ser lo “suficientemente pequeño”, ya que de lo contrario, si dejásemos caer dos objetos, éstos no caerían de manera paralela, sino que lo harían aproximándose en su caída, ya que todo cuanto cae, lo hace convergiendo al centro de masas de la Tierra. Además, dicho experimento tendría que tener lugar durar una cantidad de tiempo infinitesimal, para garantizar así que el campo gravitatorio fuese localmente constante. Bajo estas condiciones, el *el principio de equivalencia débil* hace manifiesta la imposibilidad de distinguir la acción de un campo gravitatorio de la de un movimiento acelerado. Ésta fue, citando al propio Einstein “*la idea más feliz de mi vida*”: Einstein comenzaba a esbozar la Relatividad General.

Con este resultado en mente, pasemos a probar la identidad de las masas. Recordamos que la *masa inercial*,  $m_{in}$ , no es sino es una medida de la masa como la resistencia de un cuerpo al cambio de velocidad, siempre en un sistema de referencia inercial. Por su parte, la *masa gravitatoria*,  $m_{grav}$ , consiste en la fuerza de atracción gravitatoria que experimenta una porción de materia básica dentro de un campo gravitatorio. El resultado de la acción de una fuerza sobre una masa viene dado por la tercera ley de Newton  $F = m_{in}a$ . A su vez, el comportamiento de las masas bajo el influjo de un campo gravitatorio se condensa en la archiconocida *ley de gravitación universal*:

$$F = m_{grav} \frac{GM}{r^2}$$

---

<sup>2</sup>Ciertamente: imaginemos un sujeto que flota libremente en el interior del ascensor, alejado de cualquier masa. Supongamos, que en un momento dado, ayudado por unos propulsores, el ascensor comienza a acelerar. Puesto que nuestro sujeto se halla en una situación de ingravidez, el ascensor acelerará hasta tocar sus pies, empujándolos hacia arriba, o, desde su perspectiva, algún cuerpo masivo situado en el exterior del ascensor está atrayéndole hacia sí: el sujeto confunde aceleración con gravedad.

donde  $G = 6,674 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$  es la *constante de gravitación universal*. Si denotamos por  $g$  a lo que acompaña a  $m_{grav}$  e igualamos ambas expresiones, se llega a que:

$$\frac{m_{in}}{m_{grav}} = \frac{g}{a} = 1$$

de acuerdo con lo expuesto en el párrafo anterior. Experimentalmente, y pese a las diferencias conceptuales entre ambas, ha quedado probado que, efectivamente, sus divergencias cuantitativas son ínfimas.

Si las masas son idénticas, entonces podemos sustituirlas por  $m$  en las expresiones anteriores. Igualando éstas y despejando  $a$ , se llega a que  $a = GM/r^2$ . Es decir, la gravedad imprime la misma aceleración a cualquier cuerpo, sin importar su masa. Este descubrimiento, junto al hecho de que la gravedad también afecte a partículas sin masa, como las ondas electromagnéticas o a la propia luz (visto a continuación), serán de gran relevancia a la hora de retirar el papel omnipotente otorgado a la masa por la teoría de gravitación newtoniana.

## 2. La cuestión de la gravedad y las partículas sin masa.

Quizá las siguientes computaciones vengán a desmentir lo dicho al comienzo del capítulo en relación a la naturaleza intuitiva de lo hasta ahora expuesto. No obstante, la sencillez de las mismas no supone agravio alguno a lo entonces dicho. Vamos a mostrar cómo la gravedad también afecta a las partículas sin masa, como los fotones, valiéndonos de un ejemplo obtenido de [JPi]. Para ello, vamos a considerar un haz de luz que viaja tangencialmente a un cuerpo masivo, de diámetro  $2r$  y cuya masa consideramos homogéneamente distribuida. Aplicando la mecánica clásica y la ley de gravitación universal, se tiene que el desvío  $s$  experimentado por el rayo luminoso no es otro que  $s = \frac{1}{2}gt^2$ , véase la Figura 1. En virtud a la identidad entre el movimiento acelerado y al campo gravitatorio visto en el punto anterior (en este caso, como los fotones no tienen masa, estaríamos cancelando dos ceros en el numerador y denominador, lo que fuerza a tomar el límite en  $m$ ), la expresión previa no es otra cosa que:

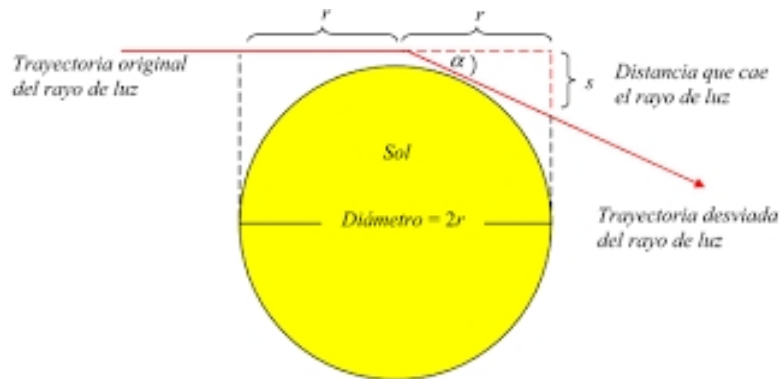
$$s = \frac{1}{2} \lim_{m \rightarrow 0} \frac{GMm}{mr^2} t^2 = \frac{1}{2} \frac{GM}{r^2} t^2,$$

siendo  $M$  la masa del Sol y  $t = \frac{2r}{c}$ , el tiempo que tomará a la luz recorrer la distancia  $2r$ . Sustituyendo el valor de  $t$  y aplicando la regla de la tangente para  $\alpha$ , se tiene que  $\alpha = \arctan(\frac{2Gm}{rc^2})$ . En el caso particular del Sol, como ya habría de comprobar Einstein en 1911,  $\alpha = 0,87''$ . Valor que, haciendo uso de la Relatividad General, sería corregido años más tarde con una tasa de error del 100 %<sup>3</sup>.

Habida cuenta de lo anterior, observamos cómo la idea de identificar la gravedad con una suerte de deformación del espacio-tiempo, en vez de con una fuerza vinculada a la masa y directamente proporcional en intensidad a la misma, no sólo va cobrando fuerza, sino que se postula como la solución más razonable. Comenzamos así, a atisbar los primeros aspectos presentes en la Relatividad General.

<sup>3</sup>En el Capítulo 3 se podrá encontrar un tratamiento más extenso y riguroso de la deflexión de la luz.

Figura 1.1: desvío de un haz de luz cercano a un cuerpo masivo



### 3. La curvatura del espacio-tiempo.

Una de las primeras personas en apuntar la imposibilidad de considerar un espacio-tiempo absoluto fue el físico austriaco Ernst Mach ([Ein97, §A.2]), tal y como apunta su principio homónimo: *“La inercia de cualquier sistema es el resultado de su interacción con el resto del Universo”*. O si se prefiere: *“La masa y la energía allí gobiernan la inercia aquí”*

Las nociones convencionales del espacio como diferencias espaciales entre dos puntos de un sistema coordinado, medidas con el instrumento de medida unitario, y del tiempo como diferencias en la coordenada temporal de un reloj, ya no tienen cabida en la Relatividad General, la cual someterá ambas nociones a profundas transformaciones. Para ilustrar este cambio de paradigma, nos valdremos de un ejemplo sacado de [BGr], que no es sino una adaptación del original formulado por Einstein en [Ein97] en [§A.3]. En él, aplicaremos la Relatividad Especial al vínculo existente entre movimiento acelerado y gravedad. Para ello, nos vamos a imaginar una atracción, el “Tornado”, consistente en una rueda de metacrilato, lo suficientemente grande como para alojar varias personas dentro, que gira sobre sí misma a gran velocidad (Figura 2). Fruto del movimiento acelerado, es posible sentir cómo el cuerpo es alejado radialmente del centro de la estructura, así como la presión ejercida por la pared de la misma sobre la espalda. Si eliminásemos el suelo, nuestra espalda seguiría pegada a la pared, sin que nos deslizásemos hacia abajo. De hecho, si este sistema acelerado se hallase en el espacio exterior, lejos de cualquier masa, y si girase a la velocidad adecuada de manera muy uniforme, la sensación sería la de estar tumbados en una cama en la tierra. Incluso sería posible ponerse de pie y caminar por el interior de la estructura. Ello permitiría, por ejemplo, crear na sensación artificial de gravedad en una hipotética estación espacial. A continuación, vamos a llevar a cabo un experimento. Pediremos a dos sujetos, Albert, pegado a la pared, que mida la longitud de la circunferencia, y Bernhard, situado en el centro de la circunferencia, que mida el radio. Después compararemos ambas mediciones. Nosotros, en reposo con respecto a la rueda y con una perspectiva de vista de pájaro, llevamos a cabo nuestra medición colocando, primeramente, la regla en repetidas ocasiones a lo largo del contorno. Acto seguido, procederemos a la medición del radio desplazándonos desde el eje central del aparato hasta su borde exterior. Si ahora observamos las mediciones de Albert, nos percataremos de que su regla experimenta una contracción de Lorentz (ver

Apéndice A). No obstante para Albert, la longitud de la regla es de 30cm, ya que entre ambos no hay movimiento relativo. Su medición de la longitud de la circunferencia será mayor que la nuestra, ya que deberá colocar más veces la regla. Bernhard, en cambio, no verá afectada su medición del radio por la contracción lorentziana, ya que recordamos que ésta sólo se produce en la dirección del movimiento, no en las perpendiculares. Por consiguiente, su medición concordará con la que nosotros hicimos desde fuera, esto es, aproximadamente 6,28. El cociente de los resultados obtenidos por sendos sujetos será mayor que  $\pi$ , pues mientras el radio es el mismo, la longitud de la circunferencia es más larga para uno que para otro.

Figura 1.2: experimento de Albert y Bernhard.



¿Cómo justificar la aparente contradicción entre lo observado y los principios de la geometría euclídea? La respuesta de Einstein es tan sencilla como brillante: la geometría euclídea ya no sirve para describir la naturaleza del espacio, puesto que, en este nuevo contexto, éste no es plano, sino *curvo*.

Como ya señalara Minkowski en una conferencia impartida en 1908 acerca de la Relatividad Especial: “*De ahora en adelante el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo se desvanecen convirtiéndose en meras sombras, y sólo una cierta unión entre los dos mantendrá una independencia propia*”. De este modo, nada nos impide pensar que sería posible ejecutar otro experimento similar para constatar que, al igual que ocurría con el espacio, el tiempo se alabea, esto es, la medición del tiempo de un observador dependerá de su posición. Consecuentemente, habiendo demostrado la vinculación existente entre la curvatura del espacio-tiempo y el movimiento acelerado, y la imposibilidad de distinguir éste de la gravedad, Einstein tenía la llave para explicar cómo ésta actuaba: *la gravedad es la curvatura del espacio-tiempo*. No conviene olvidar que la naturaleza de dicha curvatura es cuatri-dimensional. Hemos aquí la brillantez del razonamiento de Einstein, ya que, siendo imposible una observación directa de dicha curvatura, el físico alemán supo ordenar todos los ingredientes de la manera adecuada para, desde su visión tridimensional, dar con este escurridizo fenómeno tetradimensional.

Los tres puntos considerados hasta ahora, dan buena cuenta de la inevitable necesidad de reformular los dos principios que cimentaban la Relatividad Especial:

- a. Si la medición del espacio y del tiempo depende del sistema de referencia, entonces, todos estos marcos se postulan como igualmente válidos para la explicación de las leyes de la

naturaleza. Ahora bien, las ecuaciones que expliquen estas leyes han de ser válidas en cualquier sistema coordenado, es decir, se requiere de una *covarianza*. Esto nos lleva a la transformación del *principio de relatividad especial* en el *principio de equivalencia fuerte*: “*El movimiento gravitacional de un cuerpo de prueba depende únicamente de su posición inicial en el espacio tiempo y no de su constitución, y el resultado de cualquier experimento local, gravitacional o no, en un laboratorio moviéndose en un sistema de referencia inercial es independiente de la velocidad del laboratorio y de su localización en el espacio-tiempo*”. De esta guisa, se establece una democracia entre los diferentes sistemas de referencia, definiéndolos como igualmente válidos para la descripción de la naturaleza. Nuevamente, como ocurría con el principio de equivalencia débil, es importante advertir el carácter local de este principio. De este modo, pese a jugar un papel clave en la búsqueda de la Relatividad General, sólo es aplicable a fenómenos locales.

- b. Llegados a este punto, afirmar que un haz de fotones, bajo sistemas referencia no inerciales, seguirá una trayectoria curvilínea no debería sorprendernos. Por otro lado, se estableció una democracia entre los distintos observadores a la hora de brindar su propia explicación de las leyes de la naturaleza. De este modo, la existencia de un principio absoluto y común a todos aquéllos, como el de la velocidad de la luz *in vacuo*, deberá ser revisado, rebajando sus aspiraciones universales, para ser limitado a los marcos inerciales. Por ejemplo, usando una regla de medir diferente a la usual, *la métrica de Schwarzschild*, y considerando una trayectoria radial de un haz de luz respecto a un agujero negro, la velocidad de dicho haz para una observador lejano viene dada por  $c(1 - r_0/r)$ , donde  $r_0$  denota el célebre *horizonte de sucesos*. Así, conforme la luz se aproxime a dicho horizonte,  $r \rightarrow r_0$ , la velocidad de ésta irá reduciéndose hasta ser cero en  $r_0$ . En cualquier caso, otro ejemplo vinculado con este punto será tratado al final del capítulo. En particular, la cuestión de los agujeros negros y la métrica de Schwarzschild será estudiada con mayor detalle en el tercer capítulo.

Einstein niega la necesidad de formular la existencia de una fuerza gravitatoria, pues es la propia estructura del espacio-tiempo la responsable de las distintas interacciones entre los cuerpos. Ahora bien, ¿qué provoca la curvatura del espacio-tiempo?. Einstein nos facilita la respuesta: la masa. Así, cuanto mayor sea ésta, mayor será la deformación provocada y, por consiguiente, mayor será la variación a la que el movimiento rectilíneo y uniforme de los cuerpos será sometido. Esta nueva concepción del Universo fue sintetizada brillantemente por el gran físico estadounidense John Wheeler en una entrevista en 1998: “*Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve.*”.

Concluido el itinerario “psicológicamente natural”, es menester proceder a la presentación del aparato matemático que apuntala y formaliza todo lo presentado hasta el presente punto. Según lo visto con anterioridad, en presencia de una masa, las mediciones en el espacio-tiempo quedarán sujetas a modificaciones. La herramienta matemática empleada para medir dichas alteraciones no es otra que la métrica:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4.$$

donde la primera coordenada es la temporal y las tres restantes son las espaciales. En ausencia de masas, la curvatura espacio-tiemporal desaparece, siendo por tanto lógica una métrica de



coeficientes constantes: la *métrica de Minkowski*, donde  $g_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$  y  $-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ . La

**Definición 1.1.** *Se denomina espacio-tiempo a una variedad riemanniana<sup>4</sup> cuatridimensional. Cuando la métrica es la de Minkowski, hablamos de espacio-tiempo de Minkowski.*

**Definición 1.2.** *Sea  $G$  un tensor métrico definido en  $\mathbb{R}^4$ . Los vectores que cumplen  $G(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ , se les conoce como espaciales o de género espacio, aquéllos que verifican  $G(\vec{v}, \vec{v}) > 0$  se les denomina temporales o de género tiempo y los que satisfacen  $G(\vec{v}, \vec{v}) = 0$  se les llama nulos o de género luz.<sup>1</sup>*

A lo largo de las geodésicas, los vectores tangentes no ven su naturaleza temporal, espacial o nula alterada.<sup>2</sup>, lo que permite hablar de geodésicas temporales, espaciales y nulas. De este modo, la traducción geométrica de la *línea de universo*<sup>5</sup> de un fotón será *geodésica nula* y la de una partícula material, *geodésica temporal* (véase el “diccionario” terminológico del Apéndice C). Además, los vectores tangentes no sólo no ven su carácter temporal, espacial o nulo inalterado, sino que además se tiene que el valor de  $G(v(\vec{\lambda}), v(\vec{\lambda}))$  permanece constante. De este modo, es posible reparametrizar una geodésica temporal, cambiando  $\lambda$  por, digamos,  $\lambda/\lambda_0$ , para obtener  $G(v(\vec{\lambda}), v(\vec{\lambda})) = 1$ .

**Definición 1.3.** *El tiempo propio, denotado por  $\tau$ , es el parámetro de una partícula material reparametrizada de forma que sea una geodésica temporal y su vector tangente  $\vec{v} = \vec{v}(\tau)$ , verifique  $G(\vec{v}, \vec{v}) = 1$ , o lo que es lo mismo,*

$$1 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}.$$

Físicamente, el tiempo propio se interpreta como el tiempo medido por un observador que viaja con una partícula.

Con el espíritu didáctico que pretende gobernar toda la exposición, y con el fin de evitar el confinamiento de la misma al mero plano teórico, se ha estimado conveniente la introducción del siguiente ejemplo ilustrativo, en el cual pondremos en práctica las nociones recién adquiridas.

**Ejemplo 1.1.** *Vamos a figurarnos la existencia de unos seres bidimensionales, los errelandeses, que habitan en la variedad riemanniana  $(\mathbb{R}^2, G)$  con  $G$  una métrica dada y en cuyo origen de coordenadas se encuentra la masa responsable de la deformación del espacio-tiempo. Echando mano de nuestros recién adquiridos conocimientos relativistas, estudiaremos las ecuaciones de las geodésicas temporales. Nuestras conclusiones contrastarán con las creencias errelandesas: afirman la existencia de una “fuerza”, a la que llaman gravedad, que usan para explicar*

<sup>4</sup>Una variedad  $M$ , dotada de una métrica  $g$ .

<sup>1</sup>Las definiciones dependerán de la convención escogida para la signatura de la métrica, en nuestro caso, recordamos  $(+, -, -, -)$ .

<sup>2</sup>Demostración de la afirmación en el Apéndice C, Lema C.1.

<sup>5</sup>Una línea de universo no es sino la trayectoria seguida por una partícula en el espacio-tiempo. En el caso de partículas sobre las que no actúa ninguna fuerza externa, es decir, aquéllas que caen libremente, las líneas de universo serán geodésicas. Lo anterior puede ser considerado como otra versión del principio de equivalencia débil.

el movimiento de los cuerpos. Huelga decir que hasta la llegada de Einstein, esos errelandeses bien podríamos ser nosotros.

Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  la métrica  $G$  dada por:

$$G = (1 + e^{-|x|})^{-1}(dt)^2 - dx^2 \quad \text{para } x \neq 0.$$

Observemos que cuando  $x \rightarrow \infty$ , la métrica tiende a la de Minkowski, que recordamos que no es otra que,  $M = dt^2 - dx^2$ , en este caso, decimos que la métrica es *asintóticamente plana*. Es decir, lejos del cuerpo que deforma el espacio-tiempo, los cuerpos a penas notarán la curvatura espacial y mantendrán sus trayectorias en el espacio-tiempo de Minkowski. De este modo, las coordenadas  $(t, x)$  se pueden considerar como el tiempo y el espacio de un observador lejano. Las geodésicas  $(t(\tau), x(\tau))$  parametrizadas en función del tiempo propio, codificarán el movimiento de las partículas en los alrededores de la masa con métrica  $G$ . En primer lugar, procederemos al cálculo de las ecuaciones diferenciales de las geodésicas. Recordamos que éstas vienen dadas por:

$$(1.1) \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k}; \quad k = 1, \dots, n.$$

Donde el lagrangiano, con la notación moderna, no es otro que  $\mathcal{L} = (1 + e^{-|x|})^{-1} \dot{t}^2 - \dot{x}^2$ , con  $q^1 = t$  y  $q^2 = x$ . Por consiguiente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = 2(1 + e^{-|x|})^{-1} \dot{t}.$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = \frac{d}{d\tau} (2(1 + e^{-|x|})^{-1} \dot{t}) = 2(1 + e^{|x|})^{-2} (e^{|x|} \operatorname{sgn}(x)) \dot{t} \dot{x} + 2e^{|x|} (1 + e^{|x|})^{-1} \ddot{t}.$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = -2\dot{x}, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{d\tau} (-2\dot{x}) = -2\ddot{x}.$$

Finalmente, computando  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$  y  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$ , se llega, respectivamente, a que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (1 + e^{-|x|})^{-2} e^{-|x|} \operatorname{sgn}(x) \dot{t}^2.$$

Tras unas manipulaciones elementales para que los coeficientes de  $\ddot{x}$  y  $\ddot{t}$  sean 1, las ecuaciones de las geodésicas vienen dadas por:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{2}(1 + e^{-|x|})^{-2} (e^{-|x|} \operatorname{sgn}(x)) \dot{t}^2 = 0 \\ \ddot{t} + (1 + e^{-|x|})^{-1} \operatorname{sgn}(x) \dot{t} \dot{x} = 0 \end{cases}$$

La siguiente apreciación nos resultará de utilidad en la próxima cuestión a tratar.

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0 \quad \iff \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = 2(1 + e^{-|x|})^{-1} \dot{t} = \text{cte},$$

de donde definimos:  $L = \frac{1}{2}(1 + e^{-|x(\tau)|})^{-1}\dot{t}(\tau)$

A continuación, resolveremos el problema de Cauchy para una partícula que parte del reposo:

$$(1.3) \quad \ddot{x} + \frac{1}{2}(1 + e^{-|x|})^{-2}(e^{-|x|}\text{sgn}(x))\dot{t}^2 = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Obsérvese que  $\ddot{x}(0) = -2L^2e^{-|x_0|}\text{sgn}(x_0)$ , es decir,  $\ddot{x}(0) > 0$ , si  $x_0 < 0$  y  $\ddot{x}(0) < 0$ , si  $x_0 > 0$ . De este modo, si asumiéramos la existencia de unos seres unidimensionales a lo largo de la recta real, los errelandeses, éstos observarían cómo los objetos son atraídos hacia el origen, lo que les llevaría a afirmar la existencia de una masa en el origen ejerciendo una fuerza gravitatoria que atrae a los objetos hacia sí. Estos seres no distinguen entre gravedad y métrica.

Dicho esto, vamos a buscar soluciones de la forma  $x(\tau) = A + B \log \cos(C\tau)$  para (1.3). Es evidente que  $x(0) = A = x_0$ , y tras un par de derivaciones elementales:  $\ddot{x}(0) = -BC^2$ . Puesto que  $B$  es la única constante de las dos que puede afectar al signo de la aceleración inicial, que a su vez depende del de  $x_0$ , parece natural afirmar que  $B$  sea de la forma  $B = K\text{sgn}(x)$ , con  $K$  una constante estrictamente positiva a determinar. Sustituyendo toda la información anterior en la ecuación, obtenemos la siguiente identidad:

$$(1.4) \quad BC^2 = 2L^2e^{-|x_0|}\text{sgn}(x_0).$$

El aspecto de (1.4) nos hace presumir que la asunción  $B = K\text{sgn}(x)$  no resulta desacertada. De este modo, una vez que conocido  $K$ , el valor de  $C$  será trivial. No resulta por tanto desatinado suponer que  $C = ML^2$ , con  $M$  otra constante a determinar. Estudiemos rápidamente la ecuación anterior pero sin las condiciones iniciales:

$$(1.5) \quad -\frac{BC^2}{\cos(C\tau)^2} + 2L^2e^{-|x_0+B \log \cos(C\tau)|}\text{sgn}(x_0 + B \log \cos(C\tau)) = 0.$$

Supongamos que  $\text{sgn}(x_0) > 0$ . Consideremos primeramente aquéllos puntos donde el valor de la función es positivo, sustituyendo  $B$ , (1.5) se transforma en:

$$-\frac{KC^2}{\cos(C\tau)^2} + 2L^2e^{-x_0-K \log \cos(C\tau)} = 0.$$

Escogiendo  $K = 2$  y usando (1.4) se tiene que  $C = Le^{-x_0/2}$  y la identidad anterior se cumple. Análogamente, repitiendo los argumentos anteriores para  $x_0 < 0$ , se tiene que  $K = 2$  y  $C = Le^{x_0/2}$ . Con todo ello, tenemos que la solución al problema (1.3) viene dada por:

$$(1.6) \quad x(\tau) = x_0 + 2\text{sgn}(x_0) \log \cos(Le^{-|x_0|/2}\tau)$$

El parámetro  $L$ , como se dijo con anterioridad, es una constante, cuyo valor varía en función de la geodésica. En nuestro caso, será la definición de tiempo propio la que nos ayuda a hallar dicho valor. Recordamos que:  $d\tau^2 = (1 + e^{-|x|})^{-1}(dt)^2 - (dx)^2$ . Así, evaluando en  $\tau = 0$  y reorganizando tenemos:

$$1 = (1 + e^{-|x(0)|})^{-1}\dot{t}(0)^2 - \dot{x}(0)^2.$$

De donde se sigue que:

$$\dot{t}(0) = (1 + e^{-|x|})^{\frac{1}{2}} \quad \text{ya que } \dot{x}(0) = 0.$$

Sustituyendo lo anterior en la definición de  $L$ , a saber:  $L = \frac{1}{2}(1 + e^{-|x(\tau)|})^{-1}\dot{t}(\tau)$  se llega a que:

$$L = \frac{1}{2}(1 + e^{-|x_0|})^{-1/2}.$$

### Ejemplo 1.2.

Si una partícula se halla lejos del origen, esto es, del “Sol”, en principio, habrá de transcurrir una cantidad de tiempo propio significativo, para que ésta se mueva, pues el campo gravitatorio será más débil. Comprobemos que esto, efectivamente, es así. Si  $x_0 \rightarrow \infty$ , esto es, la partícula se encuentra lejos del origen, entonces, para lograr un desplazamiento apreciable de la partícula, a saber,  $x_0 - x(\tau) > \delta_0 > 0$ , donde  $\delta_0$  está fijado, ha de transcurrir una gran cantidad de tiempo propio,  $\tau \rightarrow \infty$ . Resolveremos el caso  $x_0 > 0$ , el caso negativo es análogo, con  $x_0 \rightarrow -\infty$ . Recordamos que:

$$x(\tau) = x_0 + 2 \log \cos\left(\frac{1}{2}(1 + e^{-x_0})^{-1/2} e^{-x_0/2} \tau\right).$$

Operando:  $x_0 - x(\tau) = -2 \log \cos\left((1 + e^{x_0})^{-1/2} \frac{\tau}{2}\right)$ . O lo que es lo mismo:

$$\delta_0 < -2 \log \cos\left((1 + e^{x_0})^{-1/2} \frac{\tau}{2}\right).$$

Despejando  $\tau$  en la desigualdad anterior:

$$(1.7) \quad (1 + e^{x_0})^{1/2} \underbrace{2 \arccos\left(e^{-\frac{\delta_0}{2}}\right)}_{cte} < \tau.$$

De este modo, si  $x_0 \rightarrow \infty$ , es evidente que  $C(1 + e^{x_0})^{1/2} \rightarrow \infty$ , y, por consiguiente, en virtud de (1.7),  $\tau \rightarrow \infty$ , tal y como se pretendía probar. Para un errelandés, la explicación a lo anterior pasaría por aseverar que la gravedad es una fuerza que decrece con la distancia.

### Ejemplo 1.3.

Tal y como anunciamos en la parte introductoria, el principio de la velocidad de la luz *in vacuo* perdía vigencia en el contexto de la Relatividad General. Veamos que, efectivamente, es así. Queremos dar con una expresión para la velocidad de la luz en función de la posición  $x$  para un observador lejano que usa las coordenadas  $(t, x)$ . Nuevamente, nos valdremos de la ya familiar definición de tiempo propio:

$$d\tau^2 = (1 + e^{-|x|})^{-1}(dt)^2 - (dx)^2.$$

Si un observador viaja con una partícula cuya velocidad es la de la luz, un fotón, su tiempo propio no varía, o lo que es lo mismo:  $d\tau = 0$ . Sustituyendo esto en la definición anterior y reordenando, se llega a la siguiente identidad:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1 + e^{-|x|})^{-1}.$$

que no es otra cosa que:  $v_{luz} = (1 + e^{-|x|})^{-\frac{1}{2}}$ . En unidades relativistas recordamos que  $c = 1$ . De este modo, para un observador lejano,  $x \rightarrow \infty$ , el valor de  $v_{luz} \rightarrow 1$ , esto es,  $c$ , el valor adelantado por la Relatividad Especial. Ahora bien, si el observador se aproxima al origen, esto es, si  $x \rightarrow 0$ , la velocidad de la luz tenderá a  $\sqrt{2}/2$ . Cuanto más próximo al cuerpo masivo, (al “Sol”), se sitúe el observador, más apreciará cómo ésta decelera, “se frena”, como consecuencia del campo gravitatorio descrito por  $G$ , o más precisamente, por sus coeficientes.

## 1.2 El límite newtoniano

Llegados a este punto, nadie debería mostrar objeciones a la hora de considerar a la Relatividad como una solución más que satisfactoria a las serias limitaciones planteadas por la gravitación newtoniana. No obstante, si hay algo en lo que ésta última aventaja a la primera es en la sencillez de los cálculos. Hallar la expresión de una métrica puede devenir en una tarea harto compleja, motivo por el cual vamos a presentar la siguiente aproximación en base al potencial newtoniano, en aras a calcular el coeficientes temporal de la métrica. Recordamos que las ecuaciones de las trayectorias de los fotones (geodésicas nulas) son las dadas por:

$$(1.8) \quad \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

Vamos a estudiar las ecuaciones dadas por (1.8) bajo las siguientes consideraciones:

- Para campos gravitacionales débiles, la métrica asociada al mismo,  $g_{\alpha\beta}$ , difiere de la Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$  en una pequeña cantidad  $h_{\alpha\beta}$ , de manera que éste tienda a cero conforme nos alejamos del campo. De este modo:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad \text{con } h_{\alpha\beta} \ll 1.$$

Recordamos que  $-\eta_{00} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$  y  $\eta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ .

- Para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz i.e.  $\frac{\partial x^i}{\partial \tau} \ll 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , las cantidades  $\frac{dx^i}{d\tau}$  son negligibles respecto a  $\frac{dt}{d\tau}$
- Si consideramos la métrica asociada al campo gravitatorio como independiente respecto al tiempo, esto es, sus coeficientes no depende de la variable  $t$ , podemos tomar las derivadas temporales de  $h_{\alpha\beta}$  como prácticamente nulas i.e.  $h_{\alpha\beta,0} \approx 0$ .

Teniendo en cuenta los apuntes previos, se tiene que la ecuación (1.8) presenta el siguiente aspecto:

$$(1.9) \quad \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\nu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \approx 0 \quad \text{donde } \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Tenemos que calcular pues los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{00}^\nu$ . De este modo:

$$\Gamma_{00}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} (g_{0\lambda,0} + g_{\lambda 0,0} - g_{00,\lambda}) = -\frac{1}{2} g^{\nu\lambda} g_{00,\lambda} \quad \text{ya que } g_{\alpha\beta,0} \approx 0$$

La métrica  $g_{\alpha\beta}$  es aproximadamente diagonal, por lo que su inversa  $g^{\alpha\beta}$  también. Por consiguiente, estimamos  $g^{\alpha\beta}$  como  $\frac{1}{g_{\alpha\beta}}$ . De este modo:

$$\Gamma_{00}^{\nu} \approx -\frac{1}{2} \frac{1}{g_{\lambda\nu}} g_{00,\lambda} \quad \text{para } \lambda = 1, 2, 3$$

De acuerdo con el primer punto de la enumeración, lo anterior no es otra cosa que:

$$\Gamma_{00}^{\nu} \approx -\frac{1}{2} \frac{1}{\eta_{\lambda\nu} + h_{\lambda\nu}} (\eta_{00,\lambda} + h_{00,\lambda}).$$

Como  $\eta_{00}$  es constante y la métrica  $\nu$  en sus coeficientes espaciales es  $-I_3$ :

$$\Gamma_{00}^{\nu} \approx \frac{1}{2} \frac{1}{1 - h_{\lambda\nu}} h_{00,\lambda}.$$

Expandiendo en  $h_{\lambda\nu}$  hasta orden 1,

$$\Gamma_{00}^{\nu} = \frac{1}{2} (1 + h_{\lambda\nu} + o(h_{\lambda\nu})) h_{00,\lambda} \approx \frac{1}{2} h_{00,\lambda} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad \text{ya que, } h_{\lambda\nu} \ll 1.$$

Si ahora no remitimos a (1.9) y sustituimos el valor de  $\Gamma_{00}^{\nu}$ , se llega a la siguiente identidad:

$$(1.10) \quad \frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} \approx -\frac{1}{2} \nabla h_{00,\lambda} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2.$$

Para  $\nu = 0$ ,  $h_{00,0} = 0$ , y la expresión (1.10) se convierte en  $\left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$ , esto es, el cociente  $\frac{dt}{d\tau}$  es constante. Por meras cuestiones de notación, cambiando en (1.10) el parámetro  $\nu$  por  $i$ , donde  $i = 1, 2, 3$  y dividiendo en la expresión por  $\left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2$ , se llega a:

$$(1.11) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\frac{1}{2} \nabla h_{00}.$$

El resultado newtoniano correspondiente es  $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\nabla\Phi$ , donde  $\Phi$  es el potencial gravitacional, el cual, a una distancia  $r$  del centro de un cuerpo esférico de masa  $M$ , no es otro que  $\Phi = -\frac{GM}{r}$ . Comparando lo anterior con (1.11), se deduce que:  $h_{00} = 2\Phi + \text{constante}$ . Como el valor de  $h_{00}$  tiende a anularse conforme aumenta la distancia, la constante es nula. Recordando la expresión de la métrica  $g_{\alpha\beta}$  del comienzo, se tiene que:

$$g_{00} = 1 + 2\Phi.$$

A modo de síntesis de lo expuesto con anterioridad: en un contexto de campo gravitatorio débil y velocidades pequeñas, la gravitación newtoniana queda condensada en una métrica  $g_{\alpha\beta}$  con coeficiente temporal el dado por la aproximación precedente.

## Capítulo 2

# Las ecuaciones de campo

Conforme nos adentramos en el mundo de la Relatividad General, aumentan las sorprendentes explicaciones acerca del Universo. Lograr una formalización matemática de las mismas, condensada en las *ecuaciones de campo*, exige, en contrapartida, una sofisticación de nuestras herramientas geométricas. De este modo, sobre las bases establecidas en el Apéndice B, continuaremos nuestro periplo por la Relatividad General, haciendo, nuevamente, una pequeña visita a la geometría riemanniana.

### 2.1 La derivada covariante

Comencemos con un ejemplo que haga la exposición más digerible. Imaginemos un observador no inercial, situado en el espacio, dedicado al estudio de las corrientes de aire. Aquél, vería como el aire de la atmósfera, siempre en movimiento, en el hemisferio norte, al viajar hacia el sur, tomaría una componente oeste; este en el caso del hemisferio sur. Por el contrario, el aire sur-norte del hemisferio sur presentaría una componente este. Oeste, en el hemisferio contrario. Esta nueva componente se debe a que ahora, al estar también en movimiento el sistema de referencia, es preciso codificar a su vez su variación. Físicamente, la aparición de la componente se explica en virtud de la conocida como *fuerza de Coriolis*, ficticia, al igual que la fuerza centrífuga, ambas producto de la elección de un sistema de referencia no inercial. De esta manera, en ciertos contextos, y como es de esperar, la Relatividad no es una excepción, necesitamos estudiar las variaciones de la velocidad, esto es, aceleraciones, en un sistema de referencia también en movimiento, pudiendo ser su velocidad no constante. Como ya es sabido, cuando nos preguntamos acerca de variaciones de un objeto, en el argot matemático nos referimos a derivadas, y los campos de velocidades, no son sino la traducción física del concepto ya conocido de campo tensorial. De este modo, buscamos una herramienta que nos permita derivar tensores, pero no de cualquier manera, sino que nuestro afán emancipador respecto de las coordenadas, nos obliga a que esta derivada sea absoluta, a saber, que preserve la tensorialidad.

Consideremos el campo  $V = V^i \partial_i$  en cierta carta de la variedad. Según lo anterior, esco-

giendo la dirección  $\partial_j$ , la derivada direccional “adecuada”, tendría como  $i$ -ésima componente:

$$V_{,j}^i \partial_i + C_{ij}^k V^i \partial_k = (V_{,j}^k + C_{ij}^k V^i) \partial_k$$

donde los  $C_{ij}^k$  indican la variación del sistema de coordenadas  $\phi = (x^1, \dots, x^n)$  si el campo  $V$  está fijo. A su vez, el primer sumando indica cuánto varía el campo cuando es el sistema de coordenadas el que permanece invariante. Esta manera tensorial de derivar, entre las muchas posibles, se conoce como *conexión afín*. En principio, la elección de los  $C_{ij}^k$  es arbitraria, dando lugar cada una de ellas a una conexión diferente. No obstante, en el contexto de la Relatividad General, el deseo de preservar la compatibilidad de la nueva derivada con la usual, nos llevará a escoger unos  $C_{ij}^k$  específicos. Antes de continuar, formalicemos la noción de conexión afín.

**Definición 2.1.** Una *conexión afín* en una variedad  $M$  es una aplicación que asigna a cada par de campos de vectores  $X, Y$  un tercero, denotado  $\nabla_X Y$ , tal que se verifica lo siguiente:

1.  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2.  $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3.  $\nabla_{fX} (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

donde  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones arbitrarias.

Para  $g = 0$  y  $f = X|_p$  podemos hablar de  $\nabla_{X_p} Y$  como la derivada direccional de  $Y$  respecto de  $X|_p$  en  $p$ .

En el siguiente lema, recogemos las intuiciones que han guiado la exposición hasta el momento.

**Lema 2.1.** Sea  $\nabla$  una conexión afín y sean  $X = X^i \partial_i$  y  $V = V^i \partial_i$  dos campos de vectores así expresados en una carta dada  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ , entonces

$$\nabla_X V = \left( \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + C_{ij}^k V^j \right) X^i \partial_k$$

donde  $C_{ij}^k$  es la componente  $k$ -ésima de  $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ .

*Demostración.*  $\nabla_X V = \nabla_{X^i \partial_i} (V^j \partial_j)$ . Aplicando, respectivamente, la primera y la tercera propiedad de las conexiones a lo anterior:

$$\nabla_{X^i \partial_i} (V^j \partial_j) = X^i \nabla_{\partial_i} (V^j \partial_j) = X^i (V^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \frac{\partial V^j}{\partial x^i} \partial_j).$$

Renombrando las variables mudas  $j$  como  $k$  en el último sumando, se llega al resultado deseado.  $\square$

Tal y como dijimos más arriba, de entre todas las conexiones posibles, nos interesa aquélla que preserve una cierta *compatibilidad* con la derivada usual. Ello se va a traducir en exigir a la métrica  $G$  una verificación de la regla de Leibniz para derivar productos escalares, así como la preservación de la simetría de las derivadas parciales, i.e.  $C_{ij}^k = C_{ji}^k$ . Tales requerimientos, condicionan unívocamente la elección de los coeficientes:



**Lema 2.2.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana con métrica  $G = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ ,  $g_{ij}$  la matriz de componentes de la métrica y  $g^{ij}$  la matriz inversa. Las únicas cantidades  $C_{ij}^k$  que verifican simultáneamente:*

1.  $C_{ij}^k = C_{ji}^k$
2.  $\frac{\partial}{\partial x^k} G(\partial_i, \partial_k) = G(C_{ik}^l \partial_l, \partial_j) + G(\partial_i, C_{jk}^l \partial_l)$

son los símbolos de Christoffel.

*Demostración.* En primer lugar, conviene observar que la segunda condición se puede reescribir como:  $g_{ij,k} = C_{ik}^l g_{lj} + C_{jk}^l g_{il}$ . Teniendo esto en cuenta, como los índices  $i, j$  y  $k$  son arbitrarios, podemos permutarlos a voluntad, y considerando las respectivas expresiones de  $g_{ij,k}$ ,  $g_{ki,j}$  y  $g_{jk,i}$  se tiene:

$$(g_{ij,k} - C_{ik}^l g_{lj} - C_{jk}^l g_{il}) + (g_{jk,i} - C_{ji}^l g_{lk} - C_{ki}^l g_{jl}) - (g_{ki,j} - C_{kj}^l g_{li} - C_{ij}^l g_{kl}) = 0.$$

Por la simetría de los  $C_{ij}^l$  exigido por la condición primera, lo anterior deviene en:

$$g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j} = 2C_{ik}^l g_{lj}$$

Multiplicando por  $g^{jm}$  en la identidad anterior y teniendo presente que  $g_{lj}g^{jm} = \delta_l^m$ , llegamos a lo siguiente:

$$C_{ik}^m = \frac{1}{2} g^{jm} (g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j})$$

que no es sino la definición de los símbolos de Christoffel. □

De hecho, dada una variedad riemanniana  $(M, G)$ , existe una única conexión  $\nabla$  asociada verificando las condiciones del Lema 2.2. A tal conexión, se la conoce como *conexión de Levi-Civita*. Llegados a este punto, ya estamos en situación de introducir el concepto vertebrador de la presente sección.

**Definición 2.2.** *Sea una variedad riemanniana con un campo de vectores que en cierta carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  se expresa como  $V = V^i \partial_i$ . Se llama **derivada covariante** al tensor de tipo  $(1, 1)$ , denotado por  $\nabla V$ , cuyas componentes vienen dadas por*

$$V_{;j}^i = V_{,j}^i + \Gamma_{kj}^i V^k$$

y se llama **derivada covariante respecto a  $x^j$**  al campo de vectores  $\nabla_j = V_{;j}^i \partial_i$ .

Uno de los objetivos perseguidos al comienzo de la sección era dar con un objeto que transformase sus componentes tensorialmente bajo cambio de carta. Tras la definición anterior, no parece en absoluto evidente que esto sea así. Comprobémoslo: si  $\tilde{T}^i$  son las distintas componentes de  $\tilde{T}$  en la carta  $(\mathcal{T}, \phi = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n))$ , entonces, por la tensorialidad del campo  $\tilde{T}$ , se verifica que

$$(2.1) \quad \tilde{T}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} T^j$$

Derivando respecto a la  $k$ -ésima componente a ambos lados en (2.1):

$$\tilde{T}_{,k}^i = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} \left( \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \right) T^j + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial \tilde{x}^k}$$

y por la regla de la cadena,  $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^r}$ :

$$\tilde{T}_{,k}^i = \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} T^j + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} T_{,r}^j \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k}.$$

Lo que buscamos es:

$$\tilde{T}_{,k}^i + \tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{T}^j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} (T_{,r}^j + \Gamma_{lr}^j T^l)$$

por lo tanto, la sustitución de  $\tilde{T}_{,k}^i$  en lo anterior y usando de nuevo la tensorialidad, a saber,  $\tilde{T}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} T^l$ , se llega a lo siguiente

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} T^j + \tilde{\Gamma}_{jk}^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} T^l = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} \Gamma_{lr}^j T^l.$$

Lo anterior se verifica también para el caso  $j = l$ , por lo que:

$$(2.2) \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} \Gamma_{lr}^j - \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^l \partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k}.$$

es decir, es la transformación de los símbolos de Christoffel la que nos da la condición necesaria y suficiente para garantizar la tensorialidad de la derivada covariante. Para concluir la prueba, habríamos de probar que efectivamente, los  $\Gamma_{jk}^i$  se transforman bajo cambio de carta como prescribe la identidad (2.2)<sup>1</sup>.

**Ejemplo 2.1.** Con el fin de practicar lo aprendido hasta el momento, vamos a calcular la derivada covariante del campo de vectores en  $\mathbb{R}^2$

$$V = \cos(\theta - \pi/4) \partial / \partial r + r^{-1} \cos(\theta + \pi/4) \partial / \partial \theta$$

donde  $(r, \theta)$  son las coordenadas polares.

Recordamos que las componentes de la derivada covariante venían dadas por:  $V_{;j}^i = V_{,j}^i + \Gamma_{kj}^i V^k$ . El cálculo componente a componente nos lleva a:

$$V_{;1}^1 = V_{,1}^1 + \Gamma_{k1}^1 V^k = 0 + \Gamma_{11}^1 \cos(\theta - \pi/4) + \Gamma_{21}^1 r^{-1} \cos(\theta + \pi/4),$$

$$V_{;2}^1 = V_{,2}^1 + \Gamma_{k2}^1 V^k = -\sin(\theta - \pi/4) + \Gamma_{12}^1 \cos(\theta - \pi/4) + \Gamma_{22}^1 r^{-1} \cos(\theta + \pi/4),$$

$$V_{;1}^2 = V_{,1}^2 + \Gamma_{k1}^2 V^k = -r^{-2} \cos(\theta + \pi/4) + \Gamma_{11}^2 \cos(\theta - \pi/4) + \Gamma_{21}^2 r^{-1} \cos(\theta + \pi/4),$$

$$V_{;2}^2 = V_{,2}^2 + \Gamma_{k2}^2 V^k = -r^{-1} \sin(\theta + \pi/4) + \Gamma_{12}^2 \cos(\theta - \pi/4) + \Gamma_{22}^2 r^{-1} \cos(\theta + \pi/4).$$

<sup>1</sup>Esta es la transformación de los símbolos de Christoffel para el cambio de coordenadas  $\tilde{x} \mapsto x$ . En el Apéndice D se puede encontrar una deducción del cambio inverso.

Para el cálculo de los símbolos de Christoffel, en vez de proceder según la definición, nos valdremos del resultado aparecido en el segundo capítulo según el cual, para un lagrangiano  $\mathcal{L}$  procedente de una métrica se verifica lo siguiente:  $\ddot{q}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j = 0$ . En nuestro caso,  $\mathcal{L} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$ . El cálculo de las ya familiares ecuaciones de Euler-Lagrange, nos lleva a una expresión de la forma prevista por el citado lema:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0, \quad \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

De este modo:  $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$ ,  $\Gamma_{22}^1 = -r$ ,  $\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{11}^2 = 0$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = r^{-1}$ . Sustituyendo lo anterior en las componentes de la derivada covariante de más arriba:

$$V_{;1}^1 = 0,$$

$$V_{;1}^2 = -r^{-2} \cos(\theta + \pi/4) + r^{-2} \cos(\theta + \pi/4) = 0,$$

$$V_{;2}^1 = -\sin(\theta - \pi/4) - \cos(\theta + \pi/4) = \sin(-\theta + \pi/4) - \cos(-\theta - \pi/4) = 0,$$

$$V_{;2}^2 = -r^{-1} \sin(\theta + \pi/4) + r^{-1} \cos(\theta - \pi/4) = 0.$$

En la tercera igualdad hemos usado la imparidad y la paridad del seno y del coseno respectivamente, y, al igual que en la cuarta, nos hemos valido de que  $\sin(\theta + \pi/2) = \cos(\theta)$ , de donde  $\sin(\theta + \pi/4) = \cos(\theta - \pi/4)$ .

Si bien es cierto que estos cálculos nos han servido para familiarizarnos con el nuevo concepto de derivada covariante, existe una forma más sintética e inmediata de probar lo anterior. Gracias a la tensorialidad de las componentes de la derivada covariante, si  $\nabla V = 0$  en algún sistema de coordenadas, entonces, lo anterior se cumple para cualquier elección de las coordenadas. Resulta, que el campo  $V$  no es sino el campo  $W = \frac{\partial}{\partial y}$  escrito en coordenadas polares rotadas  $\pi/4$  radianes según la transformación:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta + \pi/4) \\ y = r \sin(\theta + \pi/4) \end{cases}$$

y como  $\nabla W = 0$ , el resultado se deduce de manera inmediata.

Tal y como ocurría con la derivada usual, la derivada covariante también puede definirse a lo largo de curvas en la variedad. De hecho, este concepto es el que nos permite generalizar la noción euclídea de paralelismo. Veámoslo.

**Definición 2.3.** Dada una variedad  $M$ , si  $c : I \rightarrow M$  es una curva parametrizada,  $\phi \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  y  $V^k(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  para cierta carta  $(\mathcal{U}, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ , se denomina **derivada covariante de  $V$  a lo largo de  $c$**  a:

$$\frac{DV}{dt} = \left( \frac{dV^k(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^k(c(t)) V^j(t) \frac{dx^i(t)}{dt} \right) \partial_k|_{c(t)}.$$

**Definición 2.4.** Se dice que un campo vectorial  $V$  es un **transporte paralelo** a lo largo de una curva parametrizada  $c = c(t)$  si  $DV/dt = 0$ .

El sentido de la definición anterior viene justificado por la teoría de ecuaciones diferenciales, la cual nos asegura que el *problema de Cauchy*  $DV/dt = 0, V(c(t_0)) = V_0$ , para  $V_0 \in T_{c(t_0)}(M)$ , tiene una única solución.

Observación: como dijimos al comienzo del epígrafe, la derivada covariante considera de manera absoluta (o tensorial) y simultánea el cambio de las coordenadas de un campo, así como del sistema de referencia en el que se expresan. Entonces, el transporte paralelo corresponde al caso en el que no hay variación alguna a lo largo de una curva  $c$ .

**Ejemplo 2.2.** *Los campos vectoriales de la forma  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $1 \leq i \leq n$  en  $\mathbb{R}^n$  con la métrica usual y la carta trivial, son transportes paralelos a lo largo de cualquier curva.*

Estas nuevas definiciones nos permiten reformular el concepto de geodésica en términos puramente mecánicos. Así, éstas pasarían a ser las trayectorias descritas por las partículas que no sufren fuerzas externas, o lo que es lo mismo (en “caída libre”), con aceleración nula i.e.  $DV/dt = 0$ , permitiendo generalizar de este modo el principio de inercia. Esta observación queda recogida en la siguiente definición:

**Definición 2.5.** *Se dice que una curva parametrizada  $c : I \rightarrow M$  en una variedad riemanniana  $M$  es una **geodésica** si  $DV/dt = 0$ , donde  $V$  es el campo de vectores tangentes de  $c$ . Es decir, si  $(\mathcal{U}, \phi)$  es una carta y  $\phi \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ , las geodésicas son las soluciones de las ecuaciones diferenciales*

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

## 2.2 Tensor de Riemann y tensor de Ricci

Como ya habría de ocurrirle a Einstein una centuria atrás, hemos de remitirnos a nuestros conocimientos de Geometría Diferencial para articularlos de tal modo que podamos introducir nuestra siguiente herramienta en nuestro itinerario hacia las ecuaciones de campo: el *tensor de Riemann*. Para acometer dicha tarea, nos apoyaremos, esencialmente, en [Cha01] y, como complemento, en [Sch85] y [Wei72].

Que el tensor de Riemann también sea conocido como el *tensor de curvatura* no es casualidad. Es precisamente como respuesta a la aspiración de generalizar la noción de *curvatura de Gauss* a variedades, como cabe concebir el citado tensor. De este modo, recordemos brevemente en qué consiste la curvatura. Determinar qué tan curvada está una variedad unidimensional (una curva) inmersa en  $\mathbb{R}^3$  no parece una cuestión excesivamente compleja. No obstante, las distintas posiciones desde las que observemos la curva nos llevarían a dar respuestas diferentes. Es mediante el *triedro de Frénet-Serret* que podemos dar un marco referencial absoluto, según el cual la curvatura de la curva parametrizada por longitud de arco no es otra que  $\xi(s) = \|\tilde{r}''(s)\|$ . No obstante, tal definición tiene un costo: las curvas no tienen curvatura en sentido intrínseco.

Para poder dar con una curvatura intrínseca, es preciso remitirse a las superficies riemannianas en  $\mathbb{R}^3$ . La *curvatura de Gauss*,  $K$ , depende únicamente de los coeficientes de la métrica

$G$ , siendo, por lo tanto indiferente, no ya la forma en la que se encuentre inmersa la variedad en el espacio ambiente, sino el propio espacio en cuestión. Además, dada una isometría  $f : M \rightarrow N$ , esto es, una aplicación que preserva la métrica:  $G(\vec{v}, \vec{v}) = G(df(\vec{v}), df(\vec{v}))$ , entonces, tenemos que  $K_M(p) = K_N(f(p))$ . Tamaña fue la sorpresa del propio Gauss al probar este resultado, que lo bautizó como *Teorema Egregio*. De este modo, dadas dos superficies con curvatura gaussiana distinta, no existe una isometría entre éstas. Merced a esto, sabemos que todo mapa terrestre involucra un cierto nivel de distorsión de las distancias.

Contrariamente a lo que pudiera sugerir la didáctica de los primeros cursos de Geometría, Gauss dedujo el *Teorema Egregio* del, probablemente familiar, *Teorema de Gauss-Bonet*. De acuerdo con éste, un ser bidimensional que habitase en la superficie de una esfera podría llegar a esta conclusión, trazando un triángulo geodésico  $T$ : un triángulo cuyos lados, en vez de rectas euclídeas, serían geodésicas, y comprobando que la suma sus ángulos,  $\alpha, \beta, \gamma$ , no es  $\pi$ . De hecho, cuanto mayor fuera la curvatura de la superficie, mayor sería la divergencia respecto de  $\pi$ . Lo anterior se condensa en la siguiente identidad:

$$(2.3) \quad \int_T K = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

¿Y cómo a partir de (2.3) se puede llegar al *Teorema Egregio*? Una sugestiva y sencilla idea pasaría por dividir por  $T$  en (2.3), haciéndolos converger hacia un punto  $p$ , lo que nos daría la curvatura,  $K(p)$ , en el miembro de la izquierda. El otro miembro expresaría la variación de los vectores en transportes paralelos cíclicos en relación con el área. Efectivamente: orientando  $T$  en sentido positivo, un vector tangente que parte del vértice de ángulo  $\alpha$  llega al del ángulo  $\beta$ , forma con el vector tangente del siguiente lado un ángulo  $\pi - \beta$ . Así, mediante un transporte paralelo completando una vuelta, el cambio de ángulo será  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ .

Comentario: existe otro acercamiento a la curvatura, consistente en un intento de aproximar una métrica riemanniana por una euclídea. Es precisamente este acercamiento el más próximo al seguido por Riemann, interesado en dar condiciones necesarias y suficientes para que una variedad fuese localmente isométrica a  $\mathbb{R}^n$ .

¿Cómo generalizar la curvatura al caso  $n$ -dimensional? El instrumento es el *tensor de Riemann*. La definición de este tensor no es baladí. Veámoslo. Consideremos, primeramente, un cuadrilátero de lados  $\partial_l, \partial_k$ , con intersección en el punto  $p = (p^1, \dots, p^n)$ . Para distancias infinitesimales, las curvas coordenadas  $x^i = p^i + \delta_l^i \lambda$  y  $x^i = p^i + \delta_k^i \lambda$  son una buena aproximación de los lados. Completarían el cuadrilátero dos nuevos lados:  $x^i = p^i + \delta_l^i(\lambda + \epsilon_1)$  y  $x^i = p^i + \delta_k^i(\lambda + \epsilon_2)$ . Transportamos paralelamente primeramente un vector  $\vec{V}$  de  $p$  a lo largo del primer lado hasta el siguiente vértice:  $q$ . Por definición, se tiene que  $V_l^i + \Gamma_{jl}^i V^j = 0$ . De este modo:

$$V^i(q) - V^i(p) = \int_{p^l}^{p^l + \epsilon_1} V_{,l}^i dx^l \Big|_{x^k=p^k} = - \int_{p^l}^{p^l + \epsilon_1} \Gamma_{jl}^i V^j dx^l \Big|_{x^k=p^k}.$$

Repetiendo este procedimiento para cada uno de los lados restantes, tenemos que tras concluir

el transporte paralelo cíclico, el incremento de  $\vec{V}$  es:

$$\begin{aligned} \Delta V^i = & - \int_{p^l}^{p^l+\epsilon_1} \Gamma_{jl}^i V^j dx^l \Big|_{x^k=p^k} - \int_{p^k}^{p^k+\epsilon_2} \Gamma_{jk}^i V^j dx^k \Big|_{x^l=p^l+\epsilon_1} \\ & + \int_{p^l}^{p^l+\epsilon_1} \Gamma_{jl}^i V^j dx^l \Big|_{x^k=p^k+\epsilon_2} + \int_{p^k}^{p^k+\epsilon_2} \Gamma_{jk}^i V^j dx^k \Big|_{x^l=p^l}. \end{aligned}$$

Obsérvese que, concluido el transporte paralelo, el vector  $\vec{V}$  apuntará en una dirección diferente a la de partida, ya que, en caso de no hacerlo, se trataría de un espacio plano. Precisamente, es el hecho de trabajar en un espacio curvo el que evita la cancelación de las integrales, puesto que  $\Gamma_{jl}^i \neq cte$ . Retomando el hilo argumental, tomemos  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  lo “suficientemente pequeños”, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio para funciones en primera instancia, y seguidamente el Integral:

$$\Delta V^i = \epsilon_2 \int_{p^l}^{p^l+\epsilon_1} (\Gamma_{jl}^i V^j)_{,k} dx^l - \epsilon_1 \int_{p^k}^{p^k+\epsilon_2} (\Gamma_{jk}^i V^j)_{,l} dx^k = \epsilon_1 \epsilon_2 ((\Gamma_{jl}^i V^j)_{,k} - (\Gamma_{jk}^i V^j)_{,l}).$$

Desarrollando en la expresión anterior:

$$\Delta V^i = \epsilon_1 \epsilon_2 ((\Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i) V^j + (\Gamma_{jl}^i V_{,k}^j - \Gamma_{jk}^i V_{,l}^j)).$$

Al tratarse de transportes paralelos:  $V_{,k}^j = -\Gamma_{nk}^j$  y  $V_{,l}^j = -\Gamma_{nl}^j$ . Por consiguiente:

$$\Delta V^i = \epsilon_1 \epsilon_2 ((\Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i) V^j + (\Gamma_{jk}^i \Gamma_{nl}^j - \Gamma_{jl}^i \Gamma_{nk}^j) V^n).$$

Obsérvese, que para  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0^+$ , el cociente  $\Delta V^i / \epsilon_1 \epsilon_2$  depende linealmente de las coordenadas de  $\vec{V}$ . Si consideramos los lados dados por las direcciones de los vectores  $v^l \partial_l$ ,  $w^k \partial_k$  y dado el vector inicial  $W^i \partial_i$ , la variación infinitesimal del transporte paralelo cíclico respecto del área es el vector  $W^i \partial_i$ , cuyas coordenadas verifican:

$$W^i = R_{jkl}^i V^j v^l w^k.$$

donde  $R_{jkl}^i = \Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jk}^i \Gamma_{nl}^j - \Gamma_{jl}^i \Gamma_{nk}^j$ .

**Definición 2.6.** *El tensor de Riemann, también conocido como tensor de curvatura, es un tensor (1,3) definido en una variedad riemanniana como sigue:*

$$(2.4) \quad R_{jkl}^i = \Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jk}^i \Gamma_{nl}^j - \Gamma_{jl}^i \Gamma_{nk}^j.$$

De los tres argumentos vectoriales que tomar el tensor, el primero indica el vector que será transportado paralelamente, y los otros dos las direcciones que delimitarán el paralelogramo sobre el que tendrá lugar dicho transporte.

Esta forma de introducir el tensor de Riemann si bien resulta bastante intuitiva, no ofrece excesiva información acerca del tensor en cuestión. ¿De dónde se desprende la tensorialidad? El

próximo lema además de responder a este interrogante, pondrá de manifiesto la equivalencia de la construcción anterior con su definición como diferencia de derivadas covariantes segundas. No obstante, la demostración del resultado involucra derivadas del tipo  $(V_{,k}^i)_{,l}$ , o lo que es lo mismo, derivadas de objetos que no serán campos vectoriales. De esta manera, empleemos unas líneas en generalizar la idea tras la derivada covariante de tensores de tipo  $(r, s)$ . Comencemos con el caso más sencillo: las 1-formas. Estos tensores resultan ser, tal y como se detalló en el Apéndice B, los elementos del dual de  $T_p(M)$ . Así, dada una 1-forma  $w = w_i dx^i$  y un campo vectorial  $V = V^i \partial_i$ , tenemos que:  $w(V) = f = w_i V^i$ , donde  $f$  es una función escalar. De este modo, la derivada covariante de  $f$ ,  $\nabla_j f = \partial_j f$ , en aras a guardar una mínima coherencia con la derivada usual, no puede ser otra cosa que  $f_{,j}$ . También es nuestro deseo que se respete la contracción de tensores:

$$\nabla(S_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_n} \otimes T_{l_1, \dots, l_r}^{j_1, \dots, j_s}) = (\nabla S_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_n}) \otimes T_{l_1, \dots, l_r}^{j_1, \dots, j_s} + S_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_n} \otimes (\nabla T_{l_1, \dots, l_r}^{j_1, \dots, j_s}),$$

para cualesquiera tensores  $T, S$ . De esta manera:

$$\nabla_j f = \nabla_j(w_i V^i) = (\nabla_j w_i) V^i + w_i (\nabla_j V^i), \quad f_{,j} = \nabla_j(w_i V^i) = w_{i,j} V^i + w_i V_{,j}^i.$$

Igualando ambas expresiones, dejando a un lado el miembro  $(\nabla_j w_i) V^i$  y sustituyendo la definición de derivada covariante del campo  $V$ :

$$(\nabla_j w^i) V^i = w_{i,j} V^i - w_k \Gamma_{ij}^k V^i \implies w_{i,j} = w_{i,j} + \Gamma_{ij}^k w_k.$$

De esta guisa, sabiendo derivar tensores de tipo  $(r, s)$ , con  $r + s \leq n$ , donde  $n$  denota la dimensión de la variedad, podríamos definir, mediante un razonamiento inductivo, la derivada de tensores de tipo  $(r, s + 1)$  y  $(r + 1, s)$ . Así, dado un tensor de tipo  $(r, s)$  tendríamos que:

$$T_{j_1, \dots, j_s; k}^{i_1, \dots, i_r} = T_{j_1, \dots, j_s, k}^{i_1, \dots, i_r} + \sum_{m=1}^r \Gamma_{lk}^m T_{j_1, \dots, j_s, k}^{i_1, \dots, i_{m-1}, l, i_{m+1}, \dots, i_r} - \sum_{m=1}^r \Gamma_{jm}^w T_{j_1, \dots, j_{m-1}, w, j_{m+1}, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$$

Sea como fuere, desde un punto de vista computacional, lo que cabe recordar es que cada superíndice del tensor se deriva con un símbolo de Christoffel positivo, y cada subíndice, con uno negativo. Veamos un ejemplo antes de presentar el lema:

$$V_{j;k}^i = V_{j,k}^i + \Gamma_{lj}^i V_j^l - \Gamma_{jk}^l V_l^i, \quad V_{ij;k} = V_{ij,k} - \Gamma_{ik}^l V_{lj} - \Gamma_{jk}^l V_{li}.$$

**Lema 2.3.** *El tensor de Riemann es el único tensor que para todo campo vectorial  $\vec{V}$  verifica*

$$V_{;lk}^i - V_{;kl}^i = R_{jkl}^i V^j.$$

*Demostración.* Apliquemos, primeramente, la definición de derivada covariante a  $V_{;lk}^i$ :

$$\begin{aligned} V_{;lk}^i &= (V_{;l}^i)_{,k} - \Gamma_{kl}^n V_{;n}^i + \Gamma_{nk}^i V_{;l}^n \\ &= V_{,lk}^i + \Gamma_{jl,k}^i V^j + \Gamma_{jl}^i V_{,k}^j - \Gamma_{kl}^n V_{;n}^i + \Gamma_{nk}^i V_{;l}^n. \end{aligned}$$

Repetiendo el mismo procedimiento para los dos últimos sumandos y colocando en primer lugar aquéllos términos de la expresión de  $R_{jkl}^i$  que aparecen:

$$V_{;lk}^i = \Gamma_{jl,k}^i V^j + \Gamma_{nk}^i \Gamma_{jl}^n V^j + V_{,lk}^i + \Gamma_{jl}^i V_{,k}^j - \Gamma_{kl}^n V_{,n}^i - \Gamma_{kl}^n \Gamma_{jn}^i V^j + \Gamma_{nk}^i V_{,l}^n.$$

Nótese que para hallar  $V_{;kl}^i$  bastaría con aplicar la permutación  $(k \ l)$  en la expresión anterior. De esa guisa, restando esta cantidad a ambos lados de la identidad, el resultado se deduce inmediatamente, pues los últimos términos se anulan, y la permutación de los dos primeros completan la expresión de  $R_{jkl}^i$ .  $\square$

En  $\mathbb{R}^n$  con la métrica usual, todos los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  son idénticamente nulos, de donde  $R_{jkl}^i = 0$ , en virtud de la caracterización con la que introdujimos el tensor de Riemann. Es más, si en una variedad riemanniana el tensor de Riemann se anula, entonces existe un difeomorfismo en un entorno de cada punto que transforma este entorno en un abierto de  $\mathbb{R}^n$  con la métrica usual. Este resultado entronca con la motivación original de Riemann, señalada al comienzo de la sección, y la que le condujo, precisamente, a introducir el tensor homónimo en 1862.

Independientemente de la caracterización escogida para  $R_{jkl}^i$ , la tarea de calcular cada una de sus componentes se torna afanosa, cuando no, ingrata. Es por ello que introduciremos una serie de resultados que, además de facilitar las computaciones, ponen de manifiesto algo que el lector avezado quizá comenzaba a sospechar: el tensor contiene información redundante. Trabajar con el tensor  $(0, 4)$  de componentes:  $R_{ijkl} = g_{in} R_{jkl}^n$ , nos facilitará el trabajo.

**Proposición 2.1.** *Sea  $R_{ijkl}$  como arriba, entonces éste verifica lo siguiente:*

1.  $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$
2.  $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$

*Demostración.* La prueba, si bien puede resultar un tanto pesada, nos será de gran utilizar para ganar familiaridad con el tensor de Riemann. Tomamos primeramente  $R_{ijkl} = g_{in} R_{jkl}^n$ , usando (2.4)

$$R_{ijkl} = A + g_{in}(\Gamma_{wk}^n \Gamma_{jl}^w - \Gamma_{wl}^n \Gamma_{jk}^w)$$

con  $A = g_{in}(\Gamma_{jl,k}^n - \Gamma_{jk,l}^n)$ . Recordando la expresión de los símbolos de Christoffel ((B.2)) se tiene  $A_1 = A_{11} + A_{12} - (A_{21} + A_{22})$  donde  $A_{11} = \frac{1}{2} g_{in} \frac{\partial}{\partial x^k} g^{nm} (g_{mj,l} + g_{lm,j} - g_{jl,m})$  y  $A_{12} = g_{ij,kl} + g_{li,jk} - g_{jl,ik}$  y  $A_{21}$  y  $A_{22}$  definidas de la misma manera, respectivamente, pero intercambiando  $k$  y  $l$ .

Como  $g_{in} g^{nm} = \delta_m^i$ , entonces  $(g_{in} g^{nm})_{,k} = 0$ . Usando después que  $g_{in;k} = 0$  y la regla de Leibniz, se tiene la siguiente identidad:

$$g_{in} \frac{\partial}{\partial x^k} g^{nm} = -g^{nm} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{in} = -g^{nm} (\Gamma_{ik}^w g_{nw} + \Gamma_{nk}^w g_{iw}).$$

Nota: precisamente por trabajar en el contexto de la conexión Levi-Civita, tenemos que  $g_{in;k} = 0$ , pues para dicha conexión exigíamos la verificación de la regla del producto para la métrica  $G$ , o lo que es lo mismo:  $g_{in,k} = \Gamma_{ik}^l g_{ln} + \Gamma_{nk}^l g_{il}$ .



Teniendo presentes las consideraciones previas, operando en  $A_1$  se llega a que:

$$\begin{aligned} A_{11} - A_{21} &= -\frac{1}{2} \underbrace{g^{nm}(g_{mj,l} + g_{lm,j} - g_{jl,m})}_{\Gamma_{lj}^n} (\Gamma_{ik}^w g_{nw} + \Gamma_{nk}^w g_{iw}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \underbrace{g^{nm}(g_{mj,k} + g_{km,j} - g_{jk,m})}_{\Gamma_{kj}^n} (\Gamma_{il}^w g_{nw} + \Gamma_{nl}^w g_{iw}), \\ A_{12} - A_{22} &= \frac{1}{2} (g_{li,jk} - g_{jl,ik} - g_{ki,jl} + g_{jk,il}). \end{aligned}$$

De esta manera, recopilando toda la información, llegamos a una expresión más sintética de  $R_{ijkl}$ :

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \frac{1}{2} (g_{li,jk} - g_{jl,ik} - g_{ki,jl} + g_{jk,il}) + (\Gamma_{il}^w g_{nw} + \Gamma_{nl}^w g_{iw}) \Gamma_{kj}^n \\ &\quad - (\Gamma_{ik}^w g_{nw} + \Gamma_{nk}^w g_{iw}) \Gamma_{lj}^n + g_{in} (\Gamma_{wk}^n \Gamma_{jl}^w - \Gamma_{wl}^n \Gamma_{jk}^w). \end{aligned}$$

Gracias a la simetría de los símbolos de Christoffel en  $n$  y  $w$ , buena parte de ellos se cancelan, lo que nos lleva a la siguiente identidad:

$$(2.5) \quad R_{ijkl} = \frac{1}{2} (g_{li,jk} - g_{jl,ik} - g_{ki,jl} + g_{jk,il}) + g_{nw} (\Gamma_{il}^w \Gamma_{kj}^n - \Gamma_{ik}^w \Gamma_{lj}^n)$$

de donde las identidades 1) y 2) se deducen inmediatamente.  $\square$

Vamos a aprovechar la trabajada expresión (2.5) para probar un resultado más, relativo al tensor de curvatura.

**Proposición 2.2** (Identidad de Bianchi). *Sean  $R_{ijkl}$  las componentes del tensor de Riemann, entonces*

$$R_{ijkl;m} + R_{ijmk;l} + R_{ijlm;k} = 0$$

*Demostración.* Tratar de probar el resultado a partir de (2.5) puede resultar demasiado pesado. El recurso empleado pasa por escoger un “sistema de referencia inercial local”, o lo que es lo mismo, una región de la variedad riemanaiana lo suficientemente pequeña que pueda ser considerada como plana. Matemáticamente, lo anterior se traduce escoger una carta tal que que las derivadas parciales del tensor métrico se anulen en un punto  $p$ . La simplificación en (2.5) es evidente, pues los símbolos de Christoffel desaparecen, y en particular, se tiene que

$$(R_{ijkl;m} + R_{ijmk;l} + R_{ijlm;k}) \Big|_p = 0 \iff (R_{ijkl,m} + R_{ijmk,l} + R_{ijlm,k}) \Big|_p = 0$$

y la identidad se deduce de manera inmediata de la permutación cíclica de los índices  $k, l, m$ . El carácter general de la identidad se deduce de la tensorialidad: si las componentes de dos tensores, en este caso el tensor de Riemann y el nulo, coinciden en una carta, entonces también coinciden para cualquier otra.  $\square$

Como es natural, el lector ortodoxo podría objetar que la prueba anterior adolece de falta de rigor. Al estar en lo cierto, en el Apéndice D, podrá encontrar debidamente demostrado el lema que justifica el anterior salto lógico.

Nota: todas las identidades de las proposiciones anteriores son únicamente ciertas en el contexto de la conexión de Levi-Civita, donde se verifica la simetría de los símbolos de Christoffel, lo que en particular implica la nulidad del tensor torsión. A modo de curiosidad, mencionar que hubo intentos, algo infructuosos, de unificar electromagnetismo y gravedad considerando el caso no simétrico.

Si bien los resultados anteriores pueden resultar de ayuda a la hora de calcular las componentes del tensor de curvatura, difícilmente pueden competir con la significativa mayor sencillez del llamado *tensor de Ricci*.

**Definición 2.7.** Se llama **tensor de Ricci** al tensor de tipo  $(0, 2)$  de componentes

$$R_{ij} = R_{ikj}^k$$

y **tensor de Ricci contravariante** al tensor de tipo  $(2, 0)$  de componentes

$$R^{ij} = g^{ia} g^{jb} R_{ab}.$$

Por último, se llama **curvatura escalar** a la función

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

**Proposición 2.3.** Con las definiciones anteriores se verifica

$$a) \quad R_{ij} = R_{ji}, \quad b) \quad R^{ij} = R^{ji}, \quad c) \quad R_{;j}^{ij} = \frac{1}{2} g^{ij} R_{,j}.$$

*Demostración.* Como era de esperar, las identidades se deducen de las del tensor de Riemann. Por 1) en la Proposición 1.

$$R_{ij} = g^{kl} R_{ijkl} = -g^{kl} R_{jikl} = g^{kl} R_{jilk} = R_{ji}.$$

Por otro lado, para probar 2):  $0 = (R_{ab} - R_{ba})g^{ia}g^{jb} = R^{ij} - R^{ji}$ .

Para probar la última igualdad, vamos a usar que  $g_{;m}^{il} = 0$ , probemos esta identidad:

$$0 = (\delta_l^i - g^{il} g_{lj});_k = -g_{;k}^{il} g_{lj}$$

por lo que  $g_{;k}^{il} = 0$ , ya que la métrica  $g_{lj}$  es no singular.

Partimos de la Identidad de Bianchi, la cual multiplicamos por  $g^{ik}$ :

$$g^{ik}(R_{ijkl;m} + R_{ijmk;l} + R_{ijlm;k}) = R_{j;l;m} - R_{jml;k}^k - R_{jm;l} = 0$$

en donde hemos utilizado la antisimetría del tensor de curvatura. Multiplicando a continuación por  $g^{jl}$ :

$$R_{;m} - R_{m;l}^l - R_{m;l}^l = 0$$

Como  $R$  es un escalar  $R_{;m} = R_{,m}$ , de donde, si multiplicamos por último por  $g^{il}$ :

$$g^{il}(2R_l^m - \delta_l^m R)_{;m} = (g^{il} 2R_l^m - \delta_l^m R)_{;m} = (2R^{im} - g^{im} R)_{;m} = 0$$

□

En el apéndice D, en el apartado Ejercicios, podrán encontrarse un par de ejemplos relativos al cálculo de las componentes de estos nuevos tensores. Se recomienda echarle un vistazo, pues familiarizarse con éstos será imprescindible para la debida comprensión de los siguientes apartados.

## 2.3 Deducción de las ecuaciones de campo

Llegados a este punto, cualquier lector coincidirá en la conveniencia de haber descrito la gravedad y su acción sobre la materia en base a la idea geométrica de una variedad dotada de una métrica. Las llamadas *ecuaciones de campo* expresan un punto vital y hasta ahora desconocido en la Relatividad General: mostrar cómo las fuentes del campo gravitatorio determinan la métrica.

La teoría newtoniana, en su reformulación por autores posteriores a Newton, presenta su propia ecuación de campo: la llamada *ecuación de Poisson*, en donde, la densidad de la masa,  $\rho$ , desempeña el papel de fuente del campo gravitatorio:

$$(2.6) \quad \Delta\Phi = 4\pi G\rho,$$

donde  $\Delta = \delta_j^i \partial_i \partial_j$  es el operador Laplaciano y  $G = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$  es la constante de gravitación universal. En el caso de una masa  $M$  puntual, sabemos que la solución a (2.6) no es otra que el ya familiar potencial newtoniano:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}.$$

En términos relativistas, el concepto de ‘masa’ resulta un tanto insuficiente, siendo por ello necesaria una generalización propicia de la llamada fuente del campo gravitatorio. En primer lugar, será preciso una expresión covariante de la misma: todas las leyes físicas deben tomar la misma forma en todas las coordenadas. Tal cosa no puede significar sino una ecuación tensorial. Por otro lado, si la masa efectivamente curva el espacio-tiempo, hemos de dar con un tensor que codifique la distribución de materia en éste, postulándose así como la fuente del campo. Tal tensor no es sino el *tensor energía-momento*. Así, considerando la métrica como la generalización relativista del potencial newtoniano, y la identidad (2.6) como un caso particular (de hecho límite) de las ecuaciones de campo, entonces dichas ecuaciones habrán de describir cuantitativamente la relación entre un tensor dependiente de la curvatura del espacio-tiempo y el *tensor energía-momento*. Para poder enunciarlas debidamente, hemos de estudiar brevemente la motivación tras este nuevo tensor.

### 2.3.1 El tensor energía-momento

Siguiendo a [Sch85], consideramos una distribución  $S$  de partículas dependiente del tiempo. Sea  $m_0$  la masa en reposo de cada una de ellas, y asumamos a su vez que no interaccionan entre sí. Sea ahora  $S'$  otra distribución idéntica a la anterior pero con una velocidad relativa  $v'$  respecto de  $S$ . Dado un punto  $p$  de cualesquiera  $S$  o  $S'$ , podemos caracterizar cada una de ellas en función de la densidad de materia  $\rho$  y la velocidad  $\nu$ . De esta manera, como  $\nu = 0$ , se tiene que

la densidad de  $S$ , viene dada por  $\rho = m_0 n_0$ , donde  $n_0$  es el número de partículas por unidad de volumen. En el caso de  $S'$ , el volumen experimentará una contracción de Lorentz en la dirección del movimiento, por lo que el número de partículas por unidad de volumen será  $n' = \gamma n_0$ . Lo mismo ocurrirá con la masa de cada partícula en  $S'$ :  $m' = \gamma m_0$ . De esta manera, la densidad de materia en  $S'$  vendrá dada por:  $\rho' = \gamma^2 \rho_0$ , donde, en unidades relativistas,  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  (para más información se remite al lector al Apéndice A). La expresión anterior resulta bastante ilustrativa a la hora de determinar el rango del tensor. Efectivamente, las componentes de los tensores de orden  $(1, 0)$ , esto es, los vectores, se transforman como sigue:

$$\tilde{T}^\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} T^\beta$$

donde, en el contexto de las transformaciones de Lorentz,  $\partial \tilde{x}^\alpha / \partial x^\beta = \gamma$ . El hecho de que aparezca un término cuadrático en  $\gamma$ , nos invita a pensar que el tensor energía momento es de tipo  $(2, 0)$ . De esta manera, si  $(x^1(\tau), \dots, x^4(\tau))$  es la trayectoria de una geodésica temporal, definimos su cuadrivelocidad como el vector  $\vec{u}$  de componentes  $u^\nu = dx^\nu / d\tau$ , y el vector  $m\vec{u}$  como su cuádrimomento. Dicho esto, estamos en situación de introducir las componentes del nuevo tensor. En el contexto de un fluido sin rozamiento y en el que las partículas viajan paralelamente, se tiene que:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta}$$

donde  $\rho$  denota la densidad y  $p$  la presión. Así definido, cabe dar la siguiente interpretación de las componentes del tensor:

$$T^{\alpha\beta} = \text{flujo del } \alpha\text{-ésimo momento a través de la superficie } \beta = \text{constante}.$$

Para terminar esta breve discusión, enunciaremos tres propiedades fundamentales del tensor energía-momento:

1. En ausencia de masas, esto es, en el vacío:  $\mathbf{T} = 0$ .
2. Simetría:  $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ .
3. Conservación del tensor energía-momento:  $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ . En otras palabras, el cuádrimomento se conserva: en un cubo infinitesimal, el momento entra y sale por el mismo número de caras.

Como ya dijimos con anterioridad, la generalización de (2.6) nos lleva a considerar una identidad tensorial. De esta manera, el miembro de la izquierda recogería las implicaciones métricas,  $G^{\alpha\beta}$ , y el derecho la distribución de energía y materia,  $T^{\alpha\beta}$ :

$$(2.7) \quad G^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta} \quad \text{con } \kappa \text{ una constante a determinar.}$$

Por otro lado, recordamos que el operador  $\Delta$ , aparecido en la ecuación (2.6), es un operador diferencial de segundo orden, por lo que, siendo la métrica una generalización del potencial clásico, en aras a guardar una mínima coherencia con la ecuación de Poisson,  $G^{\alpha\beta}$  habrá de involucrar derivadas segundas del tensor métrico, además de ser lineal en ellas y simétrico. Al tratarse de un tensor de tipo  $(2, 0)$ , los únicos tensores conocidos que satisfacen las exigencias

anteriores son: el tensor de Ricci,  $R^{\alpha\beta}$ ; el propio tensor métrico  $g^{\alpha\beta}$ ;  $Rg^{\alpha\beta}$ , donde  $R$  denota la curvatura escalar o, en particular, cualquier combinación lineal de éstos. De esta guisa:

$$G^{\alpha\beta} = \lambda R^{\alpha\beta} + \mu Rg^{\alpha\beta} + \gamma g^{\alpha\beta}.$$

Como  $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ , se precisa que  $G_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ , de donde, usando que  $g_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ :

$$\lambda R_{;\beta}^{\alpha\beta} + \mu R_{;\beta} g^{\alpha\beta} = 0.$$

De  $R_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R_{,\beta}$ , se deduce que  $\mu = -\lambda/2$ . Por otro lado, recordamos que en ausencia de masas, las componentes del tensor energía-momento son nulas. En este caso, si deseamos que el espacio plano de Minkowski,  $R^{\alpha\beta} = 0$ , se postule como una solución factible de (2.7), necesitamos  $\gamma = 0$ . Sustituyendo lo anterior en (2.7) se llega a una formulación preliminar de las ecuaciones de campo:

$$(2.8) \quad R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta} \quad \text{donde} \quad \kappa = 1/\lambda.$$

La identidad anterior tiene una versión covariante. Efectivamente, multiplicando por  $g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}$  en ambos lados de (2.8):

$$(2.9) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

Podemos manipular la expresión (2.9) para llegar a una nueva identidad, a saber: multiplicando por  $g^{\mu\alpha}$  y sumando en  $\alpha = \nu$ , se deduce que

$$R - \frac{1}{2}4R = \kappa T \iff R = -\kappa T.$$

Observación:  $g^{\mu\alpha}g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\alpha$  donde para  $\alpha = \nu$ , se tiene que:  $\sum_\alpha \delta_\alpha^\alpha = 4$ . Sustituyendo  $R = -\kappa T$  en (2.9), llegamos a una nueva identidad de la que partiremos para el cálculo de  $\kappa$ :

$$(2.10) \quad R_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} - \frac{\kappa}{2}Tg_{\alpha\beta}$$

Como ya ocurriera con anterioridad con el límite newtoniano, la concordancia entre Relatividad y gravedad newtoniana para campos gravitatorios débiles y partículas viajando a baja velocidad emerge de nuevo<sup>2</sup>. Recordamos las hipótesis allí presentadas:

- Para campos gravitacionales débiles:  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}$  con  $0 < \epsilon \ll 1$ . Recordamos que  $-\eta_{00} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$  y  $\eta_{\alpha\beta} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ .
- La métrica asociada al campo gravitatorio es cuasi-independiente respecto al tiempo:  $h_{\alpha\beta,\gamma 0} \approx 0$ .

<sup>2</sup>A propósito de la mencionada vinculación entre Relatividad y gravitación newtoniana, recomendar la lectura de [BB06], instructiva e ilustrativa introducción a las ecuaciones de campo basándose en el citado nexo entre las teorías.

- Supongamos además que:
  - Acotación de las variaciones espaciales:  $|h_{\alpha\beta,\gamma\delta}| < C$
  - Para bajas velocidades, las componentes de  $T_{\alpha\beta}$  con  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  son comparativamente más pequeños que  $T_{00} = \rho$ .

Teniendo presentes las observaciones previas, consideramos el caso  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$  en (2.10):

$$(2.11) \quad R_{00} \approx \frac{1}{2}\kappa\rho$$

en donde se ha empleado además la aproximación  $g_{00} \approx 1$  pues  $\epsilon \ll 1$ . De este modo, procedamos a la estimación del valor de  $R_{00}$ :

$$R_{0\beta 0}^{\alpha} = \Gamma_{00,\beta}^{\alpha} - \Gamma_{0\beta,0}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\lambda} - \Gamma_{0\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\beta 0}^{\lambda}.$$

Los dos últimos sumandos involucran términos de orden  $\epsilon^2$ , por lo que al ser un  $o(\epsilon)$  los podemos considerar negligibles. Por su parte, la segunda derivada, al ser temporal, también podemos desestimarla. Por lo tanto:

$$R_{00} = R_{0\alpha 0}^{\alpha} \approx \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} = \left(-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}h_{00,\mu}\right)_{,\alpha} \quad \text{con } \alpha, \mu = 1, 2, 3.$$

donde hemos usado las estimaciones del Capítulo 1 para  $\Gamma_{00}^{\alpha}$ . Como  $\eta^{\alpha\mu} = -\delta_{\mu}^{\alpha}$ , tenemos que  $R_{00} = \frac{1}{2}\Delta h_{00} = \frac{1}{2}\Delta g_{00}$ , con  $\Delta$  el operador laplaciano. Remitiéndonos nuevamente al citado capítulo, se tiene que  $g_{00} = 1 + 2\Phi$ , donde  $\Phi$  es el potencial newtoniano. Introduciendo toda esta información en (2.11):

$$\frac{1}{2}\Delta(1 + 2\Phi) = \frac{\kappa\rho}{2} \implies \Delta\Phi = \kappa\rho/2.$$

Por consiguiente, en aras a guardar una correspondencia con (2.6), tenemos que  $\kappa=8\pi G$ . Ello permite enunciar finalmente las *ecuaciones de campo de Einstein*:

$$(2.12) \quad \boxed{R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi GT_{\alpha\beta}}$$

A título honorífico, el tensor  $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$  suele ser conocido como *tensor de Einstein*.

Aunque en ocasiones pueda no parecerlo, el fin didáctico del trabajo subyace y guía toda exposición. De este modo, para evitar confinar los recién adquiridos conocimientos al mero plano teórico, vamos a familiarizarnos con la ecuación estrella de la memoria. Para ello, vamos a asumir que en una teoría general de la relatividad  $n$ -dimensional se tienen las siguientes ecuaciones de campo:  $R_{ij} - c_1g_{ij}R = c_2T_{ij}$ . Supongamos la existencia la existencia de una supuesta solución para el caso del vacío,  $T_{ij} = 0$  con  $R \neq 0$ . De esta guisa, tenemos que:

$$R_{ij} - c_1g_{ij}R = 0.$$

Para hallar la constante tan sólo hemos de remitirnos a nuestros conocimientos sobre tensores. Así, multiplicando por  $g^{ik}$  y sumando para  $k = j$ , se tiene que:

$$R(1 - c_1n) = 0.$$

Como  $R \neq 0$ , necesariamente  $1 - nc_1 = 0$ , de donde se deduce que  $c_1 = 1/n$ .

## Capítulo 3

# La solución de Schwarzschild

El precio pagado por la codiciada covarianza, esto es, el afán emancipador respecto de las coordenadas, es elevado: las ecuaciones de campo, pese a su indiscutible trascendencia científica, se antojan de compleja resolución. Eso mismo debió pensar Einstein tras su publicación en 1915, y si bien la escasez de soluciones exactas de relevancia física significativa es un hecho, para sorpresa de todos, el físico alemán Karl Schwarzschild logró dar con una solución poco tiempo después. En el presente epígrafe presentamos la deducción de la desde entonces llamada *solución de Schwarzschild* y para ello seguiremos, fundamentalmente, [Cha01], [Sch85] y [HawEll].

### 3.1 Deducción de la solución de Schwarzschild

El elevado coste computacional de las componentes del tensor de Ricci es más que evidente. Consciente de ello, Schwarzschild, en aras a simplificar las ecuaciones, se sirvió de una útil herramienta matemática: la simetría. A ella habría de sumarle una serie de consideraciones físicas que detallamos a continuación:

1. Hipótesis isotrópica: consideramos un espacio-tiempo con simetría esférica. De este modo, no hay direcciones distinguibles.
2. La masa es estática y por consiguiente, el campo generado, también. Ello se traduce en:
  - Independencia de las componentes de la métrica respecto del tiempo: el tiempo pasa igual para todos los puntos situados en la misma esfera.
  - Invariancia de la métrica bajo el cambio  $t \mapsto -t$ : la noción “sentido de movimiento” es inexistente.
3. Ausencia de materia en el exterior de la masa, esto es,  $T_{ij} = 0$ . Ello lleva a la consideración de las *ecuaciones de campo en el vacío*:

$$(3.1) \quad R_{ij} = 0.$$

Vamos a brindar un ejemplo introductorio que nos ayude a enfocar el razonamiento. Consideremos en  $\mathbb{R}^2$  una métrica  $g_{11}(x, y)dx^2 + 2g_{12}(x, y)dxdy + g_{22}(x, y)dy^2$  invariante por giros. En este sentido, considerando el giro  $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$  y sustituyéndolo en la métrica, obtenemos que para los coeficientes del término  $dxdy$  se ha de verificar  $g_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = g_{12} \quad \forall \alpha \in (0, 2\pi)$  lo que fuerza a tomar  $g_{12} = 0$ . Por otro lado,

$$(g_{11} \cos^2 \alpha + g_{22} \sin^2 \alpha)dx^2 + (g_{11} \sin^2 \alpha + g_{22} \cos^2 \alpha)dy^2 = g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2$$

de donde  $g_{11} = g_{22}$ . La enseñanza obtenida es clara: dada una métrica invariante por giros o simetría esférica en el plano, ésta es diagonal. Tomando esta afirmación como punto de partida, vamos a caracterizar la simetría esférica del espacio-tiempo como la invariabilidad del mismo para el grupo de rotaciones espaciales  $SO(3)$ . Para ello, vamos a considerar primeramente una línea de universo  $\mathcal{L}$ , a partir de la cual vamos a construir una 2-esfera  $\mathcal{S}_d$  centrada en  $p$  recorriendo todas las geodésicas perpendiculares a  $\mathcal{L}$  en  $p$  una distancia  $d$ . Fijando  $\mathcal{L}$ , los puntos así obtenidos permanecen inalterables bajo la acción del grupo ortogonal  $SO(3)$ , por lo que el espacio-tiempo admite dicho grupo como grupo de isometrías, siendo las esferas  $\mathcal{S}_d$  las órbitas correspondientes. De esta manera, diremos que una variedad riemanniana  $(M, g)$  posee simetría esférica si cada aplicación  $A \in SO(3), p \in M, \nu_A : M \rightarrow M, p \mapsto Ap$ , es una isometría y la órbita  $Orb(q)$  de un punto  $q$  no fijo es una subvariedad espacial de  $M$  de dimensión 2. En particular, el conjunto  $\mathcal{C}$  de todas las geodésicas ortogonales a  $Orb(q)$  en  $q$  es una subvariedad de idéntica dimensión.

Teniendo presente lo anterior, escogemos la carta  $(U, \psi = (t, r, \theta, \varphi))$  y tomamos  $Orb(q)$  como las superficies  $\mathcal{O} = \{t = cte, r = cte\}$  y las variedades ortogonales como  $\mathcal{C} = \{\theta = cte, \varphi = cte\}$ . Consideramos la siguiente métrica, a la cual aplicaremos las diversas hipótesis ya expuestas:

$$(3.2) \quad ds^2 = g_{11}dt^2 + 2(g_{12}dtdr + g_{13}dtd\theta + g_{14}dtd\varphi + g_{23}drd\theta + g_{24}drd\varphi) + g_{22}dr^2 + r^2d\Omega$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ . El carácter ortogonal de las superficies  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{O}$  implica que:

$$G\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = G\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = G\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = G\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = 0$$

lo que se traduce en:  $g_{13} = g_{14} = g_{23} = g_{24} = 0$ . De esta guisa, la expresión (3.2) queda reducida a:

$$(3.3) \quad g_{11}dt^2 + 2g_{12}dtdr + g_{22}dr^2 + r^2d\Omega.$$

Merced a la segunda condición, se llega a que, por un lado, el término  $g_{12}$  es nulo y, por otro, los coeficientes  $g_{11}$  y  $g_{22}$  son ambas funciones dependientes únicamente de  $r$ , a saber:

$$(3.4) \quad A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2 \theta d\varphi^2.$$

La métrica que codifica la curvatura del espacio-tiempo en un contexto de masas lejanas, matemáticamente  $r \rightarrow \infty$ , se asemeja a la de Minkowski, vinculada, como ya sabemos, a un espacio-tiempo plano. De esta manera, exigiremos a la métrica (3.4) ser *asintóticamente plana* o, equivalentemente:

$$(3.5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1.$$

Ya disponemos todos los ingredientes necesarios para deducir el resultado de Schwarzschild



**Teorema 3.1.** *Si una métrica de la forma (3.4) satisface  $R_{ij} = 0$ , con  $A, B \in C^2(\mathbb{R}^+)$  tales que verifican (3.5), entonces tal métrica es la de Schwarzschild:*

$$\left(1 + \frac{K}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{K}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

donde  $K$  es una constante.

*Demostración.* Se trata de una prueba un tanto larga, de manera que organicemos en primer lugar la estrategia a seguir. Es nuestro deseo comprobar que, bajo las hipótesis del teorema, efectivamente,  $B(r) = 1/A(r) = (1 + K/r)^{-1}$ . Para ello habremos de computar las componentes del tensor de Ricci,  $R_{ij}$ , con  $i, j = 1, 2, 3, 4$  y por ende los correspondientes símbolos de Christoffel. A continuación, usando la identidad  $R_{ij} = 0$ , llegaremos a una serie de ecuaciones diferenciales que habremos de resolver para dar con el resultado.

El cálculo de los símbolos de Christoffel, como viene siendo habitual, lo llevaremos a cabo mediante la identificación de los coeficientes de las más que conocidas ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano asociado a (3.4):  $L = At^2 - Br^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$ . Por consiguiente, recordando la definición:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad \text{donde } (x^1, x^2, x^3, x^4) = (t, r, \theta, \varphi)$$

se tiene que las ecuaciones y los correspondientes símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\begin{cases} \ddot{t} + \frac{A'}{A} \dot{t} \dot{r} = 0, & \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \\ \ddot{r} + \dot{r} \frac{B'}{2B} \dot{r}^2 + \frac{A'}{2B} \dot{t}^2 - \frac{r}{B} \dot{\theta}^2 - \frac{r}{B} \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 = 0, & \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{A'}{2B}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{B'}{2B}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\frac{r}{B}, \quad \Gamma_{44}^2 = -\frac{r}{B} \sin^2 \theta,$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{44}^3 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{24}^4 = \Gamma_{42}^4 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{34}^4 = \Gamma_{43}^4 = \cot \theta.$$

Cálculo de las componentes del tensor de Ricci.

1. La matriz de componentes del tensor de Ricci para la métrica (3.4) es diagonal. Efectivamente, la invariancia de aquélla para la transformación  $t \mapsto -t$  y el cambio de carta  $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4) \mapsto (-x^1, x^2, x^3, x^4)$ , transforma las componentes del tensor como:

$$R_{1j} = \tilde{R}_{kl} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j} = R_{1j}(-1) \cdot 1 \implies R_{1j} = 0 \quad \text{con } j \neq 1.$$

Obsérvese cómo la  $\pi$ -periodicidad de  $\sin^2 \theta$ , así como la  $2\pi$ -periodicidad del ángulo  $\varphi$ , nos permite concluir que, mediante sendos cambios de carta:

$$\begin{cases} \tilde{x}^3 = \pi - x^3, & \tilde{x}^i = x^i, i \neq 3 \\ \tilde{x}^4 = 2\pi - x^4, & \tilde{x}^i = x^i, i \neq 4 \end{cases}$$

$R_{3j} = 0, j \neq 3$  y  $R_{4j} = 0, j \neq 4$ , y, por la simetría del tensor:  $R_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ .

2. Si bien es cierto que merced a la observación previa hemos reducido de manera drástica el número de componentes a calcular, la computación directa de las cuatro restantes resultaría excesivamente trabajosa. Es por ello que vamos a presentar un resultado que nos facilitará de manera considerable la tarea.

**Lema 3.1.** *Dada una variedad riemanniana y una función  $g$ , representando el determinante del tensor métrico en cierta carta, se verifica lo siguiente:*

$$\Gamma_{ik}^k = (\log \sqrt{|g|})_{,i}.$$

*Demostración.* Probaremos el caso  $g > 0$ , el caso negativo es idéntico. Usando la definición de derivada aprendida en los primeros cursos de cálculo, no resulta complicado comprobar que derivar un determinante equivale a hacerlo para cada una de sus filas. De esta guisa:

$$g_{,i} = g_{1j,i}G^{1j} + g_{2j,i}G^{2j} + \cdots + g_{nj,i}G^{nj} = g_{kj,i}G^{kj}$$

donde  $G^{kj} = (-1)^{k+j}M^{kj}$ , con  $M^{kj}$  el menor  $(k, j)$  de la matriz principal  $g_{kj}$ . De la inversión de matrices, sabemos que la matriz inversa de  $g_{kj}$  viene dada por  $g^{kj} = G^{kj}/g$ , con  $g = \det(g_{kj})$  (nótese que la trasposición de la matriz de cofactores es irrelevante, habida cuenta de la simetría del tensor métrico). Por consiguiente,

$$g_{,i} = gg^{kj}g_{kj,i} = gg^{kj}(g_{kj,i} + g_{ik,j} - g_{ji,k}) = 2g\Gamma_{ik}^k$$

donde en la segunda igualdad se ha usado la simetría del tensor métrico. Efectivamente:  $g_{ik,j} - g_{ji,k}$  es antisimétrico en los índices  $k$  y  $j$ , por lo que, si sumamos en dichos índices, el resultado será nulo. Por el convenio de Einstein, lo anterior equivale a afirmar que:  $g^{kj}(g_{ik,j} - g_{ji,k}) = 0$   $\square$

Pertrechados con el lema anterior, procedamos al cómputo de  $R_{ii}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . En primer lugar, obsérvese que para la métrica (3.4),  $g = -r^4 A(r)B(r) \sin^2 \theta$ . Por comodidad, en lo posterior omitiremos la variable para las funciones  $A$  y  $B$ . De este modo:

$$\Gamma_{ik}^k = (\log \sqrt{-g})_{,i} = \left( \frac{1}{2} \log A + \frac{1}{2} \log B + 2 \log r + \log \sin \theta \right)_{,i}.$$

De ello se desprende de manera inmediata que:

$$\Gamma_{1k}^k = \Gamma_{4k}^k = 0, \quad \Gamma_{2k}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{r} + \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right), \quad \Gamma_{3k}^k = \cot \theta.$$

Recordamos a su vez que:  $R_{ii} = R_{iik}^k = \Gamma_{ii,k}^k - \Gamma_{ik,i}^k + \Gamma_{nk}^k \Gamma_{ii}^n - \Gamma_{ni}^k \Gamma_{ik}^n$   
 $i = 1$ :

$$\begin{aligned} R_{11} &= \Gamma_{11,k}^k - \Gamma_{1k,1}^k + \Gamma_{nk}^k \Gamma_{11}^n - \Gamma_{n1}^k \Gamma_{1k}^n \\ &= \Gamma_{11,2}^2 - 0 + \Gamma_{2k}^k \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{20}^2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1)^2 \\ &= \left( \frac{A'}{2B} \right)' + \frac{A'}{4B} \left( \frac{4}{r} + \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'^2}{2AB}. \end{aligned}$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} + \frac{A'}{Br} - \frac{A'^2}{4AB}$$

$i = 2$ :

$$\begin{aligned} R_{22} &= \Gamma_{22,k}^k - \Gamma_{2k,2}^k + \Gamma_{nk}^k \Gamma_{22}^n - \Gamma_{n2}^k \Gamma_{2k}^n \\ &= \Gamma_{22,2}^2 - \Gamma_{2k,2}^k + \Gamma_{2k}^k \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{k2}^k)^2 \\ &= \left(\frac{B'}{2B}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{r} + \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right)' + \frac{B'}{4B}\left(\frac{4}{r} + \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \left(\left(\frac{A'}{2A}\right)^2 + \left(\frac{B'}{2B}\right)^2 + \frac{2}{r^2}\right). \end{aligned}$$

$$R_{22} = \frac{A'^2}{4A^2} - \frac{A''}{2A} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{Br}$$

$i = 3$ :

$$\begin{aligned} R_{33} &= \Gamma_{33,k}^k - \Gamma_{3k,3}^k + \Gamma_{nk}^k \Gamma_{33}^n - \Gamma_{n3}^k \Gamma_{3k}^n \\ &= \Gamma_{33,2}^2 - \Gamma_{3k,3}^k + \Gamma_{2k}^k \Gamma_{33}^2 - (2\Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 + (\Gamma_{43}^4)^2) \\ &= \left(\frac{-r}{B}\right)' + (1 + \cot^2 \theta) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{r} + \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \frac{r}{B} + \frac{2}{B} - \cot^2 \theta. \end{aligned}$$

$$R_{33} = \frac{rB'}{2B^2} - \frac{A'r}{2AB} - \frac{1}{B} + 1$$

$i = 4$ :

$$\begin{aligned} R_{44} &= \Gamma_{44,k}^k - \Gamma_{4k,4}^k + \Gamma_{nk}^k \Gamma_{44}^n - \Gamma_{n4}^k \Gamma_{4k}^n \\ &= \Gamma_{44,2}^2 \Gamma_{44,3}^3 - 0 + \Gamma_{2k}^k \Gamma_{44}^2 + \Gamma_{3k}^k \Gamma_{44}^3 - 2(\Gamma_{44}^2 \Gamma_{42}^4 - \Gamma_{44}^3 \Gamma_{43}^4) \\ &= \left(\frac{-r}{B}\right)' \sin^2 \theta - (\cos^2 - \sin^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{r} + \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \frac{r}{B} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta - 2\left(-\frac{\sin^2 \theta}{B} - \cos^2 \theta\right). \end{aligned}$$

$$R_{44} = \left(\frac{rB'}{2B^2} - \frac{A'r}{2AB} - \frac{1}{B} + 1\right) \sin^2 \theta = \sin^2 \theta R_{33}$$

En el contexto de la métrica (3.4), las ecuaciones de campo tomaban la forma  $R_{ij} = 0$ , que, en virtud de lo anterior, nos lleva al sistema de ecuaciones diferenciales:  $R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$ . Obsérvese que multiplicando por  $B/A$  a la expresión de la primera componente del tensor se tiene que:

$$\frac{B}{A} R_{11} + R_{22} = 0 \iff \frac{A'}{Ar} + \frac{B'}{Br} = \frac{(AB)'}{ABr} = 0$$

de donde se sigue que  $AB = cte$  y merced a la condición (3.5), cogimos que  $cte = 1$  y, por consiguiente,  $A = B^{-1}$ . Sustituyendo esta nueva información en  $R_{33} = 0$ :

$$A'r + A - 1 = (Ar)' - 1 = 0 \implies A(r) = 1 + \frac{K}{r}$$

con  $K$  una constante. La sustitución directa de  $A(r)$  y  $B(r)$  en el sistema de ecuaciones original permite concluir que, efectivamente, ambas funciones son soluciones del mismo.  $\square$

Como el lector avezado seguramente haya comenzado a intuir, muy acertadamente, el valor de la constante  $K$  no es baladí. Si bien el siguiente epígrafe está consagrado al estudio de la métrica de Schwarzschild, a continuación mostramos un razonamiento intuitivo para hallar el valor de la constante. Nótese cómo para  $K = 0$ , la métrica obtenida es la de Minkowski en coordenadas polares: el valor de  $K$  está relacionado con la masa. En vez de suponer una ausencia total de masas ( $K = 0$ ), podemos considerarlas lejanas:  $r \rightarrow \infty$ , con la métrica en coordenadas cartesianas. En este contexto, como ya ocurriera con el límite newtoniano, es el coeficiente temporal,  $g_{00} = 1 + K/r$ , el que presenta información relevante, siendo el resto de términos una mera corrección de la métrica euclídea. Nos encontramos de esta manera, en un marco similar al del límite newtoniano, visto en el capítulo anterior. Ciertamente, para velocidades pequeñas  $g_{00} \approx 1 + 2\Phi$ , donde,  $\Phi$  es el ya conocido potencial newtoniano y, merced a la lejanía de la masa, ésta puede ser tomada como puntual por lo que:  $\Phi = -GM/r$ .<sup>1</sup> De esta guisa:

$$g_{00} = 1 + \frac{K}{r} \approx 1 + 2\Phi \iff \frac{K}{r} \approx -2GMr^{-1}$$

de donde,  $K = 2GM$ . La constante  $K$ , suele escribirse como  $r_0$  y se conoce como *radio de Schwarzschild*. Así, dada  $M = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - \{0\})$  con las funciones coordenadas  $(t, r, \theta, \varphi)$ , donde las tres últimas corresponden a las coordenadas esféricas, la *solución de Schwarzschild* o *métrica de Schwarzschild* es la dada por:

$$(3.6) \quad \boxed{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2}$$

Salta a la vista la existencia de dos singularidades: una física en  $r = 0$  y otra matemática en  $r = r_0$ . Ciertamente, ésta última, aparece únicamente cuando una estrella colapsa, haciendo su radio menor a  $r_0$ , dando origen a los célebres *agujeros negros*. La esfera  $r = r_0$  es conocida como *horizonte de sucesos*<sup>2</sup>, y aunque pueda parecer crítica, ésta únicamente lo es fruto de las coordenadas escogidas. Si deseamos tener una única componente conexa, nos vemos obligados a considerar dos componentes conexas distintas y escoger una. Por razones obvias, escogemos  $r > r_0$ , que representa, tal y como dijimos, el campo gravitatorio externo a un cuerpo esférico. De este modo, cabría preguntarse si la variedad riemanniana correspondiente a esta componente conexa,  $(\mathcal{M}, g)$ , puede ser extendida a otra variedad  $(\mathcal{M}', g')$ , tal que  $g' = g$  en  $Im(\mathcal{M})$ . Un sencillo y original cambio de carta nos permite salvar la singularidad en  $r_0$ , por lo tanto, esta singularidad no es física<sup>3</sup>. Presentamos a continuación el citado cambio que extender la variedad a  $r > 0$ . En primer lugar, para sintetizar la escritura, vamos a utilizar la siguiente notación:  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ . De este modo escribimos la métrica de Schwarzschild como

$$(3.7) \quad \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \left[ dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^2} \right] - r^2 d\Omega^2.$$

<sup>1</sup>Nuevamente,  $G = 6,67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$  designa la constante de gravitación y  $M$  denota la masa.

<sup>2</sup>Regiones del espacio-tiempo tales que una vez atravesadas, toda partícula se ve irremisiblemente atraída hacia la singularidad, siendo imposible cualquier influencia en eventos acaecidos fuera del horizonte, pero no necesariamente al revés.

<sup>3</sup>Si bien, una vez atravesada, las implicaciones físicas son más que constatables para todo cuerpo, éstas no existen como tales: el espacio-tiempo no se ve modificado

Si ahora tomamos  $dr_* = \frac{dr}{1-r_0/r}$ , integrando a ambos lados se tiene que  $r_*^2 = r + r_0 \ln(r - r_0)$ . Por lo que (3.7) deviene en:

$$(3.8) \quad \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) [dt^2 - dr_*^2] - r^2 d\Omega^2.$$

Definiendo  $v = t + r_*$  y considerando el cambio  $(t, r) \rightarrow (v, r)$ , se tiene que la métrica de Schwarzschild en las coordenadas  $(v, r, \theta, \varphi)$  es:

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega^2$$

donde  $-\infty < v < \infty, 0 < r < \infty, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi$ . Son las llamadas *coordenadas de Eddington-Finkelstein*.

Observación: si bien, nuevamente,  $g_{00}(r_0) = 0$ , esta vez:  $\det(g_{ij}(r_0)) \neq 0$  (gracias a los términos no diagonales), claro síntoma de la desaparición de la singularidad en  $r_0$  de la métrica en las nuevas coordenadas.

## 3.2 Geodésicas radiales en la solución de Schwarzschild

En el caso de tratarse de movimientos radiales, cuyos parámetros  $\theta$  y  $\varphi$  son constantes, la métrica dependerá, en términos espaciales, exclusivamente del radio. Esta consideración da sentido a la versión bidimensional de la métrica de Schwarzschild en  $M = \{(t, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$ :

$$(3.9) \quad \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2.$$

Procedemos por lo tanto al cálculo de las ecuaciones de las geodésicas asociadas a la métrica (3.9). Consideramos en primer lugar las trayectorias radiales de las partículas materiales que parten del reposo.

**Proposición 3.1.** *Si  $\gamma = (r(\tau), t(\tau))$  es una geodésica de (3.9) parametrizada por tiempo propio y tal que  $r(0) = R_0 > r_0, r'(0) = 0$ , entonces*

$$r(\tau) = R_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}V(K_0\tau)\right) \quad \text{donde} \quad K_0 = \frac{2}{R_0} \sqrt{\frac{r_0}{R_0}}.$$

$V(x)$  es la función inversa de  $f(x) = x + \sin x$  y recordamos que  $r_0 = 2GM$ .

*Demostración.* Como la geodésica está parametrizada por tiempo propio:

$$1 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2.$$

Por otro lado, calculando la ecuación de Euler-Lagrange para  $t$ , y teniendo en cuenta que los coeficientes de la métrica no dependen de la variable temporal, se tiene que:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0 \quad \text{esto es,} \quad \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \dot{t}^2 = 0.$$

de donde,  $(1 - \frac{r_0}{r})\dot{t}^2 = cte$ . Combinando las dos ecuaciones anteriores:  $\dot{r}^2 = r_0(r^{-1} - cte)$  y como por hipótesis  $r'(0) = 0$ , se deduce que  $cte = R_0^{-1}$ . De este modo, la siguiente ecuación diferencial a resolver es la siguiente:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = r_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right), \quad r(0) = 0.$$

Efectuando el cambio de variable  $v = V(K_0\tau)$ , es decir,  $\tau = (v + \sin v)/K_0$  en la ecuación anterior y aplicando la regla de la cadena a  $dr/dv$ :

$$\left(\frac{dr}{dv}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dv}\right)^2 = \frac{r_0}{K_0^2}(1 + \cos v)^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right).$$

Por separación de variables:  $\int \sqrt{\frac{r}{R_0 - r}} dr = \int R_0 \cos^2(v/2) dv$ . Tomando  $r = R_0 \cos^2(v/2)$ ,  $r$  satisface la identidad anterior, y por consiguiente, la ecuación diferencial de la que procede.  $\square$

La proposición<sup>4</sup> anterior nos permite brindar una nueva explicación sobre el porqué del valor del radio de Schwarzschild. Para problemas con masas y distancias habituales, aquéllas del sistemas solar por ejemplo, el valor de  $K_0$  es muy pequeño. De este modo, para valores de  $\tau$  en un entorno del origen, podemos expandir  $V(K_0\tau)$  hasta primer orden como:  $V(K_0\tau) \sim V(0) + K_0V'(0)\tau$ . Gracias al teorema de la función inversa, sabemos que  $V'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$ . Por otro lado, computando  $r''(\tau)$ , se tiene que:

$$r''(\tau) = -R_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}V(k_0\tau)\right)(V'(K_0\tau)K_0)^2 + g_0(x)$$

donde  $g_0(x)$  agrupa aquéllos términos de  $r''(\tau)$  que se anulan en  $\tau = 0$ . Evaluando la expresión anterior en dicho punto:  $r''(0) = -R_0/8 \cos^2(\frac{1}{2}V(0))K_0^2$  y como  $V(0) = 0$ , pues  $V(K_0\tau) \sim K_0\tau/2$ , se tiene que  $r''(0) \sim -R_0K_0^2/8$ . Para lograr una concordancia de la Relatividad General con la teoría newtoniana, hemos de exigir  $R_0K_0^2 = 8GM/R_0^2$ , de donde, sustituyendo el valor de  $K_0$ , se tiene que, efectivamente,  $r_0 = 2GM$ .

Una vez familiarizados con las implicaciones de la proposición anterior, pasamos a presentar un resultado análogo para los rayos luminosos con trayectorias radiales.

**Proposición 3.2.** *Si  $\gamma(\lambda) = (t(\lambda), r(\lambda))$  es una geodésica nula de (3.9) tal que  $r(0) = R_0 > r_0$  y  $t(0) = 0$ , entonces*

$$\pm t = r - R_0 + r_0 \log\left(\frac{r - r_0}{R_0 - r_0}\right)$$

donde el signo de  $r'(0)/t'(0)$  es positivo si la geodésica es saliente y negativo si es entrante.

*Demostración.* Por definición de geodésicas nulas se tiene que:  $(1 - \frac{r_0}{r})\dot{t}^2 - ((1 - \frac{r_0}{r}))^{-1}\dot{r}^2 = 0$ . Reordenando la expresión anterior, se llega a:  $(\frac{\dot{t}}{\dot{r}})^2 = (1 - r_0/r)^{-2}$ . Aplicando ahora la regla

<sup>4</sup>En el Apéndice E en la sección Ejemplos, puede encontrarse un caso de uso de la proposición anterior

de la cadena como  $\dot{t}/\dot{r} = dt/dr$  junto con las condiciones iniciales  $r(0) = R_0 > r_0$  y  $t(0) = 0$ , obtenemos que  $\pm t = \int_{R_0}^r (1 - r_0/x)^{-1} dx$ . De este modo:

$$\pm t = \int_{R_0}^r (1 - r_0/x)^{-1} dx = \int_{R_0}^r \frac{x - r_0 + r_0}{x - r_0} dx = \int_{R_0}^r dx + \int_{R_0}^r \frac{r_0}{x - r_0} dx.$$

Resolviendo estas integrales elementales, efectivamente:  $\pm t = r - R_0 + r_0 \log(\frac{r-r_0}{R_0-r_0})$ .  $\square$

Como ya es sabido, salvo en condiciones extremas, la Relatividad General solo añade una pequeña corrección a la teoría gravitatoria de Newton. Las discrepancias entre las geodésicas de la métrica de Schwarzschild y la física newtoniana en experimentos de caída libre terrestres son mínimas. De acuerdo con la mecánica newtoniana elemental, si dejásemos caer un objeto a 1 m del suelo, despreciando el rozamiento del aire, éste alcanzaría el suelo en  $\sqrt{\frac{2}{g}} \approx 0,45s$ . Vamos a ver como, el resultado previsto por la proposición anterior es prácticamente idéntico.

En este caso,  $R_0 = 6380001m$  y  $r(\tau) = 6,38 \times 10^6$ . Recordamos que la expresión que codifica la evolución de la posición de una partícula material en un movimiento radial respecto a una masa esférica viene dada por:

$$(3.10) \quad r(\tau) = R_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}V(K_0\tau)\right) \quad \text{donde} \quad K_0 = \frac{2}{R_0} \sqrt{\frac{r_0}{R_0}}.$$

Recordamos que  $V(x)$  no es sino la inversa de  $f(x) = x + \sin x$ . Para saber el tiempo que tardará en caer el objeto, tan sólo hemos de despejar  $\tau$  de (3.10). En primer lugar, usaremos la aproximación:  $\sqrt{y} \sim 1 + \frac{y-1}{2}$ , si  $y \sim 1$ . En nuestro caso  $y = \frac{r}{R_0} \approx 1$ . Con esto en mente y teniendo en cuenta lo dicho acerca de  $V(x)$ , se llega a que el valor de  $\tau$  buscado viene dado por:

$$\tau = \frac{1}{K_0} \left( \frac{1}{2} \arccos\left(1 + \frac{r/R_0 - 1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2} \arccos\left(1 + \frac{r/R_0 - 1}{2}\right)\right) \right).$$

Sustituyendo el valor del cociente  $r/R_0$  y  $K_0$  por  $3,5 \times 10^{-3}$ , se tiene que, efectivamente,  $\tau = 0,4524s$ .

### 3.3 Test clásicos de la Relatividad General

Albert Einstein, mundialmente conocido por su teoría de la Relatividad, fue galardonado con el premio Nobel de Física en el año 1922. Contrariamente a lo que muchos pudieran pensar, tal reconocimiento no le fue concedido por dicha teoría, sino por el llamado *efecto fotoeléctrico*<sup>5</sup>. La reticencia mostrada por ciertos integrantes del tribunal, da buena cuenta del estado de escepticismo y desconfianza que aún generaba la Relatividad en ciertos círculos académicos. Quizá la polémica en la que históricamente se ha visto sumida la considerada como la primera prueba experimental de la Relatividad, la deflexión de la luz, ayudan a entender tal estado de las cosas. Sea como fuere, una centuria después, la solidez y vigencia de la genial aportación de Einstein se deben, en buena medida, a la gran cantidad de verificaciones

<sup>5</sup>En pocas palabras, consiste en la emisión de electrones por un material al incidir sobre él una radiación electromagnética.

empíricas que la respaldan. En esta sección, procederemos a presentar los denominados tests clásicos, considerados por la literatura científica como los primeros avales de la Relatividad General.

### 3.3.1 Corrimiento al rojo gravitatorio

Antes de entrar de lleno en el tratamiento de la cuestión, es preciso realizar unas consideraciones introductorias que permitirán la debida formulación del corrimiento gravitatorio. Supongamos que desde el punto  $(r_A, t_A)$  del espacio-tiempo parte una geodésica hacia  $(r_B, t_B)$ . Asumamos, sin pérdida de generalidad, que se trata de una geodésica material (el caso nulo es idéntico). Recuperando la definición de tiempo propio y despejando el elemento  $dt/d\tau$  de ésta, se tiene que:

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{dr^2}{d\tau^2}} \quad \text{donde } \gamma = (1 - r_0/r)$$

De la integración a ambos lados de la identidad se deduce que:  $t_B - t_A = \int_{\tau_A}^{\tau_B} \sqrt{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{dr^2}{d\tau^2}} d\tau$ . La expresión anterior no depende de la partícula enviada, sino del camino. De esta guisa, si tras un intervalo de tiempo  $\Delta t_A$ , emitimos una segunda partícula desde  $(r_A, \tilde{t}_A)$  hacia  $(r_B, \tilde{t}_B)$ , recorriendo el mismo camino, el tiempo que tarda ésta en alcanzar  $r_B$  será el mismo. Es decir:  $\tilde{t}_B - \tilde{t}_A = t_B - t_A$ . De lo anterior se deduce que:

$$(3.11) \quad \Delta t_A = \tilde{t}_A - t_A = \tilde{t}_B - t_B = \Delta t_B.$$

Para un observador estático en  $r_A$ , i.e.  $\dot{r}(0) = 0$ , se verifica que:  $1 = (1 - r_0/r)(\frac{dt}{d\tau}(0))^2$ . Si  $\Delta t_A \ll 1$ , podemos aproximar  $dt/d\tau$  por  $\Delta t_A/\Delta\tau_A$ . De esta manera, el intervalo de tiempo propio,  $\Delta\tau_A$ , medido por dicho observador será:

$$\Delta\tau_A = (1 - r_0/r_A)^{1/2} \Delta t_A.$$

Si aplicamos de manera análoga el razonamiento para un observador situado en  $r_B$  y, dividimos ambas expresiones:

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \sqrt{\frac{1 - r_0/r_A}{1 - r_0/r_B}} \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} \implies \Delta\tau_A = \sqrt{\frac{1 - r_0/r_A}{1 - r_0/r_B}} \Delta\tau_B \quad \text{ya que por (3.11) } \Delta t_A = \Delta t_B^6.$$

Si por ejemplo, considerásemos un observador situado en  $r_A = 2r_0$  y otro en  $r_B = 5r_0$ , en virtud de lo anterior, se tiene que  $\Delta\tau_A = \frac{5}{8}\Delta\tau_B$ . Es decir, el observador  $A$  pensará que el reloj de su compañero se adelanta pues, cada segundo de  $B$ , tarda, según  $A$ , 0,625s en pasar. Recíprocamente, cada segundo transcurrido para  $A$ , tarda, según  $B$ , 1,6s en transcurrir para su colega. Por lo tanto,  $B$  concluirá que el reloj de  $A$  se atrasa. De hecho, conforme se aproximase  $A$  a  $r_0$ ,  $B$  observaría como su reloj se ralentizaría cada vez más hasta casi pararse, de tal modo que “un segundo para  $A$  se transformaría en una eternidad para  $B$ .” Así, las implicaciones de la Relatividad de las mediciones temporales adquieren una nueva dimensión en el marco de la Relatividad General, pues *incluso los observadores estáticos se ven afectados*.

<sup>6</sup>A veces, se conoce al parámetro  $t$  como *tiempo de Schwarzschild*.



Concluida la discusión previa, ya estamos en situación de presentar el fenómeno conocido como *corrimiento al rojo gravitatorio*. Supongamos que la señal enviada desde  $r_A$  es una onda electromagnética con una frecuencia de emisión  $\nu_A = n/\Delta\tau_A$ . Por otro lado, la frecuencia de recepción de la onda en  $r_B$ , es la dada por  $\nu_B = n/\Delta\tau_B$ . De esta manera:

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\tau_A}{\tau_B} = \sqrt{\frac{1 - r_0/r_A}{1 - r_0/r_B}}.$$

Para  $\frac{r_0}{r_A} \ll 1$  y  $\frac{r_0}{r_B} \ll 1$ , podemos expandir en serie de Taylor la expresión anterior hasta primer orden como sigue:

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} \approx 1 + \frac{r_0}{2} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \implies \frac{\nu_B - \nu_A}{\nu_B} \approx \frac{r_0}{2} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right).$$

Es decir, para fenómenos oscilatorios acaecidos en las proximidades de un cuerpo masivo, un alejamiento del observador situado en  $r_B$ , comportará un descenso en la frecuencia de las ondas detectadas. Expresando lo anterior en términos matemáticos: si  $r_B \rightarrow \infty$ , entonces  $\frac{1}{r_B} \rightarrow 0$ , lo cual implica que:  $\nu_B < \nu_A$ . Es decir,  $\lambda_B > \lambda_A$ , donde el parámetro  $\lambda$  denota la longitud de onda. Siendo el rojo el elemento con mayor longitud de onda del espectro visible, parece razonable el nombre escogido para describir este fenómeno<sup>7</sup>.

### 3.3.2 La rotación del perihelio de Mercurio

De acuerdo con los postulados de la mecánica newtoniana, un cuerpo orbitando en torno a una masa esférica, describe una trayectoria elíptica con el centro de masas en uno de sus focos<sup>8</sup>. El punto de menor distancia es el periápside, *perihelio* en el caso del Sistema Solar. El apoápside, el punto de mayor distancia, se conoce como *afelio* en el caso del Sol. No obstante, los planetas solares no presentan órbitas elípticas estáticas, sino que la presencia de terceros astros, entre otros motivos, provoca la rotación del perihelio de los distintos planetas alrededor del Sol. El caso de Mercurio cobró especial relevancia cuando las precisas observaciones astronómicas del siglo XIX, comenzadas con el matemático francés Urbain Le Verrier, mostraron que la precesión de su perihelio no concordaba con las predicciones newtonianas. Las soluciones aportadas entonces para explicar este fenómeno no hicieron sino aumentar la confusión.

En las siguientes líneas, veremos como las geodésicas asociadas a la métrica de Schwarzschild, confinadas en el plano  $\theta = \pi/2$ , con  $r$  y  $\varphi$  variando, presentan un aspecto cuasielíptico y una rotación de perihelio que coincide con la esperada en el caso de Mercurio. Tomando lo anterior como punto de partida, procederemos al cálculo del ángulo de rotación del perihelio para cualquier planeta. El siguiente resultado, brinda una relación entre los parámetros  $r$  y  $\varphi$ , olvidando su dependencia de  $\tau$ .

<sup>7</sup>Para una breve reseña histórica, véase el Apéndice E en la sección homónima.

<sup>8</sup>El estudio de dicha afirmación bien podría ser objeto de otra memoria, lo que nos obliga a darla por sentada. No obstante, el nexo entre la ley de gravitación universal y las leyes de Kepler es evidente. De este modo, en el Apéndice E, en la sección Ejemplos, se puede encontrar una deducción relativista de la segunda Ley de Kepler.

**Proposición 3.3.** *Las geodésicas de la métrica de Schwarzschild contenidas en el plano  $\theta = \pi/2$  verifican lo siguiente:*

$$(3.12) \quad \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = Ar^4 + Br^3 - r^2 + r_0r$$

donde de  $A$  y  $B$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales y de  $r_0$

*Demostración.* Para  $\theta = \pi/2$ , la expresión de la métrica de Schwarzschild no es otra que:

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)t^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2.$$

Como ninguno de los coeficientes anteriores depende de los parámetros  $t$  y  $\varphi$ , del cálculo de sus respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange, se desprende lo siguiente:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}}\right) = 0 \quad \text{de donde} \quad t\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) = C_1, \quad r^2\dot{\varphi} = C_2$$

Sustituyendo lo anterior en la definición de parametrización por tiempo propio, se tiene que:

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}C_1^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^{-2}C_2^2 = 1.$$

Tras unas manipulaciones elementales en la expresión anterior:

$$\dot{r}^2 = C_1^2 - 1 + \frac{r_0}{r} - \frac{C_2^2}{r^2} + \frac{r_0C_2^2}{r^3}.$$

Finalmente, dividiendo la identidad previa por  $\dot{\varphi}^2 = C_2^2/r^4$  y aplicando la regla de la cadena, se obtiene el resultado buscado.  $\square$

En lo que sigue, seguiremos los argumentos expuestos en [Cha09], originalmente debidos al físico y químico danés Christan Møller. En primera instancia, efectuaremos el cambio de variable  $u = 1/r$  en (3.12). De este modo:

$$(3.13) \quad (u')^2 = A + Bu - u^2 + r_0u^3.$$

Siendo el perihelio el punto más próximo de la órbita de un satélite a la estrella en torno a la que gira y el aphelio el más lejano, resulta lógico afirmar que ambos dos corresponden a los valores extremos de  $u$ . De este modo, llamando  $u_a$  y  $u_p$ , a los respectivos valores, tenemos que  $P(u_a) = P(u_p) = 0$ , donde  $P = A + Bu - u^2 + r_0u^3$ . La fórmula de Vieta<sup>9</sup> nos proporciona información suficiente acerca de la tercera raíz. Sabiendo que  $u_a + u_p + u_c = r_0^{-1}$ , (3.13) deviene en:

$$(3.14) \quad \frac{u'}{\pm\sqrt{P(u)}} = 1 \quad \text{donde} \quad P(u) = (u - u_a)(u_p - u)(1 - r_0(u + u_a + u_p))$$

<sup>9</sup>Dado un polinomio  $P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$  donde  $a_n \in \mathbb{C}$ , entonces dadas las raíces de  $P$ ,  $\{r_i\}_{i=1}^n$  se tiene la siguiente identidad

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Entre el afelio y el perihelio el radio decrece con el ángulo, por lo que la función  $u = 1/r$  crece y en consecuencia  $u' > 0$ . Por otro lado, entre el nuevo perihelio, esto es, el posterior a la rotación, y el afelio, el radio crece con el ángulo, así que  $u$  decrece:  $u' < 0$ . Con todo ello, integrando en (3.14), se tiene que:

$$\varphi_{afe} - \varphi_{peri} = \int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{P(u)}} \quad \text{y} \quad \varphi_{periot} - \varphi_{afe} = \int_{u_p}^{u_a} \frac{du}{-\sqrt{P(u)}}$$

Sumando ambas expresiones, se llega a la expresión de la variación del ángulo entre dos perihelios consecutivos:

$$(3.15) \quad \Delta = 2 \int_{u_a}^{u_p} \frac{du}{\sqrt{P(u)}} - 2\pi$$

Óbserve que, en ausencia de rotación del perihelio, la suma anterior correspondería con una vuelta completa:  $2\pi$ . Sin embargo, como el perihelio varía, una revolución completa de Mercurio corresponde a  $2\pi + \Delta$ . Para  $x \sim 0$ , es posible aproximar en primer orden  $(1-x)^{-1/2} \sim 1+x/2$ . Aplicando esta aproximación en (3.15) a  $x = r_0(u + u_a + u_p)$ :

$$(3.16) \quad \Delta \approx \int_{u_a}^{u_p} \frac{2 + r_0(u + u_a + u_p)}{\sqrt{(u - u_a)(u_p - u)}} du - 2\pi.$$

Para hallar la integral anterior, vamos a realizar el cambio de variable  $u = y + (u_a + u_p)/2$ . Desarrollando el radicando en (3.16), se tiene que  $-u^2 - u_a u_p + u u_a + u u_p$ . Completando cuadrados en la expresión anterior:

$$\frac{u_a^2}{4} + \frac{u_p^2}{4} - u_a u_p - \underbrace{(u - (u_a + u_p)/2)^2}_y = \underbrace{\left(\frac{u_p - u_a}{2}\right)^2}_l - y^2$$

Para el cálculo de los nuevos límites de integración, nos percatamos de que, si  $u = u_a$  entonces  $y = -l$  y para  $u = u_p$ ,  $y = l$ . De este modo (3.16) deviene en:

$$\int_{-l}^l \frac{2 + r_0(y + 3(u_a + u_p)/2)}{\sqrt{l^2 - y^2}} dy = \underbrace{\int_{-l}^l \frac{r_0 y}{\sqrt{l^2 - y^2}} dy}_A + \underbrace{\int_{-l}^l \frac{2 + r_0(3(u_a + u_p)/2)}{\sqrt{l^2 - y^2}} dy}_B$$

$$A = C(l^2 - y^2)^{1/2} \Big|_{-l}^l = 0, \quad B = (2 + r_0(3(u_a + u_p)/2)) \arcsin \frac{y}{l} \Big|_{-l}^l$$

Con todo ello, se tiene que  $\Delta \approx (2 + r_0(3(u_a + u_p)/2))\pi - 2\pi$ . Por consiguiente:

$$\boxed{\Delta \approx 3\pi r_0(u_a + u_p)/2}$$

Si consideramos el caso terrestre, donde  $u_a = 1,52 \times 10^{-11} m$  y  $u_p = 1,47 \times 10^{-11} m$  y despreciamos además la influencia de terceros, nos es posible hallar el desplazamiento del perihelio terrestre en un año:

$$\Delta_{tierra} \approx \frac{3\pi}{2} 2,96 \times 10^5 (1,47 \times 10^{-11} + 1,52 \times 10^{-11}) = 4,17 \times 10^{-7}.$$

Nota: el radio de Schwarzschild,  $r_0$ , es el del Sol, pues es la masa responsable de la deformación espacio-temporal codificada por la métrica homónima.

### 3.3.3 La deflexión de la luz

Las observaciones realizadas el 29 de mayo de 1919 desde la remota isla de Príncipe, por la expedición científica capitaneada por el físico inglés sir Arthur Eddington, supuso un notable, aunque no definitivo, espaldarazo para la Relatividad General de 1915, hasta entonces confinada al mero plano teórico. En el Apéndice E se puede encontrar una reseña histórica más extensa.

En esta sección, nos centramos en el cálculo de la variación de ángulo sufrida por un rayo luminoso viajando en las proximidades de un cuerpo masivo. Comenzamos el razonamiento recuperando un argumento ya estudiado. Bajo las condiciones de la Proposición 3.3 para geodésicas nulas, el resultado previsto por ésta es igualmente válido, y por lo tanto, se tiene que:

$$(3.17) \quad \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 r^4 - r^2 + r_0 r.$$

La solución de (3.17) con condición inicial  $r(0) = r_0$  viene dada por una *integral elíptica*, las cuales, si bien son de gran interés en otros ámbitos, como la Variable Compleja, en nuestro caso, nos suponen un obstáculo. Nuestro objetivo, por lo tanto, es aproximar la solución de (3.17). Para ello, vamos a realizar un par de hipótesis aproximativas:

- En unidades no relativistas, tomando  $\epsilon = r_0 = 2GM/c^2$ , el último miembro,  $\epsilon r$ , en el caso del Sistema Solar, es significativamente menor que el término cuadrático. De este modo, si  $r = C_2/C_1$ , se tiene que  $r' \sim 0$ . Por lo que  $\tilde{r}_0 = C_2/C_1$  es una buena aproximación del valor mínimo de  $r$ ,  $r_0$ , que, mediante una rotación de los ejes, podemos suponer que se alcanza en  $\varphi = 0$ . Aplicando estas consideraciones a (3.17), se tiene que la nueva ecuación a resolver es:

$$(3.18) \quad \begin{cases} (r')^2 = \tilde{r}_0^{-2} r^4 - r^2 + \epsilon r \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

- Si  $r(\varphi)$  es solución de (3.18),  $r(-\varphi)$ , también lo es. Por la unicidad del problema de Cauchy, se tiene que, en un entorno de cero,  $r(\varphi) = r(-\varphi)$ .

Con estas hipótesis presentes, el siguiente paso, tal y como hicimos con la precesión del perihelio, es efectuar el cambio de variable  $u = 1/r$ :

$$(3.19) \quad \begin{cases} (u')^2 = \tilde{r}_0^{-2} - u^2 + \epsilon u^3 \\ u(0) = 1/r_0 = u_0 \end{cases}$$

Nota: obsérvese que  $u$  también es par en un entorno del origen.

Estudiemos en primer lugar el caso  $\epsilon = 0$ , i.e.  $M = 0$ . En ausencia de masa, y por consiguiente de deformación espacio-temporal, la trayectoria del haz luminoso será recta. Efectivamente, tomando  $\epsilon = 0$  en (3.19), se tiene, la única solución positiva y par en un entorno de cero es:  $u(\varphi) = \frac{1}{\tilde{r}_0} \cos \varphi$ , es decir,  $r(\varphi) = \tilde{r}_0 (\cos \varphi)^{-1}$ , o deshaciendo el cambio de coordenadas polares, la recta vertical  $x = \tilde{r}_0$ . Si consideramos ahora  $\epsilon > 0$  pequeño, la solución de (3.19) será de la forma

$$u(\varphi) = \frac{1}{\tilde{r}_0} \cos \varphi + \epsilon \nu(\varphi).$$

con  $\nu(\varphi)$  una función a determinar. Como  $\epsilon \ll 1$ , sus variaciones no modifican de manera significativa el valor de  $u$ . De esta manera, al sustituir la expresión anterior en (3.19) podemos considerar únicamente los términos de hasta primer orden:

$$(3.20) \quad -2C \sin \varphi \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + 2\nu C \cos \varphi = C^3 \cos^3 \varphi + o(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad \nu' - \nu \cot \varphi = -\frac{\cos^3 \varphi}{2\tilde{r}_0^2 \sin \varphi} + o(\epsilon)$$

Para resolver la anterior ecuación, calculamos en primera instancia, la solución de la ecuación homogénea asociada. Por separación de variables, se tiene que  $\nu_H(\varphi) = K \sin \varphi$ . Para calcular una solución particular de la ecuación general, aplicamos el método de variación de constantes, tomando  $\nu_P(\varphi) = C(\varphi) \sin \varphi$ . Introduciendo lo anterior en (3.20):

$$\frac{dC}{d\varphi} = -\frac{1}{2\tilde{r}_0^2} \cot^2 \varphi \cos \varphi.$$

La ecuación ya está preparada para aplicar separación de variables. De esta guisa, usando que  $\cot^2 \varphi = \sec^2 \varphi - 1$  e integrando a ambos lados de la igualdad:

$$C(\varphi) = \frac{1}{2\tilde{r}_0^2} (\sin \varphi + \csc \varphi).$$

Por lo que:  $\nu_P(\varphi) = \frac{1}{2}\tilde{r}_0^{-2}(1 + \sin^2 \varphi)$ , y la función  $\nu$  buscada es:

$$\nu(\varphi) = C \sin \varphi + \frac{1}{2\tilde{r}_0^2} (1 + \sin^2 \varphi).$$

Pero como  $u(\varphi)$  es par en un entorno de cero, necesariamente,  $C = 0$ . Conocida  $\nu(\varphi)$ , conocida la solución aproximada de (3.19) y, por consiguiente, la de (3.18):

$$r(\varphi) = \frac{2\tilde{r}_0^2}{2\tilde{r}_0 \cos \varphi + \epsilon(1 + \sin^2 \varphi)}.$$

Sea  $\alpha$  aquel valor de  $\varphi$  para el que el rayo de luz se desvía, alejándose hacia el infinito, esto es,  $r \rightarrow \infty$  o, equivalentemente,  $u \rightarrow 0$ . Así, buscamos un  $\alpha$  que verifica:

$$(3.21) \quad \cos \alpha + \frac{\epsilon}{2}\tilde{r}_0^{-1}(1 + \sin^2 \alpha) = 0$$

Tal y como indicamos al comienzo del apartado,  $\epsilon\tilde{r}_0 \ll 1$ , por lo que  $\alpha \approx \pi/2$ . Ello nos permite aproximar hasta primer orden  $\cos \alpha$  como  $\cos \alpha = \sin(\pi/2 - \alpha) \approx \pi/2 - \alpha$ . Por otro lado, también nos posibilita tomar  $\sin^2 \alpha \approx 1$ . Sustituyendo estas aproximaciones en (3.21), concluimos que el ángulo de desviación  $\Delta\varphi$  experimentado por un haz luminoso viajando por las inmediaciones de un cuerpo masivo a una distancia  $r_0$  es:

$$\alpha - \pi/2 \approx \frac{\epsilon}{\tilde{r}_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi = 2\alpha - \pi \approx \frac{4GM}{c^2 r_0}} \quad \text{pues } \tilde{r}_0 \approx r_0.$$

La deflexión es por tanto, una alejamiento de la trayectoria rectilínea, dada por  $\varphi = \pi$ . Si  $\Delta\varphi > 0$ , entonces el haz luminoso se curva hacia el Sol. En el caso negativo, el haz se aleja del Sol.



## Capítulo 4

# La solución de Kerr

En los años posteriores a la solución brindada por Schwarzschild, se logró resolver nuevamente las ecuaciones de campo en el vacío, en este caso, para una masa esférica, estática y con carga. Se trataba de la *solución Reisser-Nördstrom*. No obstante, la consideración de una masa rotatoria, acarreó significativas complicaciones, que no serían completamente superadas hasta 1963, año en el que Roy Kerr, daría con la métrica describiendo el espacio-tiempo vacío en el exterior de un agujero negro sin carga y con rotación. Efectivamente, la consideración de la rotación no es baladí, dando ésta lugar a novedosas e interesantes implicaciones, en buena medida debidas a la pérdida de la simetría esférica en favor de la axial. La nueva métrica introduce, como es natural, un parámetro novedoso:  $J$ , que define el momento angular de la masa que gira. De esta manera, definimos el momento angular por unidad de masa como  $a := \frac{J}{M}$ . Sin más preámbulos, pasamos a introducir la *métrica de Kerr* en las llamadas *coordenadas de Boyer-Lindquist*:

$$(4.1) \quad ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 + 2a \frac{2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

donde

$$\Delta := r^2 - 2Mr + a^2, \quad \rho := (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}.$$

El primer aspecto que podemos señalar de expresión previa es cómo para  $a \rightarrow 0$ , ésta tiende a la de Schwarzschild. Efectivamente, en ausencia rotación el momento angular es nulo ( $J = 0$ ) y entramos en el ámbito de dicha métrica. Por otro lado, (4.1) es independiente de  $t$  y  $\varphi$ , de donde  $g_{\alpha\beta,1} = g_{\alpha\beta,4} = 0$ . No obstante, no es invariante para el cambio  $t \mapsto -t$ , por lo que decimos que es *estacionaria*. En cambio, sí lo es para el cambio de carta  $(t, \varphi) = (-t, -\varphi)$ , es decir, la inversión del parámetro temporal implica un cambio en el sentido de giro. De esta manera, al contrario que en la solución de Schwarzschild, en este contexto sí existe una dirección privilegiada: la de rotación del agujero negro.

### 4.1 Vectores de Killing y *frame dragging*

Los *vectores de Killing* resultan ser objetos geométricos sumamente útiles a la hora de generalizar el concepto de simetría y por lo tanto, en virtud del *Teorema de Noether*, estrechamente

vinculados a la leyes de conservación en física<sup>1</sup>. Tomando pie en la simetría axial, y por ende, en ésta nueva herramienta, vamos a deducir el fenómeno conocido como *frame dragging*. Consideremos un punto  $p$  del espacio-tiempo, una carta  $(U, \varphi)$  y una dirección dada  $\xi^\mu$  en ese mismo punto. En el caso de un espacio-tiempo de Minkowski, las componentes del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  en coordenadas cartesianas no se verán alteradas dado un movimiento en la dirección  $\xi$ . No obstante, en el caso de un espacio-tiempo curvo, esto podría cambiar. De esta guisa, resultaría de gran utilidad disponer de un objeto que codificase la o las direcciones en las cuales la métrica permanece invariable. Se dice que un vector  $\xi^\mu$  es *de Killing* si verifica la llamada *ecuación de Killing*:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0,$$

con  $\nabla$  la ya familiar derivada covariante. Sabiendo esto, resulta evidente que, por ejemplo, la solución de Schwarzschild, tendrá asociados cuatro vectores de Killing, merced a la simetría esférica. La pérdida de ésta en favor de la axial para la métrica de Kerr, reducirá el número de vectores de 4 a 2:  $\xi^t$  de componentes  $\xi^i = \delta_1^i = (1, 0, 0, 0)$ , de género tiempo, pues  $G(\xi^t, \xi^t) > 0$  y  $\xi^\varphi$ , con  $\xi^i = \delta_4^i = (0, 0, 0, 1)$ , espacial, ya que  $G(\xi^t, \xi^t) < 0$  en la carta  $(t, r, \theta, \varphi)$ . Estos vectores también nos permiten hallar las cantidad conservadas a lo largo de la trayectoria  $x^\mu(\tau)$  de una partícula libre:

$$(4.2) \quad \xi_\mu \dot{x}^\mu = C(\xi)$$

Como era de esperar, la pérdida de diagonalidad en la métrica (4.1) introducirá nuevos efectos en las trayectorias de las partículas. Como también resulta lógico, estas nuevas consecuencias se deberán a los términos no diagonales. Veámoslo. Para ello vamos a calcular la cantidad conservada para el vector de Killing  $\xi^4$ :

$$(4.3) \quad \xi_\mu \dot{x}^\mu = \xi^\nu g_{\nu\mu} \dot{x}^\mu = \xi^4 g_{4\mu} \dot{x}^\mu = g_{41} \dot{t} + g_{44} \dot{\varphi} = L_4.$$

Para partículas con masa,  $L_4$  denota la componente del momento angular por unidad de masa paralela al eje de simetría. Para aquellas sin masa, el parámetro afín se puede ajustar para que cuádrimomento y cuádrivelocidad coincidan. De esta manera, vamos a considerar una partícula con momento angular nulo,  $L_4 = 0$ , esto es, cayendo radialmente hacia el agujero negro:

$$g_{14} \dot{t} + g_{44} \dot{\varphi} = 0 \iff -\frac{g_{14}}{g_{44}} = \frac{d\varphi}{dt} := \omega(r, \theta)$$

donde  $\omega$  denota la velocidad angular de una partícula con momento angular nulo. Es aquí donde se sustancia la relevancia arriba mencionada del término no diagonal, pues en el caso de Schwarzschild, al ser la métrica diagonal,  $\omega$  se anula. La consecuencia de lo anterior es significativa: toda partícula lanzada desde el infinito que se aproxima al agujero negro radialmente, será “arrastrada” (*dragged*) fruto de la notable influencia gravitatoria del agujero, adquiriendo así una velocidad angular con el mismo sentido de giro que la fuente del campo. A este fenómeno se le conoce como *frame dragging*<sup>2</sup>, y disminuye de manera cúbica con la distancia:

$$\omega = \frac{g^{14}}{g^{44}} = -\frac{g_{14}/D}{g^{44}/D} = -\frac{g_{14}}{g_{44}} = \frac{2Mr a}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta} \sim \frac{1}{r^3}, \quad \text{con } D = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{14} \\ g_{41} & g_{44} \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Más formalmente, si un lagrangiano  $\mathcal{L}$  es invariante bajo una simetría continua, entonces existe una ley de conservación asociada.

<sup>2</sup>Resulta ilustrativa la consulta de la Figura F.1 en el Apéndice F



Observación 1: si bien, no la vamos a utilizar ahora, resultará provechoso advertir que el denominador de  $\omega$  es siempre positivo, por lo que  $\text{sgn}(\omega) = \text{sgn}(a)$  (naturalmente,  $r, M > 0$ ).

Observación 2: nuevamente se hace patente otro de los aspectos en los que la Relatividad aventaja a la gravitación newtoniana: el momento angular. Efectivamente, en el caso newtoniano, la masa que gira es indistinguible de la que no lo hace, por lo que, el giro no afecta a la gravedad, afirmación, que tal y como estamos comprobando, dista mucho de ser cierta.

## 4.2 Singularidades, horizontes y coordenadas

La inspección de la métrica (4.1) permite identificar rápidamente las distintas singularidades. No obstante, como ya ocurriera con la métrica de Schwarzschild, algunas de ellas serán fruto de las coordenadas escogidas, como ocurría con  $r = 2GM$ , y por lo tanto serán de naturaleza matemática y, otras, serán físicas, pues continuarán apareciendo, sin importar la carta escogida. De este modo, basta con hallar una carta en la que la singularidad desaparezca para confirmar su carácter matemático. No obstante, en caso de que ésta no desaparezca, ¿cómo podemos saber si ocurre porque realmente es una singularidad física o debido a que no hemos encontrado las coordenadas propicias? La solución pasa por el empleo de los llamados *invariantes de curvatura*: escalares vinculados a los distintos tensores de curvatura, los cuales, al permanecer invariantes bajo cambios de carta, en caso de presentar una singularidad, será, necesariamente, física. En este caso, utilizaremos el *escalar de Kretschmann* dado por  $K = R_{ijkl}R^{ijkl}$ . Para la métrica (4.1)<sup>3</sup>:

$$K = \frac{48M^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6} \cdot P(r, \theta)$$

donde  $P(r, \theta)$  es un polinomio.

Singularidades:

- $\rho = 0 \iff r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ , de donde se tiene que  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$ , es decir, la singularidad es un punto en el plano ecuatorial. No obstante, al tratarse de un agujero negro rotatorio y dado que un punto carece de momento angular, concluimos que la singularidad habrá de ser una circunferencia. Este resultado resultará evidente usando otras coordenadas más propicias, tal y como veremos enseguida. El escalar  $K$  también es singular en esos puntos, por lo que se trata de una singularidad física.
- $\Delta = 0 \iff r^2 - 2Mr + a^2 = 0$ , que tiene como soluciones los horizontes:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}, \quad r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}.$$

---

<sup>3</sup>¿Hasta qué punto resulta provechoso el 'atajo' escogido? Efectivamente, la computación del escalar resulta tan sumamente costosa, que difícilmente podríamos considerarlo como tal. No obstante, su ventaja reside en que sólo ha de ser calculado una única vez, de modo que, agradeciendo el esfuerzo al heroico matemático o, probablemente, a la heroica computadora, tomaremos el escalar como conocido, como si de un número célebre, por ejemplo  $\pi$ .

No obstante, tales singularidades son matemáticas y se las conoce, como ya vimos en el Capítulo 3, como *horizontes de eventos*<sup>4</sup>. De esta manera, llamamos a  $r_+$  el *horizonte exterior* y a  $r_-$  el *horizonte interior o de Cauchy*, corregibles mediante el cambio en (4.1):

$$du = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad dv = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr,$$

dando lugar a las llamadas *coordenadas de Kerr*  $(r, \theta, u, v)$ :

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + 2drdu - 2a \sin^2 \theta drdv - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} du^2 \\ - 2a \frac{2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} dudv + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta dv^2$$

Recordamos que los efectos del *frame dragging* anteriormente descrito, se tornarían cada vez más notables conforme disminuyera la distancia respecto del agujero negro. De esta manera, nos preguntamos por la existencia de una región a partir de la cual el “arrastre” del agujero fuese tal, que ningún observador pudiera permanecer estático respecto de aquél. Para ello, vamos a considerar unos fotones emitidos en el plano ecuatorial,  $\theta = \pi/2$ , a una distancia  $r$ , lejana a la singularidad y en las direcciones  $\varphi$ ,  $-\varphi$ , de tal manera que tales direcciones sean tangentes a la circunferencia de radio  $r$  constante. Teniendo en cuenta estas consideraciones, junto con el hecho de que, al tratarse de fotones,  $ds^2 = 0$ , para la métrica (4.1), se tiene que:

$$0 = g_{11} dt^2 + 2g_{14} dt d\varphi + g_{44} d\varphi^2.$$

Completando cuadrados en la expresión anterior y despejando  $d\varphi/dt$ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g_{14}}{g_{44}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{14}}{g_{44}}\right)^2 - \frac{g_{11}}{g_{44}}}.$$

Si ahora exigimos  $g_{11} = 0$ , las soluciones a la ecuación anterior son inmediatas. A saber:

$$(4.4) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega = \begin{cases} -2\frac{g_{14}}{g_{44}} \\ 0 \end{cases}$$

El hallazgo de las identidades anteriores vino propiciado por la condición  $g_{11} = 0$ , o lo que es lo mismo:

$$\Delta - a^2 \sin^2 \theta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_{E+} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \\ r_{E-} = M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \end{cases}$$

La región  $E = \{r : r_{E-} < r < r_{E+}\}$  se conoce como *ergoregión* e incluye los horizontes  $r_+, r_-$ . Por su parte, la región  $S = \{r : r_+ < r < r_{E+}\}$  se denomina *ergosfera*. Adviértase cómo para  $\theta = 0, \pi$ , las ergoregiones son tangentes a los respectivos horizontes. Dicho esto, pasemos a interpretar las implicaciones de (4.4). Como  $\text{sgn}(\omega) = \text{sgn}(a)$ , la primera solución

<sup>4</sup>Se remite al lector a lo allí dicho en ese aspecto.

tendrá el mismo signo que el parámetro  $a$ , por consiguiente, representa la velocidad angular de los fotones emitidos en la dirección de rotación del agujero. Por otro lado, la segunda resulta muy reveladora: indica la región en la cual la velocidad angular de los fotones es nula, pues el “arrastre” de las órbitas es tal, que las partículas luminosas emitidas en la dirección contraria a la de rotación del agujero permanecen inicialmente inmóviles para un observador lejano. Atravesada esta región, los fotones se verán forzados a rotar con velocidad angular  $\omega$ , prescrita por la ecuación no nula. De esta manera, cualquier otra partícula, que, naturalmente, se moverá más lentamente que un fotón, se verá forzada a rotar con el agujero, sin importar qué tan grande sea su velocidad angular. Por este motivo, la hipersuperficie  $r = r_{E+}$  se conoce como *límite estacionario*, en tanto que delimita la región a partir de la cual ninguna partícula puede permanecer inmóvil para un observador lejano. Lo anterior puede ser formulado en términos de vectores de Killing: puesto que en la región  $r > r_{E+}$ , se tiene  $g_{11} > 0$  y el vector  $\xi^t$  es de género tiempo. No obstante, esto cambia al penetrar en la ergosfera, donde  $g_{11} < 0$ . Efectivamente:  $G(\xi^t, \xi^t) = \xi^1 \xi^1 g_{11} < 0$ . Esto es, el vector de Killing temporal se convierte en espacial, de donde se deduce la ya mencionada imposibilidad de permanecer estáticos.

Antes de pasar al siguiente punto, siguiendo a [HH14], vamos a brindar una caracterización geométrica de los horizontes y de las ergosuperficies. Para ello, vamos a reescribir la métrica (4.1) en las llamadas *coordenadas de Kerr-Schild*, mediante el cambio de carta:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} d\tilde{t} &= dt + \frac{2Mr}{r^2 - 2Mr + a^2} dr, & x &= (r \cos \varphi + a \sin \varphi) \sin \theta, \\ y &= (r \sin \varphi - a \cos \varphi) \sin \theta, & z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

De esta guisa, la expresión (4.1) se escribe en las coordenadas  $(t, x, y, z)$  como:

$$(4.6) \quad ds^2 = d\tilde{t}^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left( d\tilde{t} + \frac{r(xdx + ydy)}{a^2 + r^2} + \frac{a(ydx - xdy)}{a^2 + r^2} + \frac{z}{r} dz \right)^2.$$

Nótese como  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta$ , podemos hacer desaparecer el seno multiplicando  $z$  por  $(a^2 + r^2)/r^2$ , lo que lleva a:

$$(4.7) \quad x^2 + y^2 + \frac{a^2 + r^2}{r^2} z^2 = r^2 + a^2.$$

De esta manera, pasemos al estudio de la casuística:

- Caso  $r = 0$ : usando el cambio de carta (4.5) y la identidad (4.7) se colige, primero que  $z = 0$  y segundo que:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

por lo tanto, tal y como habíamos previsto, la singularidad  $r = 0$  es una circunferencia de radio  $a$ . Para  $a = 0$ , se tiene la singularidad de Schwarzschild.

- Caso  $r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ : obtenemos un elipsoide

$$\left( \frac{x}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{y}{a_2} \right)^2 + \left( \frac{z}{a_3} \right)^2 = 1 \quad \text{con} \quad a_1^2 = a_2^2 = r_{\pm}^2 + a^2, \quad a_3^2 = (r_{\pm})^{-2}, \quad a < M.$$

Nota: el caso  $a = M$  se conoce como extremal y en él  $r_+ = r_-$ .

- Caso  $r = r_{E_{\pm}} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$ :

Si  $a \leq M$ : ecuación tipo esferoide con dependencia de los semiejes respecto del ángulo, lo que deformará el esferoide.

$$\left(\frac{x}{a_1(\theta)}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_2(\theta)}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_3(\theta)}\right)^2 = 1 \quad \text{con} \quad a_1^2(\theta) = a_2^2(\theta) = r_{E_{\pm}}^2 + a^2, \quad a_3^2 = (r_{E_{\pm}})^{-2}.$$

Para  $\theta = \pi$ ,  $r_{E_-} = 0$ , lo que se traduce en una coincidencia entre la ergosuperficie interior y la circunferencia singular  $r = 0$ .

Si  $a > M$ , la superficie está únicamente definida para  $\cos \theta \leq M/a$ . En la igualdad se tiene una nueva coincidencia de horizontes:  $r_{E_+} = r_{E_-} = r$  y  $r = m$ , lo que da, de nuevo, un esferoide de semiejes  $a_1^2 = a_2^2 = m^2 + a^2$  y  $a_3^2 = 1/m^2$ .

### 4.3 Proceso de Penrose

En el año 1969, el físico inglés Roger Penrose, propuso un sugestivo experimento mental basándose en:

- La posibilidad de una partícula para viajar del exterior al interior de la ergosfera y viceversa, en tanto que no se trata de un horizonte.
- Formalmente, la inexistencia de vectores de Killing temporales en la ergosfera, lo que impide a las partículas permanecer estáticas. Al contrario, éstas se ven forzadas a rotar en torno al agujero negro en la misma dirección que éste, adquiriendo de este modo una energía adicional de carácter rotacional.
- Una partícula puede tener energía total negativa. Intuitivamente, esto significa que la partícula se encuentra “atrapada”: la energía necesaria para extraerla de la ergosfera es *mayor* que su energía en reposo, de esta manera, la única forma de que pueda atravesar  $r = r_+$  es siendo acelerada hasta que su energía sea positiva. Analíticamente, para una partícula de cuádrimomento  $p$  y energía  $E = k_{\mu}p^{\mu}$ , como el vector de Killing  $k_{\mu}$  es de género espacio, cabe la posibilidad de que para ciertas geodésicas, ajustando  $p^{\mu}$ , se tenga  $E < 0$ .

Tomando pie en lo anterior, Penrose imaginó una partícula  $A$  inestable cayendo a lo largo de una geodésica hacia un agujero negro, siendo su energía  $E_A$ . Una vez entrada en la ergosfera, comenzaría a rotar en el mismo sentido que el agujero. Asumamos que hemos escogido  $A$  de tal modo que, una vez penetrase en la ergosfera, ésta se dividiría en otras dos nuevas:  $B$ , con energía  $E_B$ , y  $C$ , de energía  $E_C$ . En el momento de la división, la partícula  $B$  empuja a  $C$  en la dirección contraria a la de rotación, por lo que  $B$  se ve empujada a una nueva trayectoria con energía negativa y en la que atraviesa el horizonte de sucesos, cayendo hacia la singularidad. Por su parte,  $C$  cambia su trayectoria logrando abandonar la ergosfera y, merced a la conservación de la energía, necesariamente,  $E_C > 0$ . De este modo, el coste energético ‘neto’ es positivo:  $E_C = E_A - E_B > E_A$ , puesto que  $E_B < 0$ . No en vano, ‘ergo’ proviene del griego ‘ergos’, trabajo. Este proceso no es exclusivo de los agujeros negros de Kerr, sino de todo cuerpo masivo con ergosfera.

# Apéndice A

## De Maxwell a la Relatividad Especial

### A.1 Ecuaciones de Maxwell y transformaciones de Lorentz

En el año 1873, el insigne físico escocés J.C. Maxwell, dio a conocer en su trabajo “*Tratado de electricidad y magnetismo*”, las celebérrimas *ecuaciones de Maxwell*, las cuales brindaban una sencilla formulación matemática de las interacciones entre la *intensidad de campo eléctrico*  $\vec{E}$  y la *inducción magnética*  $\vec{B}$ , observadas únicamente de manera experimental hasta entonces. Empleando unidades gaussianas y considerando el espacio libre de cargas y corrientes, las citadas ecuaciones son:

$$(A.1) \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Donde  $c$  es la velocidad de la luz y los operadores diferenciales  $\nabla \cdot$  y  $\nabla \times$  son la divergencia y el rotacional respectivamente. Las soluciones de estas ecuaciones no son sino ondas, hecho que comprobaremos en las próximas líneas. Primeramente, conviene señalar que  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$  simplifica notablemente los cálculos y se llega a la siguiente identidad:

$$(A.2) \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = -\Delta \vec{F}$$

donde  $\Delta \vec{F}$  consiste en aplicar el operador laplaciano  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  al campo  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ . Tomando a continuación rotacionales en la tercera y cuarta ecuación de (A.1) y gracias a (A.2), colegimos que:

$$c^2 \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad c^2 \Delta \vec{B} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Es decir, cada una de las componentes de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son soluciones de la ecuación de ondas de velocidad  $c$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

Es decir, acabamos de probar que las soluciones de (A.1) obedecen la ecuación de ondas.

El objetivo de este fragmento es demostrar que la ecuación de ondas no es invariante por las *transformaciones de Galileo*. A su vez, esto nos serviría para confirmar lo acertado de la intuición de Einstein al suponer que éstas eran, efectivamente, una aproximación. Para simplificar los cálculos, nos ceñiremos al caso unidimensional, en el cual las *transformaciones de Galileo* para un observador  $O'$  que se aleja de nosotros, el observador en reposo  $O$ , en el sentido positivo del eje de abscisas con una velocidad  $v$ , vienen dadas por  $x' = x - vt$  para su medición del espacio y por  $t' = t$  para su medición del tiempo, la cual obviamente no variará. Sea pues  $u(x, t)$  una función escalar verificando la ecuación de ondas, teniendo para el caso unidimensional la forma  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ . Queremos probar que en las nuevas variables  $x', t'$  dadas arriba, dicha ecuación no se cumple. Para ello, vamos a calcular primeramente las derivadas parciales de  $u(x, t)$  en función de las nuevas variables:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'}, \quad \text{derivando de nuevo} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}$$

Repitiendo el mismo proceso para la variable  $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial t'}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2 u}{\partial t'^2}$$

Como la función  $u$  satisface la ecuación de ondas, sustituimos en ésta las recién calculadas derivadas segundas en función de las nuevas coordenadas. De este modo:

$$u_{t't'} - 2vu_{x't'} + v^2 u_{x'x'} = c^2 u_{x'x'}$$

Observando la identidad anterior, podemos apreciar la aparición de dos nuevos términos, inexistentes en la ecuación de ondas original. De hecho, para recuperar dicha ecuación es preciso que  $v = 0$ , esto es,  $O'$  está inmóvil, lo cual contraviene nuestra hipótesis de partida. A lo anterior, podría objetarse que hay otra posibilidad de recuperar la ecuación de ondas, esto es, si  $2vu_{x't'} - v^2 u_{x'x'} = 0$ . Sin embargo, esto no vendría sino a confirmar que nuestra afirmación era correcta: las transformaciones galileanas conservan la ecuación de ondas *únicamente* en ese caso particular.

Habida cuenta de la incompatibilidad entre las ecuaciones de Maxwell y las transformaciones de Galileo, se precisa de unas nuevas transformaciones que sí conserven estas primeras. No son otras que las *transformaciones de Lorentz*. En vez de limitarnos a enunciarlas y teniendo en cuenta que las ecuaciones de Maxwell son lo que motiva esta sección, vamos a deducir las citadas transformaciones a partir de los resultados de Maxwell.

Con el objetivo de simplificar los cálculos, consideraremos los campos electromagnéticos dados por  $\vec{E} = (0, E(x, t), 0)$  y  $\vec{B} = (0, 0, B(x, t))$ . Recordamos que la divergencia,  $\nabla \cdot$ , para un campo arbitrario  $F$  en  $\mathbb{R}^3$  viene dada por:

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Parece claro que la divergencia tanto del primer como del segundo campo son nulas, ya que las únicas componentes no nulas son ambas funciones de  $x$  y  $t$ . De este modo, solamente

trabajaremos con la tercera y cuarta ecuación de Maxwell. Análogamente, el rotacional,  $\nabla \times$ , de  $F$  en  $\mathbb{R}^3$  es de la forma

$$(A.3) \quad \nabla \times B = \left( \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial y}, \frac{\partial B_3}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial z}, \frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial x} \right)$$

Consecuentemente, otro sencillo cálculo muestra que eventualmente las ecuaciones buscadas no son otras que

$$(A.4) \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad y \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

En nuestro caso vamos a suponer la ausencia de fuerzas interviniendo en el movimiento. Esto, de acuerdo con la ley de inercia, implica que éste último es rectilíneo uniforme y por ende las transformaciones que buscamos son lineales, o lo que es lo mismo:

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Cx + Dt.$$

donde, como señalamos con anterioridad,  $x'$  y  $t'$  son las mediciones espaciales y temporales respectivamente hechas por el observador en movimiento  $O'$  y  $x$  y  $t$  las mediciones del observador estático  $O$ . Veamos en primer lugar cómo ve el observador  $O$  el origen del sistema de referencia de  $O'$ ,  $x' = 0$ . Remitiéndonos a las identidades anteriores, tenemos que

$$0 = Ax + Bt$$

o lo que es lo mismo  $\frac{A}{B} = -\frac{x}{t}$  y como  $\frac{x}{t}$  no es sino la velocidad del observador  $O'$  respecto a  $O$ , se tiene que  $B = -vA$ . Sustituyendo esto en la expresión de  $x'$  se llega a que

$$x' = Ax - Avt$$

Pasemos ahora a analizar cómo ve el observador  $O'$  el origen del sistema de referencia del observador estático, esto es,  $x = 0$ . Sustituyendo este valor en las expresiones de  $x'$  y  $t'$  obtenemos

$$x' = Bt, \quad t' = Dt$$

Dividiendo las dos expresiones anteriores,  $\frac{x'}{t'} = \frac{B}{D}$ . Ahora bien,  $\frac{x'}{t'}$  no es sino la velocidad a la que  $O'$  percibe que se desplaza  $O$ , es decir,  $v' = -v$ . Esto, junto con la identidad  $B = -vA$ , nos permite deducir que  $A = D$ . Nos falta determinar el parámetro  $C$ . Para ello, escribimos  $x$  y  $t$  en función de  $x'$  y  $t'$ . Tras varias manipulaciones elementales y sabiendo que  $A = D$  y  $B = -vA$  se sigue que

$$x = \frac{Ax' + vAt'}{A^2 + vCA}, \quad t = \frac{At' - Cx'}{A^2 + vCA}$$

Comparando estas expresiones con

$$x' = Ax - Avt, \quad t' = Cx + At$$

y teniendo en cuenta que éstas tan sólo pueden diferir en la velocidad, ya que para  $O$ ,  $O'$  se desplaza con velocidad  $v$  y para  $O'$  el otro observador se aleja de él con velocidad  $-v$ , colegimos que, necesariamente,  $A^2 + vCA = 1$ , o lo que es lo mismo

$$C = \frac{1 - A^2}{vA}$$

Por consiguiente, renombrando el parámetro  $A$  por la letra griega  $\gamma$  tal y como dicta la tradición física, las transformaciones lineales que buscábamos son las que siguen:

$$x' = \gamma x - \gamma vt, \quad t' = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} x + \gamma t.$$

Haciendo en (A.4) el cambio anterior y aplicando la regla de la cadena se llega a lo siguiente:

$$\gamma \frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} \frac{\partial E}{\partial t'} = \frac{\gamma v}{c} \frac{\partial B}{\partial x'} - \frac{\gamma}{c} \frac{\partial B}{\partial t'}, \quad \gamma \frac{\partial B}{\partial x'} + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} \frac{\partial B}{\partial t'} = \frac{\gamma v}{c} \frac{\partial E}{\partial x'} - \frac{\gamma}{c} \frac{\partial E}{\partial t'}.$$

Agrupando los términos con  $\partial x'$  y con  $\partial t'$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} \left( \gamma E - \frac{\gamma v}{c} B \right) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \gamma B + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} cE \right) \\ \frac{\partial}{\partial x'} \left( \gamma B - \frac{\gamma v}{c} E \right) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \gamma E + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} cB \right) \end{aligned}$$

Analizando las dos identidades anteriores, podemos observar que éstas se asemejan sobremanera a (A.1), las ecuaciones de Maxwell para  $O$ , con la salvedad de que en este caso las derivadas están calculadas respecto a las nuevas variables  $x'$  y  $t'$ . Nuestro objetivo es lograr una expresión como la dada por (A.1) donde todo quede en función de los parámetros de  $O'$ , logrando así las ecuaciones de Maxwell para este último. Por consiguiente, parece natural conjeturar que  $E' = \gamma E - \gamma v c^{-1} B$  y  $B' = \gamma B - \gamma v c^{-1} E$ . Del mismo modo, de acuerdo con las citadas ecuaciones, se requiere que simultáneamente  $E' = \gamma E + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} cB$  y  $B' = \gamma B + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} cE$ . Por lo tanto, es preciso que los coeficientes de  $E$  y  $B$  en las identidades anteriores coincidan, o lo que es lo mismo,  $-\gamma v c^{-1} = (1 - \gamma^2) c \gamma^{-1} v^{-1}$ , esto es,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Con este último cálculo hemos llegado finalmente a las *transformaciones de Lorentz* que buscábamos:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad \text{con} \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Antes de continuar, comparemos estas recién halladas transformaciones con las de Galileo. Para velocidades pequeñas, aquéllas a las que estamos acostumbrados, el término  $\gamma$  tiende a 1, ya que el cociente  $\frac{v^2}{c^2}$  se hace muy pequeño, o en otras palabras, para  $v/c \ll 1$ , podemos desarrollar en serie de Taylor hasta orden dos en  $v/c$ :

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \sim 1 \quad \text{cuando} \quad v \ll c.$$

Y no sólo eso, sino que además  $x' = x - vt$  y  $t' = t$ , es decir, obtenemos las transformaciones de Galileo, las cuales resultan ser una buena aproximación para velocidades pequeñas, pero conforme aumenta  $v$  éstas fallan de manera notable.



## A.2 Consecuencias cinemáticas de las transformaciones de Lorentz

Antes de seguir adelante, es preciso que mencionemos las consecuencias cinemáticas más importantes de las *transformaciones de Lorentz*:

1. La velocidad de la luz es máxima: es decir, ningún observador puede alcanzar la velocidad de la luz. Tal afirmación queda a su vez respaldada por el sentido matemática de las transformaciones de Lorentz, pues,  $\gamma$  tiene sentido únicamente si  $|v| < c$ .
2. Contracción de la longitud: si una varilla en movimiento tiene extremos  $x'_1, x'_2$  para un observador que viaja con ella, mientras que los extremos son  $x_1, x_2$  para el observador en reposo, entonces:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt), \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt), \quad \text{entonces} \quad x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

Como  $\gamma > 1$ , el observador que viaja con la varilla, y la ve en reposo, la percibe con mayor longitud.

3. Dilatación temporal: sea un único punto en movimiento y un observador que viaja con él. Para otro observador en reposo, en el intervalo de tiempo transcurrido entre  $t_1$  y  $t_2$ , el punto habrá pasado de  $x_1 = vt_1$  a  $x_2 = vt_2$ . Denotando por  $t'_1, t'_2$  los tiempos correspondientes al observador en movimiento, se tiene que:

$$t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{t_1 v^2}{c^2}), \quad t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{t_2 v^2}{c^2}), \quad \text{entonces} \quad \gamma(t'_2 - t'_1) = t_2 - t_1.$$

Cada segundo del observador en reposo suponen  $\gamma$  segundos para el que se encuentra en movimiento, por lo que  $t_{mov} > t_{reposito}$ .

4. Relatividad de la simultaneidad: para un observador  $O$  en reposo, un fenómeno físico ocurre en  $x_1$  en el tiempo  $t_1$  y otro fenómeno se da en  $x_2$  en el tiempo  $t_2$ . Vamos a suponer que estos ambos son simultáneos para  $O$  i.e.  $t_2 - t_1 = 0$ , veamos cómo para otro observador  $O'$  esto no tiene porqué ser así:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - vx_2/c^2 - (t_1 - vx_1/c^2)) = \gamma v c^{-2}(x_2 - x_1) \neq 0 \quad \text{si} \quad x_1 \neq x_2$$

5. Regla de adición de velocidades: un observador con una velocidad  $v$  respecto a otro en reposo, mide la velocidad de una partícula y afirma que ésta es  $w = dx'/dt'$ . EL observador estático, según la regla de superposición de velocidades de Galileo, afirmará que la velocidad de la partícula es  $u = \frac{dx}{dt} = v + w$ . La regla de adición de velocidades contradice tal afirmación

$$w = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt} = \frac{dx/dt - v}{1 - v/c^2 \frac{dx}{dt}} = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}.$$

De donde se tiene que:  $u = \frac{v+w}{1+vw/c^2}$ . Nótese que si  $w \rightarrow 0$  o  $v \rightarrow 0$ , entonces  $u \rightarrow v + w$ . Y si  $w = c$ , entonces  $u = c$ , lo que viene a confirmar el primer punto.

Aunque a primera vista la línea de razonamiento seguida para hallar las *transformaciones de Lorentz* pueda parecer poco intuitiva, lo cierto es que el matemático alemán H. Minkowski las dotó de un sentido geométrico. Para ello, Minkowski introdujo en 1908 un espacio de cuatro dimensiones que combinaba espacio y tiempo, esto es, los elementos venían dados por cuaternas de la forma  $(t, x, y, z)$ , donde la primera coordenada designa el tiempo.

Definimos de este modo, el *espacio de Minkowski*,  $\mathcal{M}$ , a  $\mathbb{R}^4$  dotado del producto escalar de Minkowski que para un par de vectores  $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  y  $\vec{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3)$  se define como:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

Observación: estrictamente hablando, no se trata de un producto escalar al no ser éste una forma definida positiva, de ahí que en ocasiones se hable de pseudo producto escalar. Nosotros seguiremos refiriéndonos a él como producto escalar.

Escribamos a continuación las transformaciones de Lorentz en unidades relativistas, para lo cual establecemos  $c = 1$ . De este modo:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No es difícil comprobar que

$$\Lambda^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz diagonal anterior corresponde a la expresión matricial del producto escalar de Minkowski. De este modo, las *transformaciones de Lorentz* ( $\Lambda$ ) conservan el citado producto escalar, las cuales no son sino endomorfismos isométricos que conforman el llamado *grupo de Poincaré*.

## Apéndice B

# Bases de Geometría Diferencial

En las próximas páginas, recordaremos varios conceptos vertebradores de la disciplina matemática conocida como Geometría Diferencial. Si en algo se caracteriza ésta, es en el salto abstracto y formal que comporta respecto a su hermana menor: la Geometría de Curvas y Superficies. Para llevar a cabo la siguiente síntesis, nos apoyaremos esencialmente en [Cha11] y en [Cha09], y en menor medida en [Gon05].

A estas alturas, el concepto de variedad ya nos es sobremanera familiar, siendo éste uno de los pilares básicos de la Geometría Diferencial. A grandes rasgos, ésta persigue desarrollar un modelo que permita llevar a cabo un tratamiento geométrico intrínseco de las variedades, sin estar éstas necesariamente inmersas en un espacio ambiente. Como caso paradigmático podríamos tomar la Tierra, ya que en ella representamos los puntos por su latitud y longitud en vez de respecto a un sistema de referencia en  $\mathbb{R}^3$ . Intuitivamente, una variedad no es sino un objeto geométrico consistente en una colección de parches que se asemejan a los abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Para poder definir las variedades  $n$ -dimensionales es preciso considerar en primera instancia un espacio topológico  $M$  de Hausdorff verificando el segundo axioma de numerabilidad. Llegados a este punto, ya estamos en situación de introducir la primera definición: las  $n$ -cartas.

**Definición B.1.** Una carta  $n$ -dimensional de  $M$  es un par  $(U, \phi)$ , donde  $U$  es un abierto de  $M$  y  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo sobre su imagen.

Nota: se acostumbra a denotar por  $x^i$  a las componentes de  $\phi$ , las cuales se conocen como *funciones coordenadas*.

Ahora bien, en un punto de  $M$  bien podría producirse un solapamiento de diferentes abiertos de cartas, lo cual nos lleva a la siguiente definición.

**Definición B.2.** Se dice que dos cartas  $n$ -dimensionales  $(U, \phi)$  y  $(V, \psi)$ , son compatibles si  $\psi \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ , así como su inversa son de clase  $C^\infty$ .

El punto de partida de nuestro modelo ha sido la consideración de una variedad topológica, en la cual además, nos gustaría poder desarrollar las herramientas propias del Análisis. No obstante, esto no es concebible si no dotamos a la variedad de una estructura pertinente, esto es, de una *estructura suave*.

**Definición B.3.** Se denomina estructura suave ó diferenciable a la colección  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  de cartas  $n$ -dimensionales compatibles dos a dos, con  $M = \bigcup \phi_\alpha$ .

Una vez definidos estos conceptos, ya nos es posible dar la definición de variedad.

**Definición B.4.** Llamamos variedad diferenciable  $n$ -dimensional a todo espacio topológico  $M$  de Hausdorff verificando el segundo axioma de numerabilidad, dotado además éste de una estructura suave de dimensión  $n$ .

El siguiente objeto con el que nos topamos en la construcción de este nuevo modelo geométrico, es el de *espacio tangente*. La definición convencional de éste para variedades en  $\mathbb{R}^n$ , no tiene ahora cabida, al ser considerados los *vectores tangentes* como objetos externos a la variedad. De este modo, llamamos **vector tangente** de  $M$  en  $p$  a cualquier operador  $\mathbb{R}$ -lineal  $v : \epsilon_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisface  $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ , para todo  $f, g$  pertenecientes a  $\epsilon_p(M)$ , donde  $\epsilon_p(M) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^\infty, U \subset M, \text{entorno de } p\}$ . Se llama *espacio tangente* de  $M$  en  $p$ , denotado por  $T_p(M)$ , al conjunto de los vectores tangentes. El espacio tangente tiene a su vez una estructura natural de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  con las operaciones dadas por  $(v + w)(f) := v(f) + w(f)$  y  $(\lambda v)(f) := \lambda v(f)$  para  $v, w \in T_p(M)$ ,  $f \in \epsilon_p(M)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La dimensión de  $T_p(M)$  coincide con la dimensión de  $M$  como variedad diferenciable.

A continuación, vamos a considerar una aplicación  $f : M \rightarrow N$ , definida entre dos variedades suaves. Definimos la *aplicación tangente* de  $f$  en  $p$ , denotada por  $df|_p$ , a la aplicación lineal  $T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$  que aplica un elemento de  $T_p(M)$ ,  $v(\cdot)$ , en  $v(\cdot \circ f)$ . Si bien, esta definición pudiera parecer esquiva, el siguiente resultado nos mostrará que, realmente, la aplicación tangente no es sino la adaptación natural de la diferencial de análisis a nuestro nuevo modelo:

**Proposición B.1.** Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación entre variedades, y sean  $(U(p), \phi), (V(f(p)), \psi)$  cartas de  $M$  y  $N$  respectivamente. La matriz de la aplicación tangente  $df|_p$  en las bases  $\{\partial/\partial x^1|_p, \dots, \partial/\partial x^n|_p\}$  y  $\{\partial/\partial y^1|_{f(p)}, \dots, \partial/\partial y^n|_{f(p)}\}$  correspondientes a estas cartas, es la matriz jacobiana de  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  en  $\phi(p)$ .

Retomando el hilo de la exposición, si consideramos  $N = \mathbb{R}$  como espacio de llegada de  $df|_p$ , tendríamos que la aplicación tangente de  $f$  aplica linealmente vectores tangentes  $v(\cdot)$  en  $p$ , pertenecientes a  $T_p(M)$ , en números. En otras palabras  $df|_p$  pertenece  $\mathcal{L}(T_p(M), \mathbb{R})$ , esto es, el espacio dual de  $T_p(M)$ . Considerando una carta  $(U, \phi)$  de  $M$ , tiene sentido considerar las aplicaciones tangentes de las funciones coordenadas:  $dx^i|_p : M \rightarrow \mathbb{R}$  con la estructura de variedad natural.

**Definición B.5.** Dada una carta  $(U, \phi = x^1, \dots, x^n)$  de  $M$ , con  $p \in U$ , llamamos espacio cotangente,  $T_p^*(M)$ , al espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , generado por  $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$ . A los elementos de dicho espacio se les conoce como *covectores* o *1-formas*.

De este modo, parece claro que las *1-formas* son objetos de la forma  $a_1 dx^1|_p + \dots + a_n dx^n|_p$ , con  $a_i = a_i(x^1, \dots, x^n) \in C^\infty$ . Ahora bien, también podemos escribir las *1-formas* obviando el punto  $p$ , en cuyo caso tendríamos un campo de covectores. Estos objetos actúan linealmente sobre vectores, por lo que se trata de un campo de tensores  $(0, 1)$ . Dicho esto, la generalización a

campos tensoriales de tipo  $(r, s)$  resulta natural. No obstante, antes de hacerlo, en nuestro afán de ser lo más didácticos posible, vamos a motivar dicha definición introduciendo primeramente los tensores en  $\mathbb{R}^n$ , para a continuación presentar el concepto de tensores en una variedad. Recordemos en primera instancia una definición básica de Álgebra Lineal:

**Definición B.6.** La aplicación  $f : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$ , donde  $V_1, \dots, V_n, W$  son espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ , es multilineal, si para todo  $1 \leq i \leq n$ , se tiene que:

1.  $f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i + \vec{v}_i', \dots, \vec{v}_n) = f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n) + f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i', \dots, \vec{v}_n)$
2.  $f(\vec{v}_1, \dots, \lambda \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n) = \lambda f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n)$  para  $\lambda \in \mathbb{R}$

En nuestro contexto, es habitual que  $V_1 = V_2 = \dots = V_n$ . Pasemos, consecuentemente, a presentar los *tensores* en  $\mathbb{R}^n$ :

**Definición B.7.** Se conoce como tensor  $r$  veces covariante y  $s$  veces contravariante, o tensor de tipo  $(r, s)$ , a toda aquella aplicación multilineal  $f : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Como ocurre con otros objetos matemáticos, en el caso de los tensores podemos hablar de sus componentes: dada una base  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  de  $V$  y su correspondiente base dual  $\mathcal{B}^* = \{\tilde{\varphi}^1, \dots, \tilde{\varphi}^n\}$ . Llamamos *componentes del tensor tipo  $(r, s)$*  en estas bases a los números reales

$$T_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} = T(\tilde{\varphi}^{j_1}, \dots, \tilde{\varphi}^{j_r}, \vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_s}).$$

Llegados a este punto, no sería en absoluto descabellado afirmar que la notación tensorial puede llegar a ser sumamente aparatosa y poca funcional. Eso mismo debió pensar Einstein al introducir su célebre *convención de sumación*. Éste, no consiste sino en asumir la existencia de un sumatorio toda vez que un subíndice aparezca a su vez como superíndice. Ilustrémoslo con un ejemplo: escribamos un vector  $\vec{v}$  como combinación lineal de elementos de la base  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  y apliquémosle el convenio de sumación.

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^m a^j \vec{e}_j \quad \text{se abrevia como} \quad \vec{v} = a^j \vec{e}_j.$$

En resumen: **un índice duplicado arriba y abajo indica un sumatorio.**

Tal y como apuntamos al comienzo de la presente sección, nuestro propósito era introducir el concepto de tensor en una variedad. En este caso, el espacio vectorial subyacente considerado es el plano tangente, así como su dual, el espacio cotangente, tal y como mostramos con anterioridad.

**Definición B.8.** Consideremos una variedad  $n$ -dimensional  $M$ . Se denomina campo tensorial  $C^\infty$  de tipo  $(r, s)$ , o sencillamente tensor de tipo  $(r, s)$ , a toda aplicación que asigna a cada punto  $p \in M$ , un tensor de tipo  $(r, s)$ , donde  $V = T_p(M)$  y  $V^* = T_p^*(M)$ , y que además las componentes del tensor son de clase  $C^\infty$  en cada carta de la variedad  $M$ .

Parece lógico pensar que si  $V$  y  $V^*$  ahora son el plano tangente y el plano cotangente respectivamente, las componentes de un tensor tipo  $(r, s)$  en una variedad sean diferentes. De hecho, éstas definen en cada carta  $(U, \phi = x^1, \dots, x^n)$  funciones  $C^\infty$  de  $U$  en  $\mathbb{R}$ , dadas por:

$$p \in U \longrightarrow T(p)(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_n}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_n}}|_p).$$

Una vez conocida la expresión de las componentes de los tensores de tipo  $(r, s)$  en variedades, resulta natural preguntarse cómo dichas componentes se comportan bajo un cambio de carta. A saber:

$$\tilde{T}_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = \left( \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \right) \cdot \left( \frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}} \right) \cdot T_{l_1, \dots, l_s}^{k_1, \dots, k_r}.$$

Esto se deduce por la regla de la cadena de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad dy^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i.$$

## B.1 Introducción a la Geometría Riemanniana

En la presente sección, procederemos de manera análoga a la de la sección anterior. Comenzaremos dando algunas definiciones necesarias para poder llevar a cabo una exposición coherente. Acto seguido, realizaremos un acercamiento intuitivo a la noción de *geodésica* para finalmente presentar su definición formal junto con algunos resultados relevantes, todo ello acompañado de ejemplos ilustrativos. Nos hemos apoyado, esencialmente, en [Cha09]. Comencemos pues, con las primeras definiciones.

Debido a su relevancia en el seno de Relatividad General, vamos a introducir un último objeto que no es sino un tipo particular de tensor: la *métrica*.

Una **métrica** en un variedad  $M$ , es un tensor tipo  $(0, 2)$  en  $M$ , tal que en una carta de la variedad, la matriz de componentes  $(g_{ij})$  es simétrica y no singular. De esta guisa, decimos que el par  $(M, G)$  es una **variedad riemanniana** si  $M$  es una variedad y  $G$  una métrica.

Nota: si bien ciertos autores distinguen entre variedad riemanniana y semiriemanniana, dependiendo de si la métrica es definida positiva o no, nosotros no haremos tal distinción y denominaremos a todas variedades riemannianas.

**Definición B.9.** Sean  $M, N$  variedades y  $f : M \longrightarrow N$ . Si  $T$  es un tensor tipo  $(0, s)$  en  $N$ , se conoce como pullback al tensor tipo  $(0, s)$  en  $M$  dado por:

$$f^*T(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s) = T(df(\vec{v}_1), \dots, df(\vec{v}_s)).$$

**Definición B.10.** Dada  $(N, G)$  una variedad riemanniana y  $f : M \longrightarrow N$  una inmersión, esto es, si diferencial es inyectiva, Se llama métrica inducida por  $f$  en  $M$  a  $f^*G(\vec{v}, \vec{w}) = G(df(\vec{v}), df(\vec{w}))$ .

Ilustremos estas últimas definiciones con un el siguiente ejemplo.

**Ejemplo B.1.**

En  $\mathbb{R}^n$  con la carta trivial, esto es  $(\mathbb{R}^n, id)$ , la métrica asociada al producto escalar habitual no es otra que  $G = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n$ , o si preferimos poner en práctica el *convenio de sumación*,  $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ , con  $1 \leq i, j \leq n$ , donde  $g_{ij} = 1$ , si  $i = j$  y  $g_{ij} = 0$ , en caso contrario. Por comodidad, trabajaremos en  $\mathbb{R}^2$ . El ejercicio consiste pues en calcular la métrica usual en  $D^*(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ . Si observamos la definición de métrica inducida, nos percatamos de la necesidad de considerar una inclusión, en nuestro caso  $i : D \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por  $i(x, y) = (x, y)$ . Podemos ver esta inclusión como una restricción de la identidad al disco. La ventaja del desarrollo del marco geométrico anterior es la flexibilidad que nos brindan las variedades a la hora de considerar las coordenadas. De este modo, si en el disco  $D$  consideramos la carta en polares, la inmersión pasa a ser de la forma  $i(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . La métrica inducida  $i^*G$ , en el abierto  $G = D - X$  donde  $X = \{(x, 0) : -1 \leq x \leq 0\}$  (para que las coordenadas estén definidas en el abierto pertinente), aplicando la definición viene dada por  $i^*G = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \otimes (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \otimes (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)$ . Tras unas manipulaciones elementales, se llega a que

$$i^*G = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta.$$

Presentar ahora la definición formal de geodésica, podría resultar un tanto precipitado. Por consiguiente, y en línea con nuestro método expositivo, motivaremos un acercamiento intuitivo y mecánico de dicho concepto, que culminará con la definición en cuestión.

Si en el plano tangente contáramos con las métricas para determinar las longitudes de los vectores tangentes, en variedades riemannianas disponemos de otro instrumento para medir distancias: las *geodésicas*. La idea intuitiva de geodésica que expondremos es asaz sencilla a la par que enteramente mecánica. Supongamos que queremos medir la distancia que separa dos puntos  $p$  y  $q$  en una variedad  $(M, G)$ . Para ello, lanzaremos de  $p$  a  $q$  una partícula con velocidad 1, sobre la cual no actúan fuerzas, y mediremos el tiempo que tarda. Asumiremos que el problema tiene carácter local, con el fin de evitar dificultades de naturaleza topológica ( $p$  y  $q$  están en distintas componentes conexas o entre ellos existen agujeros”).

Apelando a nuestros conocimientos de Física más básicos, sabemos que una partícula en  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ), en ausencia de fuerzas, tiene energía cinética:

$$E = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \left( \frac{dx^i}{dt} \right)^2.$$

Notación: en adelante,  $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$ .

Si tomamos  $m = 2$ ,  $E$  no es otra cosa que la métrica usual en  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ),  $G$ , evaluada en el par  $(\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}})$ , a saber:  $E = G(\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}})$ . Si a continuación, consideramos una carta arbitraria  $(U, \phi = (q^1, \dots, q^n))$  y la trayectoria de la partícula, por una mera cuestión de notación, la denotamos  $\vec{q} = \vec{q}(t)$ , las componentes de la métrica usual cambian de carta como sigue:

$$E = G(\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}) = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \quad .$$

La notación  $q^i$ , heredada de la Física, se conoce como *coordenadas generalizadas*. De modo que, si la *métrica de Lorentz en  $\mathbb{R}^2$*  viene dada por  $L = dt \otimes dt - dx \otimes dx$ , unas sencillas computaciones nos permiten verificar que en coordenadas hiperbólicas se escribe  $t = r \cosh u, x = r \sinh u$ , como  $dr \otimes dr - r^2 du \otimes du$ , entonces la energía en estas coordenadas no es otra que  $E = \dot{r}^2 - r^2 \dot{u}^2$ .

Localmente, la energía total asociada a las trayectorias de las partículas moviéndose entre dos puntos tiende a minimizarse. Este fenómeno nos conduce a un nuevo problema: el de hallar una función que haga mínima una integral. Entramos de este modo en el ámbito del *cálculo de variaciones*. El siguiente resultado, básico en cálculo de variaciones, nos brinda hipótesis bajo las cuales podremos hallar las ecuaciones de las trayectorias con independencia de las coordenadas escogidas.

**Proposición B.2.** *Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^n$ , sea  $C = \{F = (q^1, \dots, q^n) : q^j \in C^2([a, b]), \text{ con } F(a) = c, F(b) = d\}$ . Supongamos que  $\int_a^b \mathcal{L}(t, F(t), \dot{F}(t)) dt$  alcanza un máximo en  $C$  para cierta  $F$ . Entonces  $F$  es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange:*

$$(B.1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k}; \quad k = 1, \dots, n$$

*Demostración.* Si la integral alcanza un extremo en  $C$  para  $F = F_0(t)$ , entonces para cualquier otra función  $\alpha = \alpha(t)$  como  $F$  pero con  $\alpha(a) = \alpha(b) = \vec{0}$  se cumple que la función real:

$$f(\epsilon) = \int_a^b \mathcal{L}(t, F_0(t) + \epsilon \alpha(t), \dot{F}_0(t) + \epsilon \dot{\alpha}(t)) dt$$

alcanza un extremo en  $\epsilon = 0$ , de modo que  $f'(0) = 0$ , por lo que, derivando bajo el signo integral e integrando a continuación por partes:

$$0 = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \alpha^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{\alpha}^k = \int_a^b \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \right) \alpha^k$$

donde  $\alpha^k$  denota las componentes de  $\alpha$ , y como éstas son arbitrarias, la única posibilidad de que la integral se anule siempre es que se verifiquen las ecuaciones de Euler-Lagrange.  $\square$

Nota: en Física,  $\mathcal{L}$ , denota el *lagrangiano*, esencialmente, la diferencia entre la energía cinética y potencial.

Debido a la motivación geométrica subyacente al conjunto de la exposición, centraremos ahora nuestra atención en el caso en que  $\mathcal{L}$  procede de una métrica. Bajo esta hipótesis, las ecuaciones de Euler-Lagrange tienen una formulación particular, siendo ésta posible gracias a un nuevo objeto matemático: *los símbolos de Christoffel*.

**Definición B.11.** *Sea  $(g_{ij})$  la matriz de componentes de  $G$  y sea  $(g^{ij})$  su matriz inversa. Se llaman símbolos de Christoffel a*



$$(B.2) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{mk}(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}).$$

Notación:  $f_{,k} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^k}$

**Lema B.1.** Si  $\mathcal{L}$  procede de una métrica, esto es,  $\mathcal{L} = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$  con  $g_{ij}$ , las componentes de la métrica, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange tienen el siguiente aspecto:  $\ddot{q}^k + \Gamma_{ij}^k\dot{q}^i\dot{q}^j = 0$ .

La utilidad de este resultado es doble: si los símbolos de Christoffel son sencillos de hallar, nos brinda un método general y sencillo de cálculo de las ecuaciones de las geodésicas. Por otro lado, si los símbolos de Christoffel son de difícil cálculo, hallando las ecuaciones de las geodésicas, podremos obtener éstos mediante una sencilla identificación con  $\ddot{q}^k + \Gamma_{ij}^k\dot{q}^i\dot{q}^j = 0$ . Más adelante lo ilustraremos con un ejemplo.

Ahora sí, ya estamos en situación de presentar la definición formal de *geodésica*:

**Definición B.12.** Se dice que la curva parametrizada  $c = c(t)$  en un variedad riemanniana  $n$ -dimensional es una geodésica, si en cada carta  $(U, \phi)$  con  $Im \cap U \neq \emptyset$  las funciones  $(c \circ \phi) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$  satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Donde los símbolos de Christoffel están evaluados en  $c(t)$ .

### Ejemplo B.2.

El *semiplano de Poincaré* es el semiplano superior  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ , dotado de la métrica de Poincaré  $y^{-2}dx^2 + y^{-2}dy^2$ . En este ejemplo vamos a calcular las ecuaciones de las geodésicas, así como los símbolos de Christoffel asociados. La métrica anterior nos lleva a considerar el siguiente lagrangiano,  $\mathcal{L} = y^{-2}\dot{x}^2 + y^{-2}\dot{y}^2$ . Si bien estamos en situación de aplicar el lema anterior, lo tedioso de calcular los símbolos de Christoffel en este caso, nos llevará a aplicar directamente la identidad (B.1). Tomamos  $q^1 = x, q^2 = y$ . De este modo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 2y^{-2}\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(2y^{-2}\dot{x}) = 2y^{-2}\ddot{x} - 4y^{-3}\dot{y}\dot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad .$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = 2y^{-2}\dot{y}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}(2y^{-2}\dot{y}) = 2y^{-2}\ddot{y} - 4y^{-3}\dot{y}^2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y^{-3}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad .$$

Entonces, las ecuaciones de las geodésicas vienen dadas por:

$$(B.3) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2y^{-1}\dot{x}\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + y^{-1}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) = 0 \end{cases}$$

Observación 1: en primer lugar, señalar que la teoría de ecuaciones diferenciales, nos asegura la unicidad de la solución para un punto inicial (posición) y un vector de derivadas (velocidad). Observación 2: nótese que, mediante manipulaciones elementales, hemos dejado los coeficientes de  $\ddot{x}$  y  $\ddot{y}$  iguales a 1, para así tener las ecuaciones en la forma prevista por el lema de más arriba. Símbolos de Christoffel. Sirviéndonos del lema de la página anterior es bastante sencillo hallar los símbolos, algo que podría resultar pesado mediante un cálculo directo. Recordamos que  $q^1 = x$  y  $q^2 = y$ . De este modo, se tiene que:

$$(B.4) \quad \ddot{x} = \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1 \dot{x}^i \dot{y}^j, \quad \ddot{y} = \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2 \dot{x}^i \dot{y}^j$$

Nótese que hemos aplicado el convenio de sumación al aparecer los índices  $i$  y  $j$  duplicados en la identidad  $\ddot{q}^k = \Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j$ . De este modo, si comparamos las expresiones (B.3) y (B.4) observamos que  $\Gamma_{12}^1 = -y^{-1}$  y por simetría, se tiene que  $\Gamma_{21}^1 = -y^{-1}$  (de hecho, es precisamente esta simetría la que explica el factor 2 de ambas identidades de (B.3)). Por otro lado, mediante un razonamiento análogo, se llega a que  $\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = y^{-1}$ . El resto de símbolos son nulos.

Hagamos una breve síntesis de lo visto en la sección. Tras introducir unas definiciones preliminares, ilustradas con un ejemplo, hemos motivado la noción de geodésica como minimizante de energía. A continuación, hemos aprendido a calcular sus ecuaciones, ofreciendo un marco general para un caso más "matemático". De nuevo, hemos dilucidado toda posible duda mediante otro ejemplo. Concluimos con un apunte geométrico([JPa]), si bien interesante, poco relevante en el marco de riemanniano. El concepto de geodésica se remonta al siglo XVIII con uno de los problemas variacionales que luego habrían de dar lugar al cálculo de variaciones: dados dos puntos fijos en una superficie, encontrar el segmento de curva que los une y que tiene longitud mínima<sup>1</sup>. Con el transcurso del tiempo, las condiciones se relajaron, definiendo las geodésicas como una familia de curvas que abarcara no sólo a los mínimos del funcional longitud, sino también a los puntos críticos de éste: de los dos meridianos que unen dos puntos en una esfera, ambos son puntos críticos, pero sólo uno minimiza el funcional. Con este nuevo enfoque, toda curva que minimice la longitud es una geodésica, pero no necesariamente al revés. Matemáticamente, esto se traduce en que para el lagrangiano  $\mathcal{L} = \sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}$ , es decir, la longitud de arco, las geodésicas son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

---

<sup>1</sup>Quizá a ello se deba el hecho de pensar en las geodésicas como minimizantes de la longitud. Como veremos enseguida, esto no es exactamente así.

# Apéndice C

## C.1 Vectores tangentes espaciales, temporales y nulos

**Lema C.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana con métrica  $G$  y sea  $\vec{v}(\lambda)$  el vector tangente de una geodésica en función de su parámetro, entonces  $G(\vec{v}(\lambda), \vec{v}(\lambda))$  es constante.*

*Demostración.* La derivada covariante a lo largo de una curva hereda de manera natural las propiedades de la derivada covariante, en particular, la linealidad para la derivación de productos escalares, de donde:

$$\frac{d}{d\lambda}(G(\vec{v}, \vec{v})) = G\left(\frac{D\vec{v}}{d\lambda}, \vec{v}\right) + G\left(\vec{v}, \frac{D\vec{v}}{d\lambda}\right) = 0$$

ya que, al tratarse de una geodésica, el campo de aceleraciones es nulo, o lo que es lo mismo:  $\frac{D\vec{v}}{d\lambda} = 0$ . □

## C.2 Breve diccionario terminológico

“Diccionario” terminológico entre Relatividad y Geometría Diferencial:

Relatividad	Geometría
Espacio-tiempo	Variedad riemanniana, $M$ ,
Gravedad	Métrica en $M$
Fotones	Geodésicas nulas
Partículas materiales	Geodésicas temporales
Tiempo propio	Parámetro de geodésicas temporales reparametrizadas



# Apéndice D

## D.1 Símbolos de Christoffel y cambio de carta

Recordamos que para el cambio de coordenadas  $\tilde{x} \mapsto x$ , concluimos que los símbolos de Christoffel se transformaban según la identidad siguiente:

$$(D.1) \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} \Gamma_{lr}^j - \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^l \partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k}.$$

Es nuestro deseo, partiendo de la expresión anterior, dar con la transformación inversa, esto es, cuando el cambio de coordenadas es  $x \mapsto \tilde{x}$ . Para ello vamos a usar que:

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} = \delta_k^i.$$

Si derivamos la expresión anterior respecto de  $x^l$ , se tiene que:

$$(D.2) \quad \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^l \partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} = - \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^j}$$

donde se ha usado la regla de la cadena:  $\frac{\partial}{\partial x^l} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}$ . Sustituyendo (D.2) en (D.1), llegamos a la expresión buscada:

$$(D.3) \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} \Gamma_{lr}^j + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^j}.$$

## D.2 Sistema inercial local: un lema

**Lema D.1.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana y sea  $p$  uno de sus puntos. Existe una carta tal que las derivadas parciales primeras del tensor métrico se anulan en  $p$  y por lo tanto:*

$$R_{jkl}^i(p) = \Gamma_{jl,k}^i(p) - \Gamma_{jk,l}^i(p).$$

*Demostración.* Sean  $(\varphi = (x^1, \dots, x^m), \mathcal{U})$ ,  $(\tilde{\varphi} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m), \tilde{\mathcal{U}})$  dos cartas cualquiera, con  $p \in \tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$  de coordenadas  $(p_1, \dots, p_n)$  y  $\tilde{\varphi}$  definida por el cambio de carta:

$$\tilde{x}^i = x^i - p^i + \frac{1}{2}(x^r - p^r)(x^s - p^s)\Gamma_{rs}^i,$$

donde es el teorema de la función inversa garantiza la viabilidad del anterior cambio de carta local  $C^\infty$ . Derivando ahora en ambos lados:

$$(D.4) \quad \left. \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^i} \right|_p = \delta_i^a \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{x}^a}{\partial x^k \partial x^i} \right|_p = \Gamma_{ki}^a.$$

Sean  $\tilde{g}_{ij}$  las componentes del tensor métrico en esta carta. Por la tensorialidad

$$g_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^j} \tilde{g}_{ab}.$$

De donde, por (D.4),  $g_{ij}(p) = \tilde{g}_{ij}(p)$ . Derivando la expresión anterior, se obtiene también que:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \tilde{x}^a}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^j} \tilde{g}_{ab} + \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial^2 \tilde{x}^b}{\partial x^k \partial x^j} \tilde{g}_{ab} + \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial \tilde{x}^l}$$

donde en el último miembro hemos aplicado la regla de la cadena. Finalmente, sustituyendo en el punto  $p$ , por la tensorialidad y usando una vez más (D.4):

$$\left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_p = \Gamma_{ki}^a(p) g_{aj}(p) + \Gamma_{kj}^b(p) g_{ib}(p) + \left. \frac{\tilde{g}_{ij}}{\partial \tilde{x}^k} \right|_p$$

y como ya usáramos en la anterior proposición, al encontrarnos trabajando siempre en el ámbito de la conexión Levi-Civita, se tiene:

$$\left. \frac{\tilde{g}_{ij}}{\partial \tilde{x}^k} \right|_p = \Gamma_{ki}^a(p) g_{aj}(p) + \Gamma_{kj}^b(p) g_{ib}(p)$$

lo que obliga a que  $\left. \frac{\tilde{g}_{ij}}{\partial \tilde{x}^k} \right|_p = 0$ . □

Incluimos un par de ejemplos de cálculo de las componentes de estos nuevos tensores.

### D.3 Ejercicios

**Ejercicio 1.** *Vamos a comprobar que el tensor de Ricci cumple  $R_{12} = R_{21} = 0$  para cualquier métrica en  $\mathbb{R}^2$  de la forma  $A(x, y)dx^2 + B(x, y)dy^2$ .*

Usando las simetrías del tensor de Riemann recogidas en la Proposición 1 1):

$$\overline{R_{ij}} = g^{kl} R_{ijkl} = -g^{kl} R_{ijlk} = -R_{ij}$$

de donde  $R_{ij} = 0 = R_{ji}$  por la simetría del tensor de Ricci.

**Ejercicio 2.** *Hallemos ahora las componentes  $R_{j12}^i$  del tensor de curvatura para la métrica en  $(\mathbb{R}^+)^2$  definida por  $G=e^x dx^2 + dy^2$ .*

Para  $i = 1$ , tenemos que  $k = i$ , o lo que es lo mismo, por la definición del tensor de Ricci:  $R_{j12}^1 = R_{1j}$  donde  $j = 1, 2$ . La métrica  $G$  es de la forma  $A(x, y)dx^2 + B(x, y)dy^2$ , de donde deducimos inmediatamente, gracias al ejercicio anterior, que  $R_{1j} = 0$  para  $j = 1, 2$ . Por consiguiente  $R_{j12}^1 = 0$

Para el resto de componentes usaremos las simetrías del tensor de Riemann de la Proposición 1. 1):

- $R_{212}^2 = R_{2212} = -R_{2212} = -R_{212}^2 \implies R_{212}^2 = 0$
- $R_{112}^2 = R_{2112} = -R_{1212} = 0$ , por el Ejercicio 1.





# Apéndice E

## E.1 Ejemplos

**Ejemplo E.1.** *Imaginemos que nos dejásemos caer hacia un agujero negro partiendo del reposo desde  $r = R_0$ , vamos a calcular el tiempo que, según nuestras mediciones, tardaríamos en alcanzar el horizonte de sucesos  $r = r_0$ .*

Bajo estas condiciones, esto es, partiendo del reposo,  $r'(0) = 0$ , para una partícula material parametrizada por tiempo propio, se verifican las hipótesis de la proposición 3.1. De este modo, tan sólo hemos de despejar  $\tau$  de la identidad prevista por la citada proposición:

$$(E.1) \quad r(\tau) = R_0 \arccos^2\left(\frac{1}{2}V(K_0\tau)\right) \quad \text{donde} \quad K_0 = \frac{2}{R_0} \sqrt{\frac{r_0}{R_0}}$$

$V(x)$  es la función inversa de  $f(x) = x + \sin x$  y recordamos que  $r_0 = 2GM$ , donde  $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ .

Sustituyendo  $r(\tau)$  por  $r_0$  en la expresión (E.1) y despejando  $\tau$ , se llega a lo siguiente:

$$(E.2) \quad 2 \arccos \sqrt{\frac{r_0}{R_0}} = V(K_0\tau)$$

O lo que es lo mismo, puesto que  $f(x) = x + \sin x$  es la inversa de  $V(x)$ :

$$(E.3) \quad 2 \arccos \sqrt{\frac{r_0}{R_0}} + \sin 2 \arccos \sqrt{\frac{r_0}{R_0}} = K_0\tau.$$

Tomando en (E.3)  $y = \arccos \sqrt{\frac{r_0}{R_0}}$ , y usando la regla del ángulo doble:

$$\sin 2y = 2 \sin y \cos y = 2 \sqrt{\frac{r_0}{R_0}} \sin y$$

Haciendo a continuación uso de la más que conocida identidad  $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ , la expresión anterior deviene en:

$$\sin 2y = 2 \sqrt{\frac{r_0}{R_0}} \sqrt{1 - \cos^2 y} = 2 \sqrt{\frac{r_0}{R_0}} \sqrt{1 - \frac{r_0}{R_0}}.$$

Finalmente, sustituimos lo anterior en (E.3) y dividimos por  $K_0$  en ambos lados en (E.3), se tiene que el tiempo que nos tomaría llegar al punto  $r_0$  partiendo del reposo es:

$$\tau_H = R_0 \left( \sqrt{\frac{R_0}{r_0}} \arccos \sqrt{\frac{r_0}{R_0}} + \sqrt{1 - \frac{r_0}{R_0}} \right).$$

**Ejemplo E.2.** *En relatividad general, al igual que en el caso clásico, es posible que un planeta siga una órbita circular alrededor de una estrella. Vamos a probar que se verifica la segunda ley de Kepler  $\omega^2 r^3 = Gm$  donde  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ .*

En el caso de un planeta orbitando circularmente en torno a una estrella, la métrica de Schwarzschild se ve ligeramente modificada, ya que, bajo estas hipótesis, se tiene que,  $\dot{r} = 0$ , puesto que el radio es constante, y además,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . De este modo, la métrica  $G$ , tendrá el siguiente aspecto:

$$G = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \dot{t}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Para deducir la segunda ley de Kepler, nos vamos a valer de las ya familiares ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la variable  $r$ . De esta guisa:

$$(E.4) \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}.$$

Debido al carácter constante de  $r$  es evidente que  $\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = 0$ . Por otro lado, la computación del lado derecho en (E.4) nos lleva a:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \iff \frac{r_0}{r} \dot{t}^2 - 2r \dot{\varphi}^2 = 0.$$

Recordando que  $r_0 = 2GM$ , reagrupando los términos en la identidad anterior y aplicando la regla de la cadena como  $\frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \frac{d\varphi}{dt}$ , se deduce que, efectivamente,

$$\frac{r_0}{2} = r^3 \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{esto es} \quad \boxed{Gm = r^3 \omega} \quad \text{donde} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

**Ejemplo E.3.** *Probar que a lo largo de cualquier geodésica de la métrica de Schwarzschild la expresión  $r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$  es constante.*

En primer lugar, vamos a reescribir la expresión de tal manera que nos va a facilitar los cálculos. La idea es hacer aparecer  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$  y  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$  respectivamente, los llamados, momentos generalizados. Efectivamente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = -2r^2 \dot{\theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -2r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta$$

Por consiguiente, la expresión del enunciado no es otra que:

$$(E.5) \quad -\frac{1}{4} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} \right)$$

Para demostrar que se trata de una constante, vamos a comprobar que la derivada respecto a  $\tau$  de (E.5) es nula. De esta manera, derivando y usando las ya familiares ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\theta$  y  $\varphi$ :

$$\frac{d}{d\tau} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) = \underbrace{\frac{d}{d\tau} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right)^2 \right)}_A + \underbrace{\frac{d}{d\tau} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} \right)}_B$$

$$A = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \quad \text{donde} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2$$

$$B = 2 \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - 2 \frac{\dot{\theta} \cos \theta}{\sin^3 \theta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right)^2 \quad \text{donde} \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0$$

El cálculo de  $A$  es directo, la pertinente sustitución muestra que  $A = 8r^4 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \dot{\theta}$ . Por otro lado, como los coeficientes de la métrica de Schwarzschild no dependen del parámetro  $\varphi$ , en la segunda identidad sólo es relevante el segundo sumando. Así, sustituyendo nuevamente, se tiene que  $B = -A$ . De este modo, hemos probado que la derivada de (E.5) es, efectivamente, nula, lo cual prueba el resultado buscado.

## E.2 Breves reseñas históricas

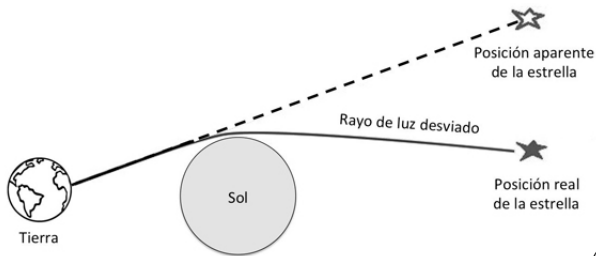
### E.2.1 Corrimiento hacia el rojo gravitatorio

El *experimento de Pound-Rebka*, llevado a cabo en 1959 en una torre de 22.5 metros en la Universidad de Harvard, es considerado como la definitiva verificación experimental del corrimiento al rojo gravitatorio. En él se usaron átomos de hierro emisores de rayos gamma. Desde entonces, varios han sido los experimentos diseñados para probar su existencia.

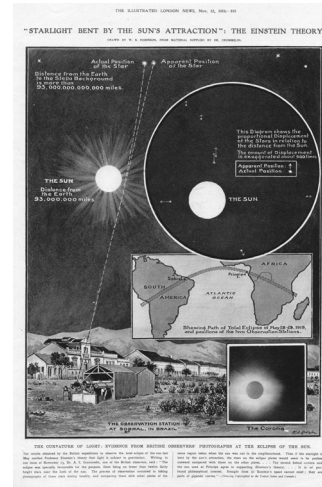
### E.2.2 Deflexión de la luz

El inglés sir A.Eddington, probablemente uno de los mayores defensores de la Relatividad General (y uno de los pocos que la comprendían por aquel entonces), tras una serie de intentos fallidos fruto de avatares tanto políticos (Primera Guerra Mundial) como climatológicos, pudo poner rumbo a isla de Príncipe en el mes de mayo de 1919, como líder de una de las dos expediciones organizadas por la *Royal Astronomical Society*. La otra expedición se dirigió a Sobral, en el noreste de Brasil. Ahora bien, ¿a qué se debió la particular elección de los lugares para llevar a cabo el experimento? La respuesta es tan sencilla como sorprendente, pero requiere de una breve digresión.

Si las predicciones de Einstein eran correctas, la luz, al igual que cualquier geodésica material, también debería verse afectada por la curvatura espacio-temporal. De esta manera, al aproximarse a un objeto masivo, en este caso el Sol, la luz habría de experimentar un desvío en su trayectoria, curvándose conforme aumentase su proximidad a la estrella. La (inocente) dificultad venía a la hora de escoger la fuente luminosa con la que llevar a cabo el experimento: la luz emitida por cualquiera de las múltiples estrellas no es visible por la noche, y durante el día, la luz solar resulta cegadora, imposibilitando cualquier observación. La solución, funcional



(a) Esquema intuitivo, y algo exagerado (el ángulo real de deflexión es de  $1,74''$ ) de lo que ocurriría con un rayo en las proximidades del Sol.



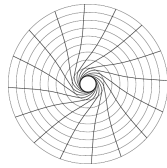
(b) Artículo aparecido en el *Illustrated London News* en Noviembre de 1919, haciéndose eco del ya mencionado experimento capitaneado por el físico inglés A.Eddington.

y sencilla, pasaba por llevar a cabo el experimento durante un eclipse, sólo visible desde una estrecha franja que desde el océano Pacífico, atravesaba Brasil, el océano Atlántico y el África Ecuatorial hasta el océano Índico. El día 29 de mayo de 1919, aprovechando un eclipse solar de casi 7 minutos de duración (uno de los más largos de la pasada centuria), así como la luz emitida por las Híades, el cúmulo abierto más próximo al Sistema Solar, el equipo llegó a una conclusión tajante. El análisis de las medidas obtenidas de la desviación de los rayos de luz confirmaba la influencia del campo gravitatorio sobre la luz, tal y como predecía la teoría de Einstein.

# Apéndice F

## F.1 Frame dragging en el plano ecuatorial

Figura F.1: representación del *frame dragging* en el plano ecuatorial para agujeros negros de Kerr.





# Bibliografía

- [BB06] J. Baez and E.F. Bunn. The Meaning of Einstein's Equation. <http://math.ucr.edu/home/baez/einstein/einstein.pdf>, 2006.
- [BGr] B. Greene *El universo elegante*. CRITICA, 1999.
- [Cha01] F.Chamizo. Seminario 2001: Una odisea en el espacio-tiempo. <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APseminario02.pdf>, 2001.
- [Cha09] F.Chamizo Geometría IV (tensores, formas, curvatura, relatividad y todo eso). <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/apegeomiv08.pdf>, 2009.
- [Cha11] F.Chamizo. *Geometría Diferencial (teatro de variedades para estudiantes de máster)*. [http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APcompl\\_geom11.pdf](http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APcompl_geom11.pdf), 2012.
- [Cha15a] F.Chamizo. Bases de geometría diferencial. <http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/mgeom1415/fisgeo1.pdf>, 2015
- [Cha16] .Chamizo. Las ecuaciones de maxwell en plan fácil. <http://www.uam.es/fernando.chamizo/physics/physics.html>, 2016.
- [Cre] M. Crespo. Ecuaciones del campo de Einstein. newblock [https://webs.um.es/bussons/EcuacionesEinstein\\_Manuel.pdf](https://webs.um.es/bussons/EcuacionesEinstein_Manuel.pdf).
- [Ein97] A. Einstein. *The collected papers of Albert Einstein. Vol. 6*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. The Berlin years: writings, 1914–1917, English translation of selected texts by A. Engel in consultation with E. Schucking, With a preface by Engel and Schucking.
- [FaDow] F. Dowker. *Black Holes. MSc in Quantum Fields and Fundamental Forces* Blackett Laboratory, Imperial College, London, 2014.
- [FLS64] . P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.
- [Gon05] J.Gonzalo. *Variedades y Geometría: un curso breve.*, volume 64 of *Documentos de trabajo*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2005.

- [HawEll] S. Hawking and G. Ellis. *The large scale structure of space-time* Cambridge monographs on Mathematics and Physics, Cambridge, 1973.
- [HH14] C. Heinicke and F. W. Hehl. *Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein's Field Equation – an introduction*. *Int. J. Mod. Phys.*, D24(02):1530006, 2014.
- [JaGM] J.A. Guerrero Montero. *El agujero negro de Kerr. Trabajo de Fin de Grado*. Universidad de Granada, 2017.
- [JPa] J.A. Pastor González. *Geometría de Riemann. Apuntes 2006-2007* Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia
- [JPi] J.. Pinochet *La curvatura de los rayos de luz en las cercanías de cuerpos masivos: una exposición para alumnos de cursos introductorios de Física*. *Latin-American Journal of Physics Education*, 2014.
- [MTW73] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973.
- [Pe] A. Pe'er. Einstein's field equation. newblock <http://www.physics.ucc.ie/apeer/PY4112/Einstein.pdf>, 2014.
- [RoW] R. M. Wald. *Energy limits on the Penrose Process*. *The Astrophysical Journal*, College Park, 1973.
- [Sch85] B. F. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [Vis07] M. Visser. The Kerr spacetime: A Brief introduction. In *Kerr Fest: Black Holes in Astrophysics, General Relativity and Quantum Gravity Christchurch, New Zealand, August 26-28, 2004*, 2007.
- [Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley & Sons, 1972.