



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

El campo electromagnético y sus ecuaciones

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Alejandro Vázquez

Tutor: Fernando Chamizo

Curso 2022-2023

Resumen

Este trabajo está dedicado al electromagnetismo clásico, cuyo impacto en la vida cotidiana moderna actual es difícil de exagerar. Los dos primeros capítulos presentan sus ecuaciones con el formalismo matemático adecuado y algunas de sus consecuencias más inmediatas. Concretamente, en el primero, se introducen las ecuaciones de Maxwell y sus motivaciones, terminándose con algunos resultados que conectan con aportaciones previas a Maxwell. En el segundo, se muestra cómo los potenciales escalar y vector permiten un tratamiento matemáticamente más simple y se ilustra con las soluciones correspondientes a campos constantes, aproximaciones dipolares y la existencia de ondas electromagnéticas. En el tercer capítulo se muestra cómo el electromagnetismo está íntimamente ligado con la relatividad especial. Se muestra que la geometría de Minkowski aplicada a los potenciales lleva a unas transformaciones coherentes de los campos, cómo se modifica la percepción de un campo eléctrico a velocidades relativistas, que la invarianza de las ecuaciones de Maxwell sugiere las transformaciones de Lorentz y que estas últimas también se infieren solo a partir de la fuerza de Lorentz. El último capítulo está dedicado a mostrar que las ecuaciones de Maxwell se deducen a partir de un principio de mínima acción; se introduce y analiza el lagrangiano electromagnético en el vacío y con cargas.

Abstract

This thesis is dedicated to classical electromagnetism, whose impact in our daily basis is hard to exaggerate. The two first chapters introduce their equations with proper mathematical formalism along with some of their immediate consequences. More specifically, the first one gets Maxwell equations introduced alongside their motivations, enclosing with some results connected with results previous to Maxwell itself. In the second one, the simplifying effects of scalar and vector potentials are shown with solutions corresponding with constant fields, dipolar approximations and the existence of electromagnetic waves. In the third chapter we expose the intrinsic connection between electromagnetism and special relativity, We see how Minkowsky geometry applied to potentials lead to transformations in coherence with our fields, how the perception of a electric field is modified under relativistic speeds, how Maxwell equations invariability imply Lorentz transformations, and how to deduce those transformations only out of Lorentz force. Finally, the last chapter is dedicated to show that Maxwell equations are deduced out of a minimal action principle; the electromagnetic lagrangian is introduced and analyzed with and without sources.

Índice general

1	Las ecuaciones de Maxwell	1
1.1	Las ecuaciones	1
1.2	Las dos primeras ecuaciones	1
1.3	La tercera ecuación	3
1.4	La cuarta ecuación	3
1.5	Midiendo el campo magnético	5
2	Los potenciales escalares y vectoriales	9
2.1	Potencial en el sentido matemático	9
2.2	Potenciales asociados al electromagnetismo	11
2.3	Potenciales en el caso estático	11
2.3.1	Ecuaciones en caso estático	11
2.3.2	Solución puntual del potencial eléctrico	12
2.3.3	Solución general de potenciales estáticos	13
2.3.4	Estimación del potencial electrostático	14
2.3.5	Estimación del potencial magnetostático	14
2.4	Ondas electromagnéticas	16
3	La formulación relativista	19
3.1	Las transformaciones de Lorentz	19
3.2	Transformaciones de Lorentz en el electromagnetismo	20
3.3	El campo eléctrico de una carga en movimiento	21
3.4	Deducción de las transformaciones desde el electromagnetismo	23
3.5	Las transformaciones desde la fuerza de Lorentz	24
4	El principio de mínima acción	27
4.1	El tensor electromagnético	27
4.1.1	Espacio-tiempo de Minkowski	27
4.1.2	Cuadrigradiente	28
4.1.3	Definición del tensor electromagnético	28
4.2	Mecánica lagrangiana	29
4.3	El lagrangiano electromagnético	31
4.4	El lagrangiano electromagnético con cargas y corrientes	34
A	Ley de adición de velocidades	37
A.1	Limitación de la velocidad de los cuerpos	37
A.2	Propiedades algebraicas de la ley	37
B	Teoría de tensores	39

B.1 Notación de Einstein	39
B.2 Definición intrínseca	39
B.3 Covarianza y contravarianza	41
B.4 Subida y bajada de índices	42
Bibliografía	45

CAPÍTULO 1

Las ecuaciones de Maxwell

Comenzamos recogiendo uno de los mayores hitos en ese persistente avance del ser humano de conocimiento y dominio de su entorno: la formulación de las leyes que rigen los relámpagos, las brújulas o los dispositivos móviles que utilizamos a día de hoy. Estamos hablando de las ecuaciones de James Clerk Maxwell, quien unió el trabajo colectivo de la ciencia en dicho ámbito para exponer todo lo que se conocía en ese entonces sobre la electricidad y el magnetismo en solo 4 ecuaciones. Parte de la gracia de la ciencia está en reproducir esos fenómenos, o estudiarlos a través de fenómenos equivalentes para deducir de ellos una expresión matemática que los explique. Para el ámbito en el que estamos, tenemos por ejemplo [1] el experimento del alambre torcido, realizado por Jean-Baptiste Biot y Félix Savart y presentado en su trabajo a la Academia de las Ciencias de París el 18 de Diciembre de 1820. En el experimento medían el período de oscilación de una aguja magnetizada dispuesta en horizontal respecto a su punto de equilibrio, estando esta afectada por un alambre torcido. Este pequeño experimento serviría para formular posteriormente la Ley de Ampère-Maxwell, la cuarta ecuación de Maxwell.

1.1. Las ecuaciones

Lo que dicen las ecuaciones de Maxwell en su formulación más común es que [2] la intensidad del campo eléctrico \vec{E} y la inducción magnética \vec{B} , que indican las fuerzas de estos campos, en el vacío, sin cargas que los perturben, cumplen:

$$(1.1) \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

donde $\nabla \cdot$ y $\nabla \times$ son la divergencia y rotacional de los campos respectivamente.

1.2. Las dos primeras ecuaciones

De estas leyes, las más fáciles de leer son las dos primeras. Estas se comprenden mejor en su forma integral. Si rodeamos nuestro punto con una superficie cerrada S

cuyo interior es V , como el borde de una esfera, entonces, por el teorema de divergencia de Gauss:

$$(1.2) \quad \int_S \vec{E} = \int_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \int_V 0 dV = 0, \quad \int_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = 0,$$

donde \vec{n} es el vector normal a la superficie. Básicamente nos dicen que, en regiones en cuyo interior no haya cargas o imanes, las fuerzas eléctricas y magnéticas se conservan a lo largo de su borde o frontera. Consideremos el caso del campo eléctrico, ahora con cargas: Sea V una región del espacio en cuyo interior hay una carga q . Virtualmente, vamos a rodear esa carga de una esfera S de radio tan pequeño como queramos, llámese ϵ . En la región de V que no incluye a S no queda ninguna carga dentro. Entonces allí sí que se cumple la primera ecuación de Maxwell y tenemos:

$$(1.3) \quad \int_{V-S} \nabla \cdot \vec{E} = 0.$$

Para calcular esa integral, aplicamos el teorema de la divergencia, teniendo en cuenta ahora que hay un pequeño hueco en nuestro volumen V , que es justo S , luego su efecto va a haber que quitarlo:

$$(1.4) \quad \int_{V-S} \nabla \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} \vec{E} - \int_{\partial S} \vec{E} = 0.$$

Luego la carga eléctrica en la frontera de V es la que hay en la de S . Teniendo en cuenta que, por la Ley de Coulomb con unidades Gaussianas (básicamente las que quitan las constantes) $\vec{E} = \frac{q}{r^2} \hat{u}$, donde q es la intensidad de la carga, r es el módulo de la distancia de la carga a donde estamos midiendo, y \hat{u} es el vector unitario que va desde la carga a donde estamos midiendo la intensidad, tenemos que, como la dirección de \vec{u} pasa por el centro y va hacia afuera:

$$(1.5) \quad \int_{\partial V} \vec{E} = \int_{\partial S} \vec{E} = \int_{\{r=\epsilon\}} \frac{q}{r^2} (\vec{u} \cdot d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon^2} \int_{\{r=\epsilon\}} dS = \frac{4\pi\epsilon^2 q}{\epsilon^2} = 4\pi q.$$

Lo más importante de (5) es que la carga de ∂V no depende de ϵ , luego si $\epsilon \rightarrow 0$ la expresión sigue funcionando. Podemos aplicar esto a una cantidad de cargas cualquiera en el interior de V , ya que el campo eléctrico es lineal. Por tanto, si consideramos que en V hay una densidad de carga ρ , y que la carga total es Q , tenemos que la primera ecuación de Maxwell, ahora con carga interna, es:

$$(1.6) \quad \int_{\partial V} \vec{E} = 4\pi \int_V \rho = 4\pi Q.$$

Teniendo en cuenta la similitud entre la primera y la segunda ley, esto mismo se podía haber hecho para el campo magnético con densidad del campo magnético. El problema es que la evidencia experimental sugiere que dicha densidad es nula, es decir, que incluso aunque haya imanes en su interior se tiene que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Esto tiene una interpretación muy fuerte: no existen los monopolos magnéticos.

1.3. La tercera ecuación

La tercera ecuación es la más fácil de ver en el mundo real, ya que modela la inducción electromagnética. Esto se ve, de nuevo, más fácilmente en forma integral; consideremos un disco S en el espacio. Aplicando el teorema de Stokes para integrar sobre dicho disco tenemos:

$$(1.7) \quad \int_S \nabla \times \vec{E} = \int_{\partial S} \vec{E} = \int_S -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B}.$$

En el último paso hemos podido intercambiar derivada e integral por la regla integral de Leibniz, que nos dice que dicho cambio se puede hacer siempre que la región de integración no dependa de la variable respecto a la que se deriva. Como suponemos un disco constante en el tiempo, no tenemos problemas cambiando el orden.

Para entender bien esto, basta leer el segundo término con el cuarto. Si la frontera de nuestro disco es una espira y movemos por el centro de la espira un imán, el campo magnético que pasa por el interior fluctuará con el tiempo, luego generaremos una corriente eléctrica en la espira. Michael Faraday ya observó el fenómeno en su día, aunque su formulación moderna la dio Maxwell. El signo no es más que un convenio acerca de la orientación de los campos magnéticos, sobre qué es el polo norte y qué es el polo sur, y la constante c es la constante de proporcionalidad en unidades gaussianas.

1.4. La cuarta ecuación

En el año 1820, H.C. Ørsted se percató de que la corriente eléctrica que circulaba por un conductor alteraba la orientación de una brújula que tenía cerca. Ørsted analizó dicha desviación y determinó que las líneas de campo del campo magnético son perpendiculares a la corriente que circula. Posteriormente, André-Marie Ampère analizó el fenómeno utilizando dos cables paralelos sobre los que hacía pasar una corriente eléctrica en sentidos opuestos, observando que se atraían como imanes. Ampère se percató de que la fuerza atractiva era proporcional a la intensidad de corriente I que circula por el conductor. La intensidad de corriente no es más que la cantidad de carga que pasa por un conductor por unidad de tiempo. Más específicamente, dada C una curva cerrada que rodea al conductor, tenemos que

$$(1.8) \quad \int_C \vec{B} = KI$$

con K una constante de proporcionalidad. Esto es correcto siempre que supongamos que nuestro conductor es unidimensional. Como en la realidad los cables tienen un mínimo de grosor, consideramos una sección S del conductor y definimos $I = \int_S \vec{j}$, siendo \vec{j} un vector que indica la dirección, sentido e intensidad de la corriente. Con las unidades hasta ahora utilizadas, experimentalmente se puede comprobar que $K = \frac{4\pi}{c}$. Una vez explicado esto, antes de continuar agrandamos nuestra sección S para que ahora $C = \partial S$. Esto no afecta a las cuentas ya que fuera de la sección no pasa corriente

luego tiene contribución nula. Entonces, aplicando el teorema de Stokes:

$$\int_{\partial S} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} \Rightarrow \int_S \left(\nabla \times \vec{B} - \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) = 0.$$

Como todo esto es cierto independientemente de la sección S , concluimos que

$$(1.9) \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Para obtener la cuarta ecuación de (1.1), falta incluir la contribución de campos eléctricos variables en el tiempo, un término añadido para evitar una contradicción con el principio de conservación de la carga. sabemos que la cantidad de carga en cada punto del espacio viene dada por la densidad de carga ρ . Como una corriente eléctrica no es más que un montón de cargas que se mueven en una dirección y sentido, \vec{j} nos está dando hacia dónde va esa carga. Como \vec{j} incluye información del módulo, se suele escribir como $\vec{j}(\vec{s}) = \rho(\vec{s})v(\vec{s})$, donde v es la velocidad de la carga. Si tenemos una superficie cerrada V y dentro, por ejemplo, $\int_V \rho \, dx = 1$, mágicamente no podemos tener $\int_V \rho \, dx = 2$ si no entran cargas desde fuera. Es decir, los movimientos de las cargas en la frontera deben compensar las variaciones en el interior. En términos de ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dx = - \int_{\partial V} \vec{j} dS \Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \right) dx = 0$$

Y como esto es cierto para toda superficie cerrada, concluimos el *principio de conservación de la carga* en su formulación matemática:

$$(1.10) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

Si suponemos que (1.9) es cierto, entonces en (1.9) al calcular el gradiente de \vec{j} tendríamos $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B})$, que es 0 al ser la divergencia de un rotacional, con lo que $\partial \rho / \partial t$ debería ser 0 siempre, es decir, las cargas no se podrían mover. Para solucionarlo, añadimos el término extra:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Solo como curiosidad, [3] el término extra hace que tengamos una consecuencia vital: pueden existir ondas electromagnéticas en el vacío. Con $\vec{j} = 0$ los campos eléctricos y magnéticos cumplen la ecuación de ondas $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$.

Para finalizar esta sección, una vez repasados las 4 ecuaciones, mostramos a continuación todas ellas con fuentes:

$$(1.11) \quad \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

1.5. Midiendo el campo magnético

Ya para terminar, veamos cómo calcular la inducción magnética. Dado un circuito que modelaremos como una curva cerrada simple C , parametrizada por la curva s , por el que circula una intensidad I , si cada punto está a una distancia r del punto p donde estamos midiendo \vec{B} y la dirección y sentido del punto de C a p la da el vector unitario \hat{u} , experimentalmente se puede comprobar que:

$$(1.12) \quad \vec{B} = \frac{I}{c} \int_C \frac{(ds \times \hat{u})}{r^2}.$$

Esta se conoce como la Ley de Biot-Savart, dos contemporáneos de Ampère. El mismo Ampère obtuvo una redacción similar de esta ley, que a día de hoy se conoce como ley de Ampère. Para obtener su desarrollo, primero necesitamos comprobar que el campo $\frac{\hat{u}}{r^2}$ es conservativo:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \nabla r^{-1} &= \nabla (r_1^2 + \dots + r_k^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (r_1^2 + \dots + r_k^2)^{-\frac{3}{2}} (2r_1, \dots, 2r_k) \\ &= -\frac{1}{r^2} \vec{r} = -\frac{\hat{u}}{r^2}, \end{aligned}$$

luego $\frac{\hat{u}}{r^2} = -\nabla r^{-1}$ y por tanto $\vec{E} = -q\nabla r^{-1}$. Supongamos una carga $-q$ en el origen, y que a una distancia l por el eje OX en sentido positivo ponemos una carga opuesta q . Entonces, el campo se vuelve aproximadamente:

$$(1.14) \quad \vec{E} = -ql\nabla \left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1} \right).$$

Cuando $l \rightarrow 0$, ql tiende a una constante, conocida como el momento dipolar del dipolo. En el caso general, hay que indicar la derivada direccional en la dirección del polo, desde la carga negativa a la positiva. Si miramos ahora la situación, pero con un dipolo magnético, de dirección del dipolo \vec{n} , Ampère concluyó:

$$(1.15) \quad \vec{B} = -\mu\nabla \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}} r^{-1} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{\hat{u}}{r^2} \right)$$

donde μ se conoce como momento dipolar magnético, y mide la intensidad magnética del dipolo de forma escalar. Si la intensidad se distribuye uniformemente sobre el dipolo, esto es, $\mu = mdS$, a m se la llama densidad del momento magnético. Después de estas consideraciones preliminares, Ampère concluyó finalmente que el campo magnético generado por un circuito C es el mismo que el generado por una superficie S con frontera C y densidad del momento magnético proporcional a la intensidad de corriente que circula por el circuito. Con unidades gaussianas, el factor de proporcionalidad es c^{-1} , concluyendo la Ley de Ampère con esta expresión:

$$(1.16) \quad \vec{B} = \frac{I}{c} \int_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{\hat{u}}{r^2} \right) dS.$$

Comprobemos que las expresiones de Biot-Savart y Ampère son equivalentes. Como dos vectores son iguales si y solo si sus coordenadas lo son, es suficiente probar:

$$(1.17) \quad \int_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{\vec{e} \cdot \hat{u}}{r^2} \right) dS = \int_C \frac{\vec{e} \cdot (ds \times \hat{u})}{r^2}$$

donde C es la frontera de la superficie S y \hat{e} es un vector unitario cualquiera. Para demostrar esto, empezamos quitando al diferencial del producto vectorial en el lado derecho:

$$(1.18) \quad \hat{e} \cdot (ds \times \hat{u}) = (\hat{u} \times \hat{e}) \cdot ds.$$

Aplicando ahora que $\frac{\hat{u}}{r^2} = -\nabla r^{-1}$, si dividimos por r^2 y calculamos el rotacional de $\hat{u} \times \hat{e}$ obtenemos:

$$(1.19) \quad \nabla \times \left(\frac{\hat{u} \times \hat{e}}{r^2} \right) = \nabla \times (-\nabla r^{-1} \times \hat{e}) = -\nabla \times (\nabla \times \hat{e} r^{-1}).$$

En la segunda igualdad hemos aplicado que, si f es un campo escalar y c es un vector constante, $\nabla \times (\nabla f \times \vec{c}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{c} f)$. Ahora necesitamos probar que, si F es un campo vectorial, $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$, donde ∇^2 consiste en aplicar el operador laplaciano dos veces seguidas en cada coordenada. Si $F = (f, g, h) \in C^2$ de donde estemos derivando, cada coordenada escalar y denotamos con f_i la derivada de f respecto a la coordenada i -ésima:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times F) &= \nabla \times (g_z - h_y, h_x - f_z, f_y - g_x) \\ &= (h_{xz} - f_{zz} - f_{yy} + g_{xy}, f_{yx} - g_{xx} - g_{zz} + h_{yz}, g_{zy} - h_{yy} - h_{xx} + f_{zx}) \\ \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F &= \nabla(f_x + g_y + h_z) - (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}, g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}, h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}) \\ &= (f_{xx} + g_{yx} + h_{zx}, f_{xy} + g_{yy} + h_{zy}, f_{xz} + g_{yz} + h_{zz}) \\ &\quad - (f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}, g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}, h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}) \\ &= (g_{yx} + h_{zx} - f_{yy} - f_{zz}, f_{xy} - g_{xx} - g_{zz} + h_{zy}, f_{xz} + g_{yz} - h_{xx} - h_{yy}) \end{aligned}$$

A pesar de la notación infernal, ambas cosas coinciden aplicando que las coordenadas son C^2 y por tanto las derivadas cruzadas coinciden. Para continuar, también debemos probar que el campo r^{-1} es armónico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} r^{-1} &= \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} [r^2]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial r_i} \left(-\frac{1}{2} (r^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial r_i} [r^2] \right) \\ &= \frac{3}{4} (r^2)^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r_i} [r^2] \right)^2 - \frac{1}{2} (r^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} [r^2] \\ &= \frac{3}{4} (r^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 4r_i^2 - \frac{1}{2} (r^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = (r^2)^{-\frac{3}{2}} \left(3(r^2)^{-1} r_i^2 - 1 \right) \\ \Delta r^{-1} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} r^{-1} = (r^2)^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^k \left[3(r^2)^{-1} r_i^2 - 1 \right] \\ &= (r^2)^{-\frac{3}{2}} \left(3(r^2)^{-1} \sum_{i=1}^k [r_i^2] - k \right) = (r^2)^{-\frac{3}{2}} (3 - k) \end{aligned}$$

Concluimos que el campo r^{-1} es armónico solo en dimensión 3, que afortunadamente es en la que estamos. Volviendo al tema que nos incumbía en (1.18), obtenemos que:

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{\hat{u} \times \hat{e}}{r^2} \right) &= -\nabla(\nabla \cdot (\hat{e} r^{-1})) + \nabla^2(\hat{e} r^{-1}) \\ &= \nabla \left(\frac{\hat{e} \cdot \hat{u}}{r^2} \right) + \hat{e} \Delta r^{-1} = \nabla \left(\frac{\hat{e} \cdot \hat{u}}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Juntando (1.19) con (1.17) y aplicando el teorema de Stokes concluimos que:

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \int_C \frac{\hat{e} \cdot (ds \times \hat{u})}{r^2} &= \int_C \frac{\hat{u} \times \hat{e}}{r^2} \cdot ds = \int_S \left(\nabla \times \frac{\hat{u} \times \hat{e}}{r^2} \right) \cdot \vec{n} dS \\ &= \int_S \nabla \left(\frac{\hat{e} \cdot \hat{u}}{r^2} \right) \cdot \vec{n} dS = \int_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{\hat{e} \cdot \hat{u}}{r^2} \right) dS. \end{aligned}$$

Concluimos pues que ambas expresiones son equivalentes.

CAPÍTULO 2

Los potenciales escalares y vectoriales

Para simplificar el trabajo con las ecuaciones (1.11) normalmente se definen unos campos auxiliares que permiten simplificar cuentas. Estos campos, llamados potenciales, son herramientas abstractas en el electromagnetismo clásico, pero al entrar en la mecánica cuántica adquieren significado físico.

2.1. Potencial en el sentido matemático

Desde la formalidad, los potenciales en \mathbb{R}^3 surgen como consecuencia de este teorema:

Teorema 2.1. *Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto, y $\vec{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función $C^2(\mathcal{U})$. Entonces:*

- *Si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ en \mathcal{U} , entonces para cada punto p de \mathcal{U} existe $\phi : V \subset \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, con V entorno de p , tal que $\vec{F} = -\nabla\phi$ en V .*
- *Si $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ en \mathcal{U} , entonces para cada punto p de \mathcal{U} existe $\vec{A} : V \subset \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$ en V entorno de p .*

Demostración. Para el primer caso, sea $p \in \mathcal{U}$. Al ser \mathcal{U} un abierto existe una bola B que contiene a p y está en \mathcal{U} . Esa bolita es conexa por caminos, luego para cada $q \in B$ diseñamos un camino cerrado $\gamma \subseteq B$ que pase por p y q . Entonces, para cualquier superficie $S \subseteq B$ cuya frontera es γ , por el teorema de Stokes $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{n} = \int_S \vec{0} \cdot d\vec{n} = 0$, y como esto es cierto para cualquier camino cerrado, la aplicación

$$f : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

está bien definida independientemente de γ , ya que concatenando dos caminos, uno de ida y otro de vuelta, la integral de uno anula a la del otro. Al ser independiente del camino, tomando uno que avance paralelamente a los ejes (podemos al estar en una bola) esta función cumple por el teorema fundamental del cálculo que $\nabla f = \vec{F}$,

con lo que concluimos el primer punto. Para el segundo, si $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$ es una solución del problema suficientemente regular definida en un abierto, entonces para cualquier función escalar C^1 también se cumple que $\nabla \times (\vec{G} + \nabla f) = \nabla \times \vec{G} + \nabla \times \nabla f = \vec{F} + 0 = \vec{F}$. Esto permite eliminar una coordenada de la solución tomando $\partial_z f = -G_3$. Por tanto, resolver nuestra ecuación $(\nabla \times \vec{G})(q) = \vec{F}(q)$ para $q \in B$ equivale a $F_1 = \partial_z G_2, F_2 = -\partial_z G_1, F_3 = \partial_y G_1 - \partial_x G_2$. Como \vec{F} es como mínimo $C^2(B)$, sobre cualquier compacto $K \subset B$ convexo que incluya a q y un punto de referencia, sus coordenadas son integrables, luego:

$$G_1(x, y, z) = G_1(x, y, z_0) - \int_{z_0}^z F_2(x, y, s) ds,$$

$$G_2(x, y, z) = G_2(x, y, z_0) + \int_{z_0}^z F_1(x, y, s) ds.$$

Podemos elegir un punto (x, y, z_0) en la vertical de (x, y, z) ya que, como B era convexo, podemos suponer que K también lo es. Queda comprobar la condición de F_3 :

$$\begin{aligned} F_3(x, y, z) &= \partial_y G_1(x, y, z_0) - \partial_y \int_{z_0}^z F_2(x, y, s) ds - \partial_x G_2(x, y, z_0) \\ &- \partial_x \int_{z_0}^z F_1(x, y, s) ds = G_{1,y}(x, y, z_0) - G_{2,x}(x, y, z_0) - \int_{z_0}^z F_{2,y}(x, y, s) \\ &+ F_{1,x}(x, y, s) ds = G_{1,y}(x, y, z_0) - G_{2,x}(x, y, z_0) - \int_{z_0}^z -F_{3,z}(x, y, s) ds \\ &= G_{1,y}(x, y, z_0) - G_{2,x}(x, y, z_0) + F_3(x, y, z) - F_3(x, y, z_0). \end{aligned}$$

Entonces, nuestras funciones G_1 y G_2 deben cumplir que $G_{1,y}(x, y, z) - G_{2,x}(x, y, z) = F_3(x, y, z)$. Esta expresión tiene múltiples soluciones. Podemos, por ejemplo, imponer que $G_{1,y} = 0$ e integrar con los términos que quedan, cosa que podemos hacer ya que estamos en un compacto. \square

De acuerdo con la demostración, toda solución es expandible dentro de un convexo. Si nos olvidamos de esta restricción pueden surgir problemas. Por ejemplo, si cogemos $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, t), t \in \mathbb{R}\}$, y $\vec{F} = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2), 0)$, si calculamos el rotacional vemos que:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= (0, 0, -(x^2 + y^2)^{-1} + y(x^2 + y^2)^{-2}(2y) - [(x^2 + y^2)^{-1} - x(x^2 \\ &+ y^2)^{-2}(2x)]) = (0, 0, -2(x^2 + y^2)^{-1} + 2(x^2 + y^2)^{-2}(x^2 + y^2)) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Si tratamos de ver que la \vec{F} sea conservativa, considerando los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$ y dos caminos opuestos a lo largo de $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\cos(t), \sin(t), 0) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 0) dt = \frac{\pi}{2}, \\ \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\cos(t), -\sin(t), 0) \cdot (-\sin(t), -\cos(t), 0) dt = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Luego no se puede obtener el gradiente querido. Para evitar estos problemas, trabajaremos con $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$.

2.2. Potenciales asociados al electromagnetismo

De acuerdo con las ecuaciones (1.11), en \mathbb{R}^3 el campo magnético es *solenoidal* (es decir, tiene divergencia nula), luego existe un *potencial vector* \vec{A} tal que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Para el campo eléctrico podemos partir de la ley de Faraday para obtener

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \times \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \Rightarrow \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \end{aligned}$$

Al campo ϕ se lo conoce como *potencial escalar*. Su valor viene casi determinado al fijar \vec{A} , cosa que veremos a posteriori. por ahora nos importa que si ϕ y A son un potencial escalar y vector para \vec{E} y \vec{B} , entonces para cualquier campo escalar f , $\phi - c^{-1} \partial_t f$ y $\vec{A} + \nabla f$ también lo son. Lo primero ya lo usamos para probar la existencia del potencial magnético, luego queda probar el eléctrico:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \nabla f) - \nabla \left(\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla f - \nabla \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla f \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \end{aligned}$$

A la función f se le dice que da el *gauge*, que se puede interpretar como el calibrado del potencial; en función del contexto se suele tomar una u otra elección del gauge.

2.3. Potenciales en el caso estático

2.3.1. Ecuaciones en caso estático

Si trabajamos con campos que no varían en el tiempo, como $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, \vec{A} tampoco varía en el tiempo, con lo que por (2.1) $\vec{E} = -\nabla \phi$. Bajo estas expresiones la segunda y tercera ecuaciones de (1.11) se reducen a trivialidades, quedando las otras dos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\Delta \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\Delta \phi - 0 = 4\pi\rho, \\ \nabla \times \vec{B} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned}$$

Para simplificar aún más las cosas, nos interesaría que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Tenemos que escoger entonces un gauge que produzca esto, denominado *gauge de Coulomb*, resolviendo $\nabla \cdot (\vec{A} + \nabla f) = 0 \iff \nabla \cdot \nabla f = -\nabla \cdot \vec{A} \iff \Delta f = -\nabla \cdot \vec{A}$. Esta ecuación tiene solución localmente ya que es una ecuación de Poisson en \mathbb{R}^3 . Así, para el caso estático, las ecuaciones quedan como ecuaciones de Poisson:

$$(2.2) \quad \Delta \phi = -4\pi\rho, \quad \nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Lo bueno de estas ecuaciones es que, a diferencia de las expresiones para \vec{E} y \vec{B} , se pueden resolver por separado (están *desacopladas*) y sumar los resultados.

2.3.2. Solución puntual del potencial eléctrico

El caso más sencillo de (2.2) es en el que nuestra carga es puntual. Una carga puntual en un punto a se modela como una δ_a de Dirac con polo en dicho punto, indicado por el subíndice. Una δ de Dirac no es una función, sino una distribución que actúa sobre otras funciones. Dicha actuación se suele escribir como $\langle \delta_a, f \rangle = f(a)$, por lo que las funciones sobre las que actúa solo necesitan estar definidas en a . Sin entrar en muchos detalles de esta teoría, la actuación de una distribución T sobre una función f definida en un conjunto Ω se suele escribir, en la mayoría de los casos informalmente, como $\int_{\Omega} T(x)f(x) dx$. En el caso de la δ de Dirac, queda que $\int_{\Omega} \delta_0(x)f(x) dx = f(0)$. De aquí se suele decir que la δ_0 de Dirac vale 0 fuera del 0 (le quita importancia al resto de valores en la integral) y ∞ en el 0 (hace que la contribución de un solo punto se tenga en cuenta).

Supongamos que nuestra carga está en el 0. entonces entonces [2] simetría radial para la carga, $\phi(\vec{p}) = f(p^2)$, con lo que si $\vec{E} = -\nabla\phi = -2f'(p^2)(x, y, z)$, fuera del 0:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \vec{E} &= (2f'(p^2) + (2x)^2 f''(p^2)) + (2f'(p^2) + (2y)^2 f''(p^2)) + (2f'(p^2) \\ &+ (2z)^2 f''(p^2)) = 6f'(p^2) + 4p^2 f''(p^2) = 0 \iff \frac{d}{dp} [p^3 f'(p^2)] = 0. \end{aligned}$$

Entonces $p^3 f'(p^2) = cte$, por lo que $f'(p^2)$ es una constante K por p^{-3} . Sustituyendo en $\vec{E} = -2f'(p^2)(x, y, z)$, y tomando $K = -\frac{q}{2}$ siendo q la carga en el origen, obtenemos

$$(2.3) \quad \vec{E} = \frac{q}{p^3} \vec{p} = \frac{q}{p^2} \hat{p}$$

donde \hat{p} es \vec{p} unitario. Con esta información, si $[\vec{p}_0, \vec{p}]$ denota el camino en línea recta de \vec{p}_0 a \vec{p} , y ponemos a $[0, \vec{p}, \vec{p}_0]$ en línea recta, luego $\vec{p}_0 = k\vec{p}$:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{p}) &= - \int_{[\vec{p}_0, \vec{p}]} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^1 \vec{E}(\vec{p}t + \vec{p}_0(1-t)) \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0) dt \\ &= - \int_0^1 \vec{E}((k+t(1-k))\vec{p}) \cdot (1-k)\vec{p} dt \\ &= - \int_0^1 \frac{q}{|(k+t(1-k))\vec{p}|^3} (k+t(1-k))\vec{p} \cdot (1-k)\vec{p} dt \\ &= -\frac{q}{p} \int_0^1 \frac{1-k}{(k+t(1-k))^2} dt = \frac{q}{p} [(k+t(1-k))^{-1}] \Big|_0^1 = \frac{q}{p} \left(1 - \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

El punto $\vec{p}_0 = k\vec{p}$ se toma como referencia para el potencial. Si lo mandamos al infinito, entonces el campo eléctrico para $\rho = \delta_0$ es:

$$(2.4) \quad \phi(\vec{p}) = \frac{q}{p}.$$

Se puede comprobar que ϕ cumple exactamente (2.2) cuando $\rho = \delta_0$, es decir, cuando la carga es puntual en el origen. Si la movemos, es decir, si $\rho = \delta_a$, entonces $\phi_a(\vec{p}) = \phi(\vec{p} - a)$

2.3.3. Solución general de potenciales estáticos

La solución general se puede obtener como extensión de la del caso anterior. Para ello, necesitamos definir la convolución de dos funciones como $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy$, la convolución de una distribución T con una función g como $(T * g)(x) = \langle T, g(x - y) \rangle_y$, donde el subíndice indica que T actúa sobre la variable y , y el siguiente lema:

Lema 2.2. *Si f y g son dos funciones $C^2(\mathbb{R}^3)$, entonces $\Delta(f * g) = (\Delta f) * g = f * (\Delta g)$.*

Demostración. Podemos probar con un cálculo la primera igualdad

$$\begin{aligned} \Delta(f * g)(x) &= \Delta \int_{\mathbb{R}^3} f(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(f(x - y)g(y)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} [f(x - y)g(y)] \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x - y) \right) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta f(x - y)g(y) dy. \end{aligned}$$

Para la segunda, si en la definición de convolución hacemos el cambio $u = x - y$,

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} f(x - (x - u))g(x - u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(u)g(x - u) du = (g * f)(x). \end{aligned}$$

Por lo que aplicando conmutatividad y volviendo al paso anterior lo tenemos. \square

Antes hemos visto las soluciones ϕ_a para el caso base $\rho = \delta_a$. Para una densidad ρ cualquiera, sea $\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_y(x)\rho(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_0(x - y)\rho(y) dy = (\phi_0 * \rho)(x)$. Aplicando el lema anterior y la conmutatividad de la convolución, y saltándonos algunos formalismos de teoría de distribuciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} (\Delta\phi)(x) &= \Delta(\phi_0 * \rho)(x) = ((\Delta\phi_0) * \rho)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\phi_0)(x - y)\rho(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\phi_0)(y)\rho(x - y) dy = -4\pi \langle \delta_0, \rho(x - y) \rangle_y = -4\pi\rho(x), \end{aligned}$$

con lo que nuestra solución general es:

$$(2.5) \quad \phi(\vec{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_0(\vec{p} - \vec{s})\rho(\vec{s}) d\vec{s} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{s})}{|\vec{p} - \vec{s}|} d\vec{s}.$$

Teniendo esto podemos resolver el potencial magnético también, ya que si igualamos cada coordenada $\Delta A_i(\vec{p}) = 4\pi c^{-1} j_i(\vec{p})$, $i = 1, 2, 3$, que es de nuevo una ecuación de Poisson unidimensional. Teniendo en cuenta la solución encontrada anteriormente, si combinamos la solución para cada coordenada:

$$(2.6) \quad \vec{A}(\vec{p}) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{s})}{|\vec{p} - \vec{s}|} d\vec{s}.$$

Nótese que no estamos multiplicando escalarmente los vectores $\vec{j}(\vec{s})$ y $d\vec{s}$ como en los casos anteriores. Ese detalle lo usaremos para distinguir las integrales de línea o superficie de las que son coordenada a coordenada.

2.3.4. Estimación del potencial electrostático

Una suposición común en las densidades ρ y \vec{j} es suponer que están concentradas en el origen cuando se calculan los potenciales lejos del mismo, suponiendo que se anulan a partir de cierta distancia ε . Entonces $f(\vec{s}) = |\vec{p} - \vec{s}|^{-1}$ pasa a ser $C^\infty(\{s \leq \varepsilon\})$ al exigir $p > \varepsilon$, y podemos aproximar f ahí por un polinomio de Taylor centrado en el origen. Aproximando por uno de orden 1 [7], al ser C^∞ $f(\vec{s}) = f(0) + \vec{s} \cdot \nabla f(0) + O(s^2)$. Echando cuentas para nuestra f :

$$\frac{\partial}{\partial s_i} f(\vec{s}) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq j \leq 3} (p_j - s_j)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} 2(p_i - s_i)(-1) = \frac{p_i - s_i}{|\vec{p} - \vec{s}|^3} \Rightarrow \nabla f(\vec{s}) = \frac{\vec{p} - \vec{s}}{|\vec{p} - \vec{s}|^3},$$

por lo que el polinomio queda:

$$\frac{1}{|\vec{p} - \vec{s}|} = |\vec{p}|^{-1} + \vec{s} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|^3} + o(s^3) = \frac{1}{p} + \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{p^3} + o(s^3).$$

Veamos qué pasa si aproximamos ϕ con Taylor y nuestra suposición:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{s}) &\approx \int_{\{s \leq \varepsilon\}} \rho(\vec{s}) \left(\frac{1}{p} + \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{p^3} \right) d\vec{s} = \frac{1}{p} \int_{\{s \leq \varepsilon\}} \rho(\vec{s}) d\vec{s} + \frac{1}{p^3} \int_{\{s \leq \varepsilon\}} \rho(\vec{s}) (\vec{s} \cdot \vec{p}) d\vec{s} \\ &= \frac{Q}{p} + \frac{p}{p^3} \cdot \int_{\{s \leq \varepsilon\}} \rho(\vec{s}) \vec{s} d\vec{s} = \frac{Q}{p} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{p}}{p^3} \end{aligned}$$

donde $Q = \int_{\{s \leq \varepsilon\}} \rho(\vec{s}) d\vec{s}$ y $\vec{d} = \int_{\{s \leq \varepsilon\}} \rho(\vec{s}) \vec{s} d\vec{s}$. Q es la carga total encerrada en la región $\{s \leq \varepsilon\}$, y a \vec{d} se lo conoce como *momento dipolar eléctrico*. El primer término de la expresión aproxima el campo como si fuera una carga puntual, y el segundo término representa al campo inducido por un dipolo eléctrico.

2.3.5. Estimación del potencial magnetostático

En el caso del campo magnético, repitiendo el proceso obtenemos estos términos para las aproximaciones de orden 0 y 1:

$$\int_{\{s \leq \varepsilon\}} \vec{j}(\vec{s}) d\vec{s} \quad \int_{\{s \leq \varepsilon\}} (\vec{p} \cdot \vec{s}) \vec{j}(\vec{s}) d\vec{s}.$$

La primera integral para empezar es nula, y para verlo recordamos la ecuación (1.10). En el caso magnetostático la intensidad de corriente es constante, lo que significa que la densidad de carga por unidad de sección del conductor no varía en el tiempo, es

decir $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, con lo que $\nabla \cdot \vec{j} = 0$. Veamos entonces qué pasa si calculamos $\nabla \cdot (s_i \vec{j}(\vec{s}))$ para $i = 1, 2, 3$:

$$\nabla \cdot (s_i \vec{j}(\vec{s})) = \sum_{1 \leq n \leq 3} (\mathbb{1}_{i=n} j_n(\vec{s}) + s_i (j_n)_{s_n}(\vec{s})) = j_i(\vec{s}) + s_i \sum_{1 \leq n \leq 3} \frac{\partial}{\partial s_n} j_n(\vec{s}) = j_i(\vec{s})$$

donde $\mathbb{1}_{i=n} = 1$ si $i = n$, y 0 en otro caso. Observamos entonces que $\vec{j}(\vec{s}) = (\nabla \cdot (s_i \vec{j}(\vec{s})))_{1 \leq i \leq 3}$. Aplicando dicha igualdad, ya podemos resolver la integral coordenada a coordenada:

$$\int_{\{s \leq \varepsilon\}} j_i(\vec{s}) d\vec{s} = \int_{\{s \leq \varepsilon\}} \nabla \cdot (s_i \vec{j}(\vec{s})) d\vec{s} = \int_{\{s = \varepsilon\}} s_i \vec{j}(\vec{s}) \cdot d\vec{n} = 0.$$

La densidad de corriente sobre la superficie es 0 ya que la carga magnética y eléctrica se mantiene concentrada cerca del origen. Para la aproximación de orden 1, invocando la igualdad $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ sobre $(\vec{p} \cdot \vec{s})\vec{j}(\vec{s})$, obtenemos que:

$$(2.7) \quad (\vec{p} \cdot \vec{s})\vec{j}(\vec{s}) = \vec{s}(\vec{p} \cdot \vec{j}(\vec{s})) - \vec{p} \times (\vec{s} \times \vec{j}(\vec{s})).$$

Veamos qué pasa integrando la n -ésima coordenada del primer término:

$$\begin{aligned} \int_{\{s \leq \varepsilon\}} s_n \sum_{1 \leq i \leq 3} p_i j_i(\vec{s}) d\vec{s} &= \sum_{1 \leq i \leq 3} p_i \int_{\{s \leq \varepsilon\}} s_n (\nabla \cdot (s_i \vec{j}(\vec{s}))) d\vec{s} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 3} p_i \left(\int_{\{s = \varepsilon\}} s_n s_i \vec{j}(\vec{s}) \cdot d\vec{n} - \int_{\{s \leq \varepsilon\}} s_i \vec{j}(\vec{s}) \cdot \nabla s_n d\vec{s} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 3} p_i \left(0 - \int_{\{s \leq \varepsilon\}} s_i j_n(\vec{s}) d\vec{s} \right) = - \sum_{1 \leq i \leq 3} p_i \int_{\{s \leq \varepsilon\}} s_i j_n(\vec{s}) d\vec{s} \\ &= - \int_{\{s \leq \varepsilon\}} j_n(\vec{s}) \left(\sum_{1 \leq i \leq 3} p_i s_i \right) d\vec{s} = - \int_{\{s \leq \varepsilon\}} j_n(\vec{s}) (\vec{p} \cdot \vec{s}) d\vec{s}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\int_{\{s \leq \varepsilon\}} \vec{s}(\vec{p} \cdot \vec{j}(\vec{s})) d\vec{s} = - \int_{\{s \leq \varepsilon\}} (\vec{s} \cdot \vec{p}) \vec{j}(\vec{s}) d\vec{s}$, por lo que integrando (2.7):

$$\int_{\{s \leq \varepsilon\}} \vec{s}(\vec{p} \cdot \vec{j}(\vec{s})) d\vec{s} = -\frac{1}{2} \int_{\{s \leq \varepsilon\}} \vec{p} \times (\vec{s} \times \vec{j}(\vec{s})) d\vec{s} = \frac{1}{2} \int_{\{s \leq \varepsilon\}} (\vec{s} \times \vec{j}(\vec{s})) \times \vec{p} d\vec{s}.$$

Como estamos integrando coordenada por coordenada:

$$\int_{\{s \leq \varepsilon\}} \vec{s}(\vec{p} \cdot \vec{j}(\vec{s})) d\vec{s} = \left(\frac{1}{2} \int_{\{s \leq \varepsilon\}} (\vec{s} \times \vec{j}(\vec{s})) d\vec{s} \right) \times \vec{p} = \vec{\mu} \times \vec{p}$$

Concluimos entonces que:

$$(2.8) \quad \vec{A}(\vec{p}) \approx \frac{\mu \times \vec{p}}{r^3}.$$

Donde $\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int_{\{s \leq \varepsilon\}} (\vec{s} \times \vec{j}(\vec{s})) d\vec{s}$ se conoce como *momento dipolar magnético*. Físicamente, esta aproximación modela el campo magnético generado por el flujo \vec{j} como el generado por un dipolo magnético de momento dipolar dado por $\vec{\mu}$.

2.4. Ondas electromagnéticas

Otro caso a parte de la electrostática y magnetostática es el de los campos en el vacío. Si introducimos en las ecuaciones de Maxwell en el vacío dadas por (1.1) los resultados de 2.2, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} - \Delta \phi = 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right] = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi \\ &\Rightarrow \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0.\end{aligned}$$

Para seleccionar el gauge, forzamos $\nabla \cdot \vec{A} + c^{-1} \partial_t \phi = 0$. A este gauge se lo conoce como *gauge de Lorentz*. Con este gauge, se obtiene que $c^{-2} \partial_t^2 \phi - \Delta \phi = 0$ y $c^{-2} \partial_t^2 \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = 0$. Compactando las ecuaciones con el *operador de D'Alambert* $\square = c^{-1} \partial_t^2 - \Delta$, concluimos que los potenciales ahora cumplen:

$$(2.9) \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = 0, \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} = 0.$$

Vamos a estudiar un caso particular, el de las *ondas planas*: una onda u , que se propaga en \mathbb{R}^3 en una dirección dada por \hat{k} , llamado *vector de ondas*, con velocidad c , modelada como $u(\vec{r}, t) = \sin(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct)$. Se llama así ya que sus frentes de onda son planos normales al vector de ondas: si $\hat{k} \perp \vec{r} = 0$, la onda va a valer lo mismo a tiempo fijo. Veamos que esta onda se anula al aplicarle el operador de D'Alambert:

$$\begin{aligned}\square u &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sin(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) \right] - \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} \left[\sin \left(\sum_{1 \leq j \leq 3} k_j r_j - ct \right) \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[-c \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) \right] - \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{\partial}{\partial r_i} \left[k_i \cos \left(\sum_{1 \leq j \leq 3} k_j r_j - ct \right) \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \left(-c^2 \sin(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) \right) + \sum_{1 \leq i \leq 3} k_i^2 \sin \left(\sum_{1 \leq j \leq 3} k_j r_j - ct \right) \\ &= -\sin(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) + \sin(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) \left(\sum_{1 \leq i \leq 3} k_i^2 \right) = 0\end{aligned}$$

Entonces tiene sentido pensar en nuestra onda plana como un potencial eléctrico o una coordenada del magnético en el vacío. Pongamos por caso que nuestro potencial magnético es $\vec{A}(\vec{r}, t) = \mathcal{V} u(\vec{r}, t)$, donde \mathcal{V} es un vector fijo. Entonces por el gauge de Lorentz obtendríamos que:

$$(2.10) \quad \begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi &= -\mathcal{V} \cdot \nabla u = - \sum_{1 \leq i \leq 3} \mathcal{V}_i k_i \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) = -(\mathcal{V} \cdot \hat{k}) \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) \Rightarrow \\ \phi(\vec{r}, t) &= \int -c (\mathcal{V} \cdot \hat{k}) \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - cs) ds = (\mathcal{V} \cdot \hat{k}) \sin(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) + C\end{aligned}$$

Tomando $C = 0$ tenemos que $\phi = (\mathcal{V} \cdot \hat{k}) u$, luego calculando los campos obtendríamos que:

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \nabla \times (\mathcal{V}u) = (\mathcal{V}_z u_y - \mathcal{V}_y u_z, \mathcal{V}_x u_z - \mathcal{V}_z u_x, \mathcal{V}_y u_x - \mathcal{V}_x u_y) \\
 &= (\mathcal{V}_z k_y - \mathcal{V}_y k_z, \mathcal{V}_x k_z - \mathcal{V}_z k_x, \mathcal{V}_y k_x - \mathcal{V}_x k_y) \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) \\
 &= (\hat{k} \times \mathcal{V}) \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) \\
 \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi = -\frac{1}{c} \mathcal{V} \frac{\partial u}{\partial t} - (\mathcal{V} \cdot \hat{k}) \nabla u \\
 &= \mathcal{V} \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) - (\mathcal{V} \cdot \hat{k}) k \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) = (\mathcal{V} - \mathcal{V} \cdot \hat{k}) \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) \\
 &= ((\hat{k} \times \mathcal{V}) \times \hat{k}) \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct)
 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que:

$$(2.11) \quad \vec{B} = (\hat{k} \times \mathcal{V}) \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) \quad \vec{E} = ((\hat{k} \times \mathcal{V}) \times \hat{k}) \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - ct)$$

Obsérvese que tanto \vec{E} como \vec{B} son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda \hat{k} como entre sí, además de ser periódicas con período $2\pi c^{-1}$. Esto explica por qué las ondas electromagnéticas se suelen representar con dos gráficas sinusoidales perpendiculares entre sí a lo largo de un eje, que es de hecho el indicado por \hat{k} desde el origen de la onda.

CAPÍTULO 3

La formulación relativista

La relatividad especial surgió para solucionar aparentes contradicciones entre el electromagnetismo y la relatividad de Galileo. Por ejemplo, un observador en movimiento relativo de velocidad v respecto a otro mediría la velocidad de la luz como $c - v$ según la clásica, mientras que sabemos por las ecuaciones de Maxwell que c es constante en el vacío. Ahora profundizaremos en dicha relación, y en qué sentido la relatividad especial resuelve estas contradicciones.

3.1. Las transformaciones de Lorentz

Supongamos que un observador O' se mueve a velocidad v a lo largo del eje X respecto a otro observador O . Las transformaciones de Lorentz nos dicen cómo debe medir O' la posición y el tiempo, x' y t' , respecto a las mediciones de O , x y t . Estas son:

$$(3.1) \quad x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad \text{con } \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Lo más importante es que ahora el tiempo que tarda un suceso en ocurrir depende del observador del mismo. Estas transformaciones, además, solo son significativas cuando nos movemos a grandes velocidades; si $v \ll c$ las ecuaciones se reducen a las de relatividad de Galileo. Si bien es cierto que Lorentz introdujo estas transformaciones, fue Einstein el primero en darle un significado físico, y Minkowski el que introdujo la noción de *espacio-tiempo* considerando las transformaciones como isometrías en un espacio tetradimensional.

De acuerdo con Minkowski, nuestro observador en reposo O es un sistema de referencia \mathcal{R} en \mathbb{R}^4 de medidas dadas por *cuadrivectores* $s = (ct, \vec{x})$, donde $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ es la ubicación espacial y ct representa la coordenada temporal, con unidades que hacen que las 4 coordenadas sean espaciales. Además, ahora O' es un sistema de referencia \mathcal{R}' con velocidad v respecto a O solo en el eje X . En forma matricial las transformaciones de Lorentz quedan:

$$(3.2) \quad s' = Ls, \quad L = \begin{bmatrix} M & O \\ O & I \end{bmatrix}, \quad \text{con } M = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{bmatrix}.$$

Así es como O' debería obtener sus mediciones a partir de los datos de O . Veamos cómo debería ser a la inversa:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} & O \\ O & I \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \gamma^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \dots = \gamma \begin{bmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{bmatrix}.$$

Concluimos que:

$$(3.3) \quad s = L^{-1}s', \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} & O \\ O & I \end{bmatrix}, \quad \text{con } M^{-1} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2. Transformaciones de Lorentz en el electromagnetismo

En el contexto del electromagnetismo, considerar espacio y tiempo como parte de una misma cosa lleva a formular los potenciales como parte de un único *cuadripotencial* $A = (\phi, \vec{A})$. Entonces, si nuestro observador \mathcal{R} mide un potencial A , al ser nuestra transformación lineal, \mathcal{R}' medirá un potencial LA . Ahora bien, $A = A(s)$, y la medida la estamos haciendo desde \mathcal{R} , y \mathcal{R}' querrá medir A con sus propias medidas, luego:

$$(3.4) \quad A(s) \longrightarrow A'(s') = LA(L^{-1}s').$$

De esta transformación podemos demostrar lo siguiente, que es muy importante en el ámbito de la relatividad:

Teorema 3.1. *La transformación de Lorentz para el electromagnetismo cumple estas propiedades:*

- *Deja invariantes las ecuaciones de onda. Es decir, si $u = u(t, x)$ es solución de $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$, entonces $w = w(t', x') = u(t, x)$ con las coordenadas transformadas por Lorentz, es solución de $c^2 w_{x'x'} - w_{t't'} = 0$.*
- *Preserva las ecuaciones de Maxwell en el vacío en el sentido de que si A cumple el gauge de Lorentz y $\square A = 0$, A' también.*

Demostración. Para la primera hay que expresar las derivadas en términos de las de u :

$$\begin{aligned} u(t, x) = w(\gamma(t - vx/c^2), \gamma(x - vt)) &\implies u_t = \gamma w_{t'} - v\gamma w_{x'} = \gamma(w_{t'} - vw_{x'}), \\ u_{tt} &= \gamma^2[(w_{t't'} + v^2 w_{x'x'}) - v(w_{t'x'} + w_{x't'})] \\ u_x &= -\gamma(v/c^2)w_{t'} + \gamma w_{x'} = \gamma[-(v/c^2)w_{t'} + w_{x'}] \implies \\ u_{xx} &= \gamma^2[(v/c^2)^2 w_{t't'} + w_{x'x'} - (v/c^2)(w_{t'x'} + w_{x't'})] \\ c^2 u_{xx} - u_{tt} &= \gamma^2[(v^2/c^2)w_{t't'} + c^2 w_{x'x'} - v(w_{t'x'} + w_{x't'}) \\ &\quad - ((w_{t't'} + v^2 w_{x'x'}) - v(w_{t'x'} + w_{x't'}))] \\ &= \gamma^2[(v^2/c^2 - 1)w_{t't'} + (c^2 - v^2)w_{x'x'}] = c^2 w_{x'x'} - w_{t't'} = 0. \end{aligned}$$

Para la segunda, primero hay que ver cómo escribir el gauge de Lorentz para cuadvectores. Si $T = ct$ y $\mathcal{D}_s A(s)$ denota el diferencial de A en s , entonces $A(s) = A(T, \vec{x}) = (\phi(T, \vec{x}), \vec{A}(T, \vec{x})) \Rightarrow \text{Tr}(\mathcal{D}_s A(T, \vec{x})) = \phi_T + (\vec{A}_x)_1 + (\vec{A}_y)_2 + (\vec{A}_z)_3 = c^{-1}\phi_t + \nabla \cdot \vec{A} = 0$, con lo que A respeta el gauge de Lorentz si y solo si $\text{Tr}(\mathcal{D}_s A(s)) = 0$. Si calculamos ahora para A' , como $L^{-1}s = L^{-1}(T, x, y, z) = (\gamma(T + vx/c), \gamma(vT/c + x), y, z)$:

$$\mathcal{D}_s A'(s) = \mathcal{D}_s L A(L^{-1}s) = \gamma \mathcal{D}_s \begin{bmatrix} \phi(L^{-1}s) \\ -(v/c)\phi(L^{-1}s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathcal{D}_s \begin{bmatrix} -\gamma(v/c)A_1(L^{-1}s) \\ \gamma A_1(L^{-1}s) \\ A_2(L^{-1}s) \\ A_3(L^{-1}s) \end{bmatrix}.$$

Si escribimos los diferenciales de arriba como $\gamma \mathcal{D}_s \xi + \mathcal{D}_s \rho$, los sumandos que interesan para la traza son:

$$\begin{aligned} (\xi_1)_T &= \gamma[\phi_T + (v/c)\phi_x], & (\xi_2)_x &= -\gamma(v/c)[(v/c)\phi_T + \phi_x], \\ (\rho_1)_T &= -\gamma^2(v/c)[(A_1)_T + (v/c)(A_1)_x], & (\rho_2)_x &= \gamma^2[(v/c)(A_1)_T + (A_1)_x], \\ (\rho_3)_y &= (A_2)_y, & (\rho_4)_z &= (A_3)_z \Rightarrow \\ \text{Tr}(\mathcal{D}_s A'(s)) &= \gamma^2[\phi_T + (v/c)\phi_x - (v/c)^2\phi_T - (v/c)\phi_x - (v/c)(A_1)_T + (v/c)^2(A_1)_x \\ &\quad + (v/c)(A_1)_T - (A_1)_x] + (A_2)_y + (A_3)_z \\ &= \gamma^2[(1 - (v/c)^2)\phi_T + (1 - (v/c)^2)(A_1)_x] + (A_2)_y + (A_3)_z \\ &= \phi_T + (A_1)_x + (A_2)_y + (A_3)_z = c^{-1}\phi_t + \nabla \cdot \vec{A} = 0. \end{aligned}$$

Cumpléndose el gauge de Lorentz, comprobamos que $\square A' = 0$:

$$\begin{aligned} \square A' &= \square L A(L^{-1}s) = L \begin{bmatrix} \square \phi(L^{-1}s) \\ \square \vec{A}(L^{-1}s) \end{bmatrix} \Rightarrow \square \phi(L^{-1}s) = \left(c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi \\ &= c^{-2} \frac{\partial}{\partial t} (\gamma c \phi_T + \gamma v \phi_x) - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\gamma(v/c)\phi_T + \gamma \phi_x) + \phi_{yy} + \phi_{zz} \right] \\ &= c^{-2} \gamma [c(\gamma c \phi_{TT} + \gamma v \phi_{Tx}) + v(\gamma c \phi_{xT} + \gamma v \phi_{xx}) \\ &\quad - (\gamma(v/c)[\gamma(v/c)\phi_{TT} + \gamma \phi_{Tx}] + \gamma[\gamma(v/c)\phi_{xT} + \gamma \phi_{xx}] + \phi_{yy} + \phi_{zz}] \\ &= \dots = \phi_{TT} - \phi_{xx} - \phi_{yy} - \phi_{zz} = c^{-2} \phi_{tt} - \nabla \phi = \square \phi = 0. \end{aligned}$$

Las cuentas para las otras 3 coordenadas son iguales con el potencial vector. \square

3.3. El campo eléctrico de una carga en movimiento

Veamos cómo afecta esto a mediciones del campo eléctrico: supongamos que tenemos una carga q que se mueve a velocidad v sobre el eje x . Tenemos dos observadores, \mathcal{R} y \mathcal{R}' , estando el segundo sobre la carga. Entonces \mathcal{R}' mide el campo eléctrico como $\vec{E}(s') = q\vec{r}'/(r')^3$ con $\vec{r}' = (x', y', z')$ al percibir la carga como estática. Bajo la relatividad de Galileo, podemos pensar que \mathcal{R} mediría el campo eléctrico como $\vec{E}_f(s) = q\vec{r}/r^3$ con $\vec{r} = (x - vt, y, z)$. Veamos que esto, no obstante, es incoherente con (1.1): Para empezar, al ser una carga en movimiento para \mathcal{R} , debería generar un campo magnético tal que:

$$\nabla \times \vec{B}_f = c^{-1} \partial_t \vec{E}_f = (q/c) \partial_t (r^{-3}(x - vt), r^{-3}y, r^{-3}z)$$

$$= (q/c) (3vr^{-5}(x-vt)^2 - vr^{-3}, 3vr^{-5}(x-vt)y, 3vr^{-5}(x-vt)z).$$

Vemos que este campo es variable con el tiempo, luego por la tercera ley de Maxwell $\nabla \times \vec{E}_f \neq 0$. No obstante:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}_f &= \nabla \times q((x-vt)r^{-3}, yr^{-3}, zr^{-3}) \\ &= -q(y\partial_z r^{-3} - z\partial_y r^{-3}, z\partial_x r^{-3} - (x-vt)\partial_z r^{-3}, (x-vt)\partial_y r^{-3} - y\partial_x r^{-3}), \\ &= 3q(r^2)^{-\frac{5}{2}}(yz - zy, z(x-vt) - (x-vt)z, (x-vt)y - y(x-vt)) = 0. \end{aligned}$$

Lo que da lugar a una contradicción. Veamos qué pasa con las transformaciones de Lorentz. Para \mathcal{R}' , al ver la carga estática, su cuatripotencial es $A'(s') = (q/r', 0, 0, 0)$. Si aplicamos (3.4):

$$A(s) = L^{-1}A'(Ls) = LA' \left(\begin{bmatrix} \gamma[T - vx/c] \\ \gamma[vT/c - x] \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = L \begin{bmatrix} q\xi^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma q\xi^{-\frac{1}{2}} \\ \gamma(v/c)q\xi^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donde $\xi = \gamma^2(tv - x)^2 + y^2 + z^2$. Teniendo el cuatrivector de los potenciales, podemos calcular el campo eléctrico \vec{E} medido por \mathcal{R} por (2.1):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \gamma(v/c)q\xi^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \nabla (\gamma q\xi^{-\frac{1}{2}}) = -\gamma q \left(\frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \xi^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \nabla (\xi^{-\frac{1}{2}}) \right) \\ &= -\gamma q \left(\frac{v}{c^2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\xi^{-\frac{3}{2}} 2\gamma^2(tv-x)v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\xi^{-\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} -2\gamma^2(tv-x) \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} \right) \\ &= \gamma q \xi^{-\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \gamma^2(tv-x)(v/c)^2 - \gamma^2(tv-x) \\ y \\ z \end{bmatrix} = \gamma q \xi^{-\frac{3}{2}} \vec{r} \\ &= \frac{\gamma q \vec{r}}{(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\gamma^{-2} q \vec{r}}{((x-vt)^2 + \gamma^{-2}(y^2 + z^2))^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\gamma^{-2} q \vec{r}}{((x-vt)^2 + (1 - (v/c)^2)(y^2 + z^2))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\gamma^{-2} q \vec{r}}{(r^2 - (v/c)^2(y^2 + z^2))^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Concluimos que el campo eléctrico \vec{E} que observa un observador \mathcal{R} que ve una carga q moverse a velocidad constante v por el eje X es:

$$(3.5) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\gamma^{-2} q \vec{r}}{(r^2 - (v/c)^2(y^2 + z^2))^{\frac{3}{2}}}, \quad \vec{r} = (x - vt, y, z).$$

Veamos cómo afecta la relatividad al campo eléctrico comparando las mediciones dadas por (3.5) y por \vec{E}_f : denominando $\xi = r^2 - (v/c)^2(y^2 + z^2)$, estudiamos el cociente $\|\vec{E}(\vec{r})\|/\|\vec{E}_f(\vec{r})\|$ reescalado por medio de

$$\Gamma(\vec{r}) = \left(\gamma^2 \frac{\|\vec{E}(\vec{r})\|}{\|\vec{E}_f(\vec{r})\|} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{r^2}{\xi} \Rightarrow \nabla \Gamma(\vec{r}) = \xi^{-2} 2 \begin{bmatrix} (x-vt)(\xi - r^2) \\ y(\xi - \gamma^{-2}r^2) \\ z(\xi - \gamma^{-2}r^2) \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \iff \begin{bmatrix} (x-vt)(-(v/c)^2(y^2+z^2)) \\ y(r^2(v/c)^2 - (v/c)^2(y^2+z^2)) \\ z(r^2(v/c)^2 - (v/c)^2(y^2+z^2)) \end{bmatrix} = 0 &\iff \begin{bmatrix} -(x-vt)(y^2+z^2) \\ y(x-vt)^2 \\ z(x-vt)^2 \end{bmatrix} = 0 \\ \iff x = vt, \text{ o bien } \begin{bmatrix} -y^2 - z^2 \\ y(x-vt) \\ z(x-vt) \end{bmatrix} = 0 &\iff y = z = 0 \end{aligned}$$

Tenemos entonces el plano (vt, y, z) y la recta $(x, 0, 0)$ como extremales. Vemos que, en cada caso:

$$\begin{aligned} x = vt \Rightarrow \vec{r} = (0, y, z) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\gamma^{-2}q\vec{r}}{(\gamma^{-2}(y^2+z^2))^{\frac{3}{2}}} = \gamma \frac{q\vec{r}}{r^3} = \gamma \vec{E}_f(\vec{r}) \\ y = z = 0 \Rightarrow \vec{r} = (x-vt, 0, 0) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\gamma^{-2}q\vec{r}}{r^3} = \gamma^{-2} \vec{E}_f(\vec{r}) \end{aligned}$$

Deducimos entonces que, a medida que aumentamos la velocidad del observador \mathcal{R}' , en el plano normal a la dirección del movimiento del mismo en $x = vt$ el campo aumenta, mientras que en la misma dirección el campo disminuye cuadráticamente con respecto a la Ley de Coulomb.

3.4. Dedución de las transformaciones desde el electromagnetismo

Si bien es cierto que Lorentz dedujo sus transformaciones en base a la teoría electromagnética, aquí vamos a seguir aproximadamente los razonamientos de [9] en una versión unidimensional: consideremos los campos $\vec{E}(x, t) = (0, E(x, t), 0)$ y $\vec{B}(x, t) = (0, 0, B(x, t))$. Entonces las ecuaciones (1.1) quedan $\nabla \times \vec{E} = (0, 0, -E_x) = -c^{-1}(0, 0, B_t) \Rightarrow E_x = c^{-1}B_t$, y $\nabla \times \vec{B} = (0, B_x, 0) = c^{-1}(0, E_t, 0) \Rightarrow B_x = c^{-1}E_t$, es decir:

$$(3.6) \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Si tenemos un observador \mathcal{R} que mide x, t y otro \mathcal{R}' que se mueve a velocidad v respecto a \mathcal{R} por el eje X que mide x', t' , por la ley de la inercia esperamos que las transformaciones de x a x' y de t a t' sean lineales:

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Cx + Dt.$$

Como \mathcal{R}' va a velocidad v , al sustituir $x = vt$ debemos obtener $x' = 0 \Rightarrow t(Av + B) = 0 \Rightarrow B = -Av$. Igualmente, para \mathcal{R}' el primer observador va a velocidad $-v$ luego sustituyendo $x' = -vt'$ debemos obtener $x = 0 \Rightarrow t' = Dt \Rightarrow -vt' = -vDt = Bt \Rightarrow t(B + vD) = 0 \Rightarrow D = -B/v = -(-Av)/v = A$, con lo que:

$$x' = A(x - vt), \quad t' = Cx + At.$$

Para despejar la C hay que aplicar un argumento de simetría: si en un instante t \mathcal{R} mide dos puntos x_1 y x_2 , entonces \mathcal{R}' medirá que dichos puntos se separan por

$x'_1 - x'_2 = A(x_1 - x_2)$. Es de esperar que, al ser esto relativo, si es \mathcal{R}' el que toma las medidas a tiempo t' , \mathcal{R} mida una separación $A(x'_1 - x'_2)$. Es decir, que si despejásemos x en función de x' y t' el coeficiente de x' sea A . Imponiendo esto y desarrollando:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' = A(x - vt) \\ t' = Cx + At \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = x'/A + vt \\ x = (t' - At)/C \end{cases} \Rightarrow t' - At = Cx'/A + Cvt \\ &\Rightarrow t(Cv + A) = t' - Cx'/A \Rightarrow x = x'/A + v \frac{t' - Cx'/A}{Cv + A} \\ &= x' \frac{1 - Cv/(Cv + A)}{A} + t' \frac{v}{Cv + A} \Rightarrow A = \frac{1}{A} \left(1 - \frac{Cv + A - A}{Cv + A} \right) \\ &= \frac{1}{A} \frac{A}{Cv + A} = \frac{1}{Cv + A} \Rightarrow A^2 + ACv - 1 = 0 \Rightarrow C = \frac{1 - A^2}{Av}. \end{aligned}$$

Renombrando muy apropiadamente A como γ queda que:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} x + \gamma t.$$

Veamos cómo quedan las ecuaciones de Maxwell unidimensionales con estos cambios de variable:

$$\gamma \frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} \frac{\partial E}{\partial t'} = -\frac{\gamma v}{c} \frac{\partial B}{\partial x'} + \frac{\gamma}{c} \frac{\partial B}{\partial t'}, \quad \gamma \frac{\partial B}{\partial x'} + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} \frac{\partial B}{\partial t'} = -\frac{\gamma v}{c} \frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{\gamma}{c} \frac{\partial E}{\partial t'}.$$

Agrupando términos por derivadas obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\gamma E + \frac{\gamma v}{c} B \right) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\gamma B - \frac{c - c\gamma^2}{\gamma v} E \right), \\ \frac{\partial}{\partial x'} \left(\gamma B + \frac{\gamma v}{c} E \right) &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\gamma E - \frac{c - c\gamma^2}{\gamma v} B \right). \end{aligned}$$

Para que se cumpla (3.6) para \mathcal{R}' deberíamos obtener que $E' = \gamma E + \gamma v c^{-1} B$ y que $B' = \gamma B + \gamma v c^{-1} E$. Para que esto cuadre con los términos de la derecha, debemos tener esta igualdad para γ :

$$\frac{\gamma v}{c} = -\frac{c(1 - \gamma^2)}{\gamma v} \Rightarrow \gamma^2 v^2 = c^2(\gamma^2 - 1) \Rightarrow \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - (v/c)^2}.$$

Vemos que el factor γ que hace que se respeten las ecuaciones de Maxwell es justamente el de (3.1).

3.5. Las transformaciones desde la fuerza de Lorentz

En este apartado seguiremos las explicaciones de [10] para mostrar que se puede deducir (3.4) únicamente a partir de la fuerza de Lorentz aplicada a monopolos eléctricos y magnéticos. Para un monopolo eléctrico de carga q o magnético de carga g , sus fuerzas de Lorentz son, respectivamente:

$$(3.7) \quad \vec{F}_q = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad \vec{F}_g = g \left(\vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} \right).$$

Donde \vec{v} es la velocidad del monopolo. Volvamos a nuestra configuración con los campos $\vec{E}(x, t) = (0, E(x, t), 0)$ y $\vec{B}(x, t) = (0, 0, B(x, t))$. Supongamos que un monopolo eléctrico se mueve a velocidad v por el eje X . Sin el campo eléctrico, entonces dicha carga se verá afectada por $\vec{F}_q = (q/c)(0, -vB, 0)$ y por tanto si tiene masa m experimentará una aceleración $\vec{a} = (-qv/cm)(0, B, 0)$ constante y perpendicular a su movimiento, luego es una aceleración normal al mismo, con lo que el monopolo describe una circunferencia de radio $R = v^2/(qvB/cm) = vcm/qB$. A este radio se le llama *radio de Lamor* o *girorradio*. Para que la carga siga un movimiento rectilíneo necesitamos cancelar dicha desviación, pudiendo hacerse esto por un campo eléctrico en el eje Y : $\vec{F}_q + \vec{F}_e = q((0, (-v/c)B, 0) + \vec{E}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = (0, (v/c)B, 0)$, que en nuestra configuración es la expresión $E = (v/c)B$. A la velocidad v se la llama *velocidad de deriva*. Para nuestro monopolo eléctrico q nuestra velocidad de deriva v_q es:

$$(3.8) \quad \frac{v_q}{c} = \frac{E}{B}.$$

Si repetimos las cuentas pero para nuestro monopolo magnético, al solo cambiar un signo en la expresión de la fuerza lo que cambiará es el sentido de la rotación, además de que será sobre el plano XZ , lo que hará que nuestro campo \vec{B} mantenga la configuración que tenemos en el eje Z para cancelar la rotación, dando lugar a una velocidad de deriva magnética v_g dada por:

$$(3.9) \quad \frac{v_g}{c} = \frac{B}{E}.$$

Supongamos ahora que tenemos un sistema de referencia \mathcal{R}' que se mueve a velocidad v' por el eje X , manteniendo nuestra configuración de los campos \vec{E} y \vec{B} . Suponemos un modelo lineal en el que \mathcal{R}' mide E' y B' como combinación lineal de E y B :

$$(3.10) \quad \begin{bmatrix} E' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ B \end{bmatrix},$$

donde entendemos que los elementos de la matriz solo dependen de la velocidad de \mathcal{R}' respecto de \mathcal{R} , v' . Si cogemos una configuración con $E/B = v'/c$, la velocidad de deriva de la carga es $v_q = cE/B = v'$, luego para \mathcal{R}' la carga está quieta, con lo que no percibe campo eléctrico sobre la carga, $E' = aE + bB = 0 \Rightarrow b/a = -E/B = -v'/c$. Con una configuración similar pero con $B/E = v'/c$ obtenemos $v_g = v'$ con lo que $B' = cE + dB = 0 \Rightarrow c/d = -B/E = -v'/c$.

Consideramos ahora una velocidad de deriva general de un monopolo v_q o v_g . La velocidad de deriva que medirá \mathcal{R}' , v'_q o v'_g , se puede calcular usando (3.8) y (3.9):

$$\begin{aligned} \frac{v'_q}{c} &= \frac{E'}{B'} = \frac{aE + bB}{cE + dB} = \frac{\frac{1}{d}(E - (v'/c)B)}{\frac{1}{a}(B - (v'/c)E)} = \frac{a}{d} \frac{v_q/c - (v'/c)}{1 - (v'/c)(v_q/c)} = \frac{ac}{d} \frac{v_q - v'}{c^2 - v'v_q}, \\ \frac{v'_g}{c} &= \frac{B'}{E'} = \frac{cE + dB}{aE + bB} = \frac{\frac{1}{a}(B - (v'/c)E)}{\frac{1}{d}(E - (v'/c)B)} = \frac{d}{a} \frac{v_g/c - (v'/c)}{1 - (v'/c)(v_g/c)} = \frac{dc}{a} \frac{v_g - v'}{c^2 - v'v_g}. \end{aligned}$$

Como esto lo podemos hacer con las velocidades v' que queramos, podemos forzar $v'_q = v'_g$ con lo que sacamos que $(a/d)^2 = 1$. Como cuando $v' \rightarrow 0$, $v'_q \rightarrow v_q$, $a/d = 1$

se tiene $a = d$. Entonces concluimos que para nuestra velocidad de deriva observada v'_ξ por \mathcal{R}' , ya sea magnética o eléctrica, se tiene que:

$$(3.11) \quad \frac{v'_\xi}{c} = \frac{c(v_\xi - v')}{c^2 - v'v_\xi} \Rightarrow v'_\xi = \frac{v_\xi - v'}{1 - v_\xi v'/c^2}.$$

De aquí podemos deducir algo muy importante en relatividad: las velocidades de deriva v_ξ de los monopolos únicamente dependen de los campos E y B , que son de libre elección, por lo que (3.11) es cierta para toda v_ξ independientemente de E y B . Lo que es más, esta relación no tiene en cuenta nada de campos, solo relaciona las velocidades en cada observador. Esto quiere decir que si un observador \mathcal{R} mide un objeto moviéndose a una velocidad v_ξ por el eje X , otro observador \mathcal{R}' que se mueve por ese mismo eje X a una velocidad v' respecto a \mathcal{R} , medirá la velocidad de dicho objeto v'_ξ por (3.11). A esta relación se la llama *ley de adición de velocidades*. Esta ley tiene algunas consecuencias interesantes presentadas en el apéndice A.

Ya para acabar este capítulo, la información que tenemos permite escribir las transformaciones como:

$$\begin{bmatrix} E' \\ B' \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & -v'/c \\ -v'/c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ B \end{bmatrix}.$$

De nuevo, por un argumento de simetría siendo \mathcal{R}' el que tomase las medidas, esperamos que el factor de la transformación siga siendo a pero con el signo cambiado en la matriz al moverse \mathcal{R} con velocidad $-v$ respecto a \mathcal{R}' . Por otros motivos que no analizaremos pero que también se deben a la simetría analizados en [11] se deduce que a debe ser una función par de v' . Es decir, tendríamos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E' \\ B' \end{bmatrix} &= a^2 \begin{bmatrix} 1 & -v'/c \\ -v'/c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v'/c \\ v'/c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E' \\ B' \end{bmatrix} \\ \Rightarrow a^2 \begin{bmatrix} 1 - (v'/c)^2 & 0 \\ 0 & 1 - (v'/c)^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a = (1 - (v'/c)^2)^{-\frac{1}{2}} = \gamma. \end{aligned}$$

Con esto llegamos a las transformaciones de Lorentz introducidas en (3.1).

CAPÍTULO 4

El principio de mínima acción

El principio de mínima acción es un principio utilizado para modelar sistemas complejos mediante una formulación que minimiza una cantidad para obtener las expresiones deseadas que lo describen. En este capítulo reformularemos la teoría electromagnética aplicando este principio, describiendo y analizando la cantidad a minimizar, el denominado lagrangiano electromagnético. Para este capítulo utilizaremos los conceptos tensoriales presentados en el apéndice B.

4.1. El tensor electromagnético

4.1.1. Espacio-tiempo de Minkowski

En \mathbb{R}^4 definimos, sobre la base canónica $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, el siguiente tensor métrico [12]:

$$(4.1) \quad \eta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 0 \\ -1, & i = j = 1, 2, 3 \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Al tensor (4.1) se le conoce como tensor de Minkowski, y al par $\mathcal{M} = \{\mathbb{R}^4, \eta\}$ se le conoce como espacio-tiempo de Minkowski. Algunos autores prefieren usar $-\eta$ para definir esta estructura, más que nada porque si $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T = (ct, x, y, z)^T \in \mathcal{M}$, que es la notación usada habitualmente aquí, entonces

$$(4.2) \quad x \cdot x = -(x^0)^2 + \sum_{i=1}^4 (x^i)^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

En el ámbito de la relatividad, si $x \in \mathcal{M}$, se suele utilizar una letra griega para referirse a sus cuatro coordenadas, y una latina si nos referimos solo a las espaciales. Es decir, si $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T$, entonces $x^\mu = x$ y $x^i = (x^1, x^2, x^3)^T$. Por la operación de subida y bajada de índices con el tensor de Minkowski, $x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)^T$ y $x_i = -(x^1, x^2, x^3)^T$.

4.1.2. Cuadrigradiante

Consideramos en \mathcal{M} al operador [13] $(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla) = (\frac{\partial}{\partial x^0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^3})$. Las coordenadas de este operador son operadores lineales sobre un cuadvectores, que es covariante, y por tanto sus coordenadas son covariantes y las denotaremos por ∂_μ . A este operador se le conoce como cuadrigradiante, y constituye una generalización de la noción de gradiente en relatividad especial y general (aunque debe adaptarse un poco a esta última). Además, al igual que con los tensores podemos subir y bajar sus índices para obtener $\partial^\mu = \eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha$.

4.1.3. Definición del tensor electromagnético

Sea $A = (\phi, \vec{A})$ nuestro cuadvectores electromagnético. Definimos a continuación los siguientes términos:

$$(4.3) \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Estas 16 funciones $0 \leq \mu, \nu \leq 3$ son las coordenadas de un tensor llamado tensor electromagnético. Si calculamos estas cosas, separando los casos $\mu, \nu = 0$ del resto al ser estos del potencial eléctrico:

$$F^{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu = \nu$$

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = -E^i.$$

Donde la segunda igualdad viene de (2.1). Para los casos que quedan, por definición del potencial magnético, $\nabla \times \vec{A} = (\partial_3 \vec{A}^2 - \partial_2 \vec{A}^3, \partial_1 \vec{A}^3 - \partial_3 \vec{A}^1, \partial_2 \vec{A}^1 - \partial_1 \vec{A}^2) = (F^{32}, F^{13}, F^{21}) = (B^1, B^2, B^3)$. Como encima $F^{\mu\nu}$ es antisimétrica, podemos ordenar sus coordenadas en la siguiente matriz, siendo $\mu + 1$ la fila y $\nu + 1$ la columna:

$$(4.4) \quad \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $F^{\mu\nu}$ es un $(0, 2)$ -tensor, podemos bajarlo a un $(2, 0)$ -tensor con el tensor de Minkowski: $F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}$. Entonces, como los términos se anulan salvo que los índices coincidan, la matriz asociada al tensor dual $F_{\mu\nu}$ es:

$$(4.5) \quad \begin{bmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La principal propiedad que tiene este tensor es que es independiente de los cambios de gauge ya que no aparecen potenciales sueltos en sus componentes. Al igual que sucedía en el capítulo 2, las ecuaciones segunda y tercera de (1.1) se reducen a trivialidades

al suponer la existencia de potenciales, con lo que podemos ver qué pasa con las otras dos:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \partial_\eta E^\eta = -\partial_\eta F^{0\eta} = 0, \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -\left(\partial_3 \vec{B}^2 - \partial_2 \vec{B}^3, \partial_1 \vec{B}^3 - \partial_3 \vec{B}^1, \partial_2 \vec{B}^1 - \partial_1 \vec{B}^2\right) \\ &\quad - (\partial_0 F^{10}, \partial_0 F^{20}, \partial_0 F^{30}) \\ &= \left(-\frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0}, -\frac{\partial F^{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} - \frac{\partial F^{20}}{\partial x^0}, -\frac{\partial F^{32}}{\partial x^2} - \frac{\partial F^{31}}{\partial x^1} - \frac{\partial F^{30}}{\partial x^0}\right) \\ &= (0, 0, 0) \Rightarrow \partial_\nu F^{i\nu} = 0 \text{ para } i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Es decir, que las dos ecuaciones de Maxwell que faltan se pueden escribir como:

$$(4.6) \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \text{ para } \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Es decir, las ecuaciones se reducen a una divergencia tetradimensional.

4.2. Mecánica lagrangiana

Vamos a repasar los fundamentos de la mecánica Lagrangiana y del principio de mínima acción para introducir notación y aplicarlo al electromagnetismo.

Supongamos [16] un sistema de N partículas en \mathbb{R}^3 , cada una con posición $r_i(t)$. Como tenemos N vectores $r_i(t)$ en \mathbb{R}^3 para describir las coordenadas; a este conjunto de coordenadas se lo llama *configuración espacial*. Supongamos una serie de m condiciones $g_i(r_1, \dots, r_N, t) = 0$ para $i = 1, \dots, m$ impuestas sobre la configuración espacial, llamadas *condiciones holónomas*. Entonces, la dimensión de la configuración espacial es $n = 3N - m$, conocida como *grados de libertad*. Sabiendo los grados de libertad, podemos pasar de r_1, \dots, r_N coordenadas a unas coordenadas generales $q_1(t), \dots, q_n(t)$ que parametrizan la configuración espacial a tiempo t .

Sin entrar en detalle en términos físicos, sea $T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |v_i|^2$ la energía cinética total del sistema, y V la potencial. Sea $L = T - V$ el denominado *lagrangiano* del sistema, donde suponemos $L = L(q, \dot{q}, t)$, con $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))^T$ y $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ (esta es la notación habitual en mecánica). Definimos la *acción* A entre t_1 y t_2 como el funcional:

$$(4.7) \quad A[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt.$$

Obsérvese que el funcional es una función cuyo dominio es el conjunto de funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, motivo por el que no se le llama función.

El principio de mínima acción nos dice que el movimiento que siguen las N partículas en nuestro sistema con m condiciones holónomas viene dado por una trayectoria en su configuración espacial q que minimiza la acción A , o al menos hace que sea estacionaria. El cómo se deduce el principio tiene muchos argumentos mecánicos y

tampoco nos interesa (véase [16] para entender cómo se construyen los lagrangianos en sistemas de partículas finitas); lo que veremos es la forma de obtener la trayectoria $q(t)$. Nos aproximaremos al mínimo con una pequeña desviación $q(t) + \epsilon\eta(t)$, con lo que el mínimo está en $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &= A[q + \epsilon\eta] = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \epsilon\eta, \dot{q} + \epsilon\dot{\eta}, t) dt, \\ f'(\epsilon) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\eta \frac{\partial L}{\partial q}(q + \epsilon\eta, \dot{q} + \epsilon\dot{\eta}, t) + \dot{\eta} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q + \epsilon\eta, \dot{q} + \epsilon\dot{\eta}, t) \right) dt, \\ f'(0) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\eta \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}, t) + \dot{\eta} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{\partial L}{\partial q} dt + \left[\eta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \eta \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt + \left[\eta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \end{aligned}$$

Si exigimos únicamente que η se anule en los extremos y sea C^1 , al cumplirse esto para toda función η , entonces tenemos la **ecuación de Euler-Lagrange** para las coordenadas generalizadas:

Teorema 4.1. *Si q son las coordenadas generalizadas que minimizan la acción A asociada a un lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$, entonces cumplen:*

$$(4.8) \quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.$$

El término $f'(0) = \left. \frac{\partial A}{\partial \epsilon} [q + \epsilon\eta] \right|_{\epsilon=0}$ se suele escribir en física como δA . Podemos interpretar a δ como una función que primero aplica un operador diferencial sobre nuestra acción A y luego la evalúa en un extremo para calcular su variación en torno a ese extremo. Es decir, para funcionales generales $(\delta F)(x) = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} F(x + \epsilon y)$ Entonces el principio de mínima acción se escribe como $\delta A = 0$ para acciones más generales, ya que para (4.8) necesitamos que el lagrangiano sea $L(q, \dot{q}, t)$.

Veamos un ejemplo con un sistema mecánico típico: un péndulo simple. Consideremos que estamos en \mathbb{R}^2 y que nuestro péndulo tiene longitud l y cuelga del origen, de manera que si $r(t)$ es el extremo del péndulo, entonces nuestra condición de contorno es $|r(t)| = l$. Vemos entonces que, si suponemos que la cuerda del péndulo es rígida, la única condición que necesitamos conocer es el ángulo que forma el extremo con la vertical θ (podemos contarlo con la horizontal en sentido antihorario, pero en este problema así es más fácil). Entonces tenemos un grado de libertad y la única coordenada que nos interesa es $\theta(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m |\dot{r}(t)|^2 = \frac{1}{2} m \left| \frac{d}{dt} (l \sin \theta(t), l \cos \theta(t)) \right|^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta})^2, \\ V &= -mgy(t) = -mgl \cos(\theta(t)), \\ L(\theta, \dot{\theta}, t) &= T - V = ml \left(\frac{l}{2} (\dot{\theta})^2 + g \cos(\theta) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl \sin(\theta), & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2 \dot{\theta}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2 \ddot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml \left(-g \sin(\theta) - l \ddot{\theta} \right) = 0 & \iff & \ddot{\theta} + gl^{-1} \sin(\theta) = 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones del movimiento del péndulo vienen dadas por las soluciones a esta ecuación.

4.3. El lagrangiano electromagnético

En casos más complejos con un número no finito de partículas, o con campos externos que afecten a las mismas, construir los Lagrangianos es más difícil que simplemente $T - V$. Por tanto, presentaremos y analizaremos el lagrangiano electromagnético primero, y luego explicaremos intuitivamente cómo se deduce.

Comenzando pues, dicho lagrangiano es:

$$(4.9) \quad L = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

y se le conoce como densidad lagrangiana del campo electromagnético. Se dice densidad ya que representa la acción de un campo sobre una carga en cada punto, y al ser este un continuo se define su actuación sobre cada punto (su noción matemática equivalente sería densidad en una variedad). Podemos ver que los campos \vec{E} y \vec{B} que hacen que la acción $S = \int L d^4x$ sea estacionaria son los que cumplen (1.1). Para verlo, necesitamos un poco de teoría lagrangiana de campos. Cuando trabajamos con un sistema en el que en lugar de condiciones holónomas tenemos un campo, preferiblemente conservativo, que actúa sobre nuestras partículas, en lugar de estudiar las coordenadas generalizadas de las partículas estudiamos lo mismo pero con los campos. Es decir, si f^μ es un campo vectorial en nuestro espacio-tiempo con variables x^μ , queremos que el Lagrangiano tenga la forma $L(f^\mu, \partial_\nu f^\mu, x^\mu)$. Esto, por cierto, es una generalización del caso con coordenadas, solo que ahora las funciones que desviamos (aquí los campos) dependen de varias variables. Sea pues $S = \int L d^4x$ nuestra acción y f un mínimo de la acción S . Vamos a adaptar la teoría con lagrangianos normales a estos casos. Sea pues $f + \epsilon\eta$ una pequeña desviación. Entonces:

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &= \int L(f^\mu + \epsilon\eta^\mu, \partial_\nu f^\mu + \epsilon\partial_\nu \eta^\mu, x^\mu) d^4x, \\ f'(\epsilon) &= \int \left(\eta^\mu \frac{\partial L}{\partial f^\mu}(f^\mu + \epsilon\eta^\mu, \partial_\nu f^\mu + \epsilon\partial_\nu \eta^\mu, x^\mu) \right. \\ &\quad \left. + \partial_\nu \eta^\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu f^\mu)}(f^\mu + \epsilon\eta^\mu, \partial_\nu f^\mu + \epsilon\partial_\nu \eta^\mu, x^\mu) \right) d^4x, \\ f'(0) &= \int \left(\eta^\mu \frac{\partial L}{\partial f^\mu} + \partial_\nu \eta^\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu f^\mu)} \right) d^4x = \int \eta^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial f^\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu f^\mu)} \right) \right) d^4x, \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos hecho integración por partes sobre el segundo término para pasar $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ a la derivada parcial sobre el Lagrangiano, aplicando que nuestra función η se anula en la frontera del dominio de integración. En el desarrollo anterior

estábamos sumando sobre ambos índices, pero obtenemos dependencia de 4 funciones distintas, las η^μ . Eso significa que son los 4 términos los que deben anularse, luego las ecuaciones de Euler-Lagrange aquí son:

$$(4.10) \quad \partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu f^\mu)} \right) = \frac{\partial L}{\partial f^\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

Tomando $f^\mu = A^\mu$ y L como en (4.9) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} &= -\frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} [F_{\alpha\beta}] F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} [F^{\alpha\beta}] \right) \\ &= -\frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} [\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha] F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} [\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha] \right) \\ &= -\frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} [\eta_{\beta\xi} \partial_\alpha A^\xi - \eta_{\alpha\chi} \partial_\beta A^\chi] F^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} [\eta^{\alpha\xi} \partial_\xi A^\beta - \eta^{\beta\chi} \partial_\chi A^\alpha] \right). \end{aligned}$$

El sumatorio inicial de L es sobre las α 's y las β 's en ambos términos, es decir, en la primera igualdad, las α 's y las β 's son las mismas para los dos sumandos. Por tanto, en cada sumando solo se quedarán las derivadas que coincidan en índices con $\partial_\nu A^\mu$. Entonces queda que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} &= -\frac{1}{16\pi} \left(\eta_{\beta\mu} F^{\nu\beta} - \eta_{\alpha\mu} F^{\alpha\nu} + \eta^{\alpha\nu} F_{\alpha\mu} - \eta^{\beta\nu} F_{\mu\beta} \right) = \frac{1}{8\pi} (\eta_{\alpha\mu} F^{\alpha\nu} + \eta^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha}) \\ &= \frac{1}{8\pi} (\eta^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} + \eta^{\alpha\nu} F_{\mu\alpha}) = \frac{1}{4\pi} \eta^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} = \frac{1}{4\pi} \eta_{\mu\beta} F^{\beta\nu}. \\ \frac{\partial L}{\partial A^\mu} &= 0 \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \eta_{\mu\beta} \partial_\nu (F^{\beta\nu}) = 0 \Rightarrow \partial_\nu F^{\beta\nu} = 0 \text{ para } \beta = 0, 1, 2, 3, \end{aligned}$$

que es justo (4.6). Los sumatorios los hemos incluido para indicar que en los dos sumandos de la primera igualdad los índices son los mismos. Esta es la vía que se basa en aplicar teoría lagrangiana de campos; desde la física se suele utilizar otra vía basada en propiedades naturales del operador δ . Recordemos que, de acuerdo a su definición, δ nos da la desviación de la acción en un punto frente a una desviación *lineal* de dicho punto por factores que se anulan en la frontera de la acción. Podemos sacar de aquí algunas propiedades naturales e interesantes sobre δ como operador sobre funcionales:

1. La desviación sobre un producto de funciones diferenciables actúa como la regla del producto. Esto tiene sentido por la naturaleza diferencial del operador:

$$\begin{aligned} h(\epsilon) &= f(x^\mu + \epsilon y^\mu) g(x^\nu + \epsilon y^\nu) \Rightarrow \\ \delta(fg) &= g(x^\nu) \sum_\mu \left(y^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x^\mu) \right) + f(x^\mu) \sum_\nu \left(y^\nu \frac{\partial g}{\partial x^\nu}(x^\nu) \right) = g\delta f + f\delta g. \end{aligned}$$

2. La derivada parcial respecto a una de las coordenadas es lineal respecto a δ si la función es mínimo C^2 . Esto es, si $f = f(x^\mu(t), t)$:

$$\delta \left(\frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\frac{\partial f}{\partial x^\nu}(x^\mu(t) + \epsilon y^\mu(t), t) \right] \Big|_{\epsilon=0} = \sum_\mu y^\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(x^\mu, t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sum_{\mu} y^{\mu} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}(x^{\mu}, t) = \frac{\partial(\delta f)}{\partial x^{\nu}}.$$

Con estas propiedades, además de ser δ un operador lineal al actuar como un diferencial y una evaluación, ambos lineales, podemos ver que:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta L d^4x = -\frac{1}{16\pi} \int (F^{\mu\nu}(\delta F_{\mu\nu}) + F_{\mu\nu}(\delta F^{\mu\nu})) d^4x \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int \left(F^{\mu\nu}(\delta F_{\mu\nu}) + (\eta_{\mu\alpha}\eta^{\mu\gamma}\eta_{\nu\beta}\eta^{\nu\chi})F^{\alpha\beta}(\delta F_{\gamma\chi}) \right) d^4x = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int \sum_{\mu,\nu} F^{\mu\nu} \left(\frac{\partial\delta A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\delta A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) d^4x = -\frac{1}{4\pi} \int \sum_{\mu,\nu} F^{\mu\nu} \frac{\partial\delta A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} d^4x \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} (\delta A_{\nu}) dx = -\frac{1}{4\pi} \int \sum_{\nu,\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} (\delta A_{\mu}) dx. \end{aligned}$$

Donde en la penúltima igualdad, como estamos en un sumatorio, podemos reordenar índices y obtener que $-F^{\mu\nu} \frac{\partial\delta A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = -F^{\nu\mu} \frac{\partial\delta A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} = F^{\mu\nu} \frac{\partial\delta A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$, y en la última hemos integrado por partes aplicando que el coeficiente lineal de δ se anula en la frontera del dominio de integración. Como las A_{μ} son funciones arbitrarias y solo hemos usado la definición de $F^{\mu\nu}$, obtenemos (4.6).

Podemos comprobar, desarrollando las coordenadas del lagrangiano, que en realidad este admite una expresión bastante más sencilla:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{16\pi} ((F^{00})^2 - (F^{01})^2 - (F^{02})^2 \\ &\quad - (F^{03})^2 - (F^{10})^2 + (F^{11})^2 + (F^{12})^2 + (F^{13})^2 - (F^{20})^2 + (F^{21})^2 + (F^{22})^2 \\ &\quad + (F^{23})^2 - (F^{30})^2 + (F^{31})^2 + (F^{32})^2 + (F^{33})^2) \\ &= -\frac{1}{16\pi} (-(E^1)^2 - (E^2)^2 - (E^3)^2 - (E^1)^2 + (B^3)^2 + (B^2)^2 - (E^2)^2 + (B^3)^2 \\ &\quad + (B^1)^2 - (E^3)^2 + (B^1)^2 + (B^2)^2) = -\frac{1}{16\pi} (-2\|\vec{E}\|^2 + 2\|\vec{B}\|^2) \\ &= \frac{1}{8\pi} (\|\vec{E}\|^2 - \|\vec{B}\|^2). \end{aligned}$$

Obtenemos entonces la siguiente representación alternativa del Lagrangiano:

$$(4.11) \quad L = \frac{1}{8\pi} (\|\vec{E}\|^2 - \|\vec{B}\|^2).$$

Hay una manera muy elegante de explicar por qué el Lagrangiano tiene esa forma. La idea del lagrangiano cuando se trata con campos no conservativos es plasmar en él tanto las simetrías como las invarianzas del sistema. Para la parte de las invarianzas, [17] si consideramos $F = E + iB$ y estudiamos este vector bajo transformaciones de Lorentz, obtendremos que corresponde a una rotación compleja en \mathbb{C}^3 , de manera que todas las transformaciones de Lorentz se agrupan en todas las rotaciones posibles. Entonces, las únicas invariantes del sistema son las magnitudes de los vectores, dadas por $E^2 - B^2 + (E \cdot B)i$. La primera corresponde a la parte real y la segunda se puede derivar con cálculo complejo a partir de (4.9). Entonces se parte de la primera y se busca una forma que plasme más simetrías de las leyes electromagnéticas.

4.4. El lagrangiano electromagnético con cargas y corrientes

Una de las maneras más prácticas de resolver problemas de campos es aplicando el *principio de superposición*. Este principio en su origen se diseñó para ondas, y dice que la amplitud total de un punto en el tiempo es la suma de las amplitudes de todas las ondas que actúan sobre ese punto en ese instante. Este principio, en realidad, se traslada de forma muy intuitiva a otros ámbitos: si empujamos una canica hacia adelante y hacia la izquierda a la vez, lo lógico es pensar que se moverá en diagonal, que es lo que hace. De igual manera, si tenemos una canica magnetizada, le damos un empujón y ponemos al lado un imán, la partícula se moverá en diagonal (y dará vueltas hasta caer al lado del imán). Llevado un poco más lejos, si tenemos una partícula cargada y varios campos eléctricos a la vez, la partícula se verá afectada por la suma de todos los campos. Lo mismo sucede si además de poner campos metemos una corriente eléctrica por un hilo. Es decir, podemos simplemente añadir términos extra sumando que representen la interacción de la carga con los elementos nuevos.

Pues bien, con el lagrangiano y el tensor sucede exactamente lo mismo. Consideramos ahora el siguiente cuadrivector:

$$(4.12) \quad j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

llamado *cuadrivector de corriente*. Si rescatamos el desarrollo obtenido para (4.6), vemos que:

$$\sum_{\eta=0}^3 \frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} = -\nabla \cdot \vec{E}, \quad \sum_{\eta=0}^3 \frac{\partial F^{i\nu}}{\partial x^\nu} = -\nabla \times \vec{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Si ahora vemos las ecuaciones de Maxwell con cargas en (1.11), vemos que lo que se cumple ahora es lo mismo pero teniendo en cuenta corrientes:

$$(4.13) \quad \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \text{para } \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Es más difícil de intuir de dónde sale el término que hay que añadirle al lagrangiano, aunque podemos verlo con un pequeño ejercicio de ingeniería inversa. De nuevo queremos que los campos que den $\delta S = 0$ cumplan las ecuaciones de Maxwell con fuentes. Obsérvese que, en el desarrollo para obtener (4.6) realizado con δ , obteníamos al final $\delta S = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} (\delta A_\mu) d^4x$. Si nos fijamos, δA_μ es una función genérica, mientras que lo que queda multiplicándola es justo lo que queremos que se iguale a 0 en (4.6) para obtener (1.1). Entonces si queremos forzar (4.13), en vez de $\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} (\delta A_\mu)$ debemos tener $(\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{4\pi}{c} j^\mu) (\delta A_\mu)$. Entonces, dando media vuelta:

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \frac{4\pi}{c} j^\mu \right) (\delta A_\mu) d^4x = -\frac{1}{16\pi} \int \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) - \frac{1}{c} \int j^\mu (\delta A_\mu) d^4x.$$

Para acabar, nos interesa ver cómo juntar $j^\mu (\delta A_\mu)$ en algo afectado por todo delta, para juntar linealmente con el término de la izquierda. Por regla de la cadena,

$j^\mu(\delta A) = \delta(A_\mu j^\mu) - A_\mu \delta(j^\mu)$. Ahora bien, $j^\mu = j^\mu(x^\mu)$, es decir, la única función sobre las coordenadas que desviar es la propia j^μ , con lo que obtenemos el factor con el que desviamos linealmente y se anula en la frontera del término de integración, con lo que el término en las integrales se nos va, y por tanto queda:

$$\delta S = \int \delta \left(-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} A_\mu j^\mu \right) d^4x.$$

Con lo que el Lagrangiano del campo electromagnético con corrientes es:

$$(4.14) \quad L = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} A_\mu j^\mu.$$

En realidad, para completar el Lagrangiano, hay que añadir un término asociado a partículas libres. Lo que sucede es que se tiene en cuenta una acción asociada al propio movimiento de la partícula, es decir, qué haría si no le afectan ni los campos ni las fuentes. Dicha interacción se añade como un término no al lagrangiano, sino a la acción, y es [17]:

$$(4.15) \quad S_m = -mc \int ds,$$

donde m es la masa de la partícula, y la integral se hace sobre el camino recorrido de la misma.

APÉNDICE A

Ley de adición de velocidades

A.1. Limitación de la velocidad de los cuerpos

Una consecuencia de la ley es que un objeto que se mueve a una velocidad menor que c nunca alcanzará dicha velocidad. Consideramos $G = \{(-c, c) \subset \mathbb{R}, \oplus\}$ con:

$$\begin{aligned} \oplus : (-c, c)^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (v_1, v_2) &\rightarrow v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}. \end{aligned}$$

Con esta notación, la ley queda $v'_\xi = (-v_\xi) \oplus v'$. Para ver que un objeto no puede alcanzar la velocidad de la luz, veamos que la operación de G es cerrada:

$$\begin{aligned} |v_1 \oplus v_2| &= \left| \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \right| \leq \frac{|v_1 + v_2|}{1 + c^{-2} \left| \frac{v_1 + v_2}{2} \right|^2} = \frac{4c^2 |v_1 + v_2|}{4c^2 + |v_1 + v_2|^2} < c \\ \iff 4c |v_1 + v_2| &< 4c^2 + |v_1 + v_2|^2 \iff |v_1 + v_2| (4c - |v_1 + v_2|) < 4c^2. \end{aligned}$$

Estudiamos la función $f(t) = t(4c - t) = -t^2 + 4ct$, $0 < t < 2c$, parábola con las ramas tendiendo a $-\infty$ con lo que su máximo está en $t = -4c/(-2) = 2c$, y con valor ahí de $f(2c) = -4c^2 + 8c^2 = 4c^2$. Como $f(t) < 4c^2$ para $0 < t < 2c$ y $0 < |v_1 + v_2| < 2c$, concluimos que \oplus es cerrada en G , con lo que en efecto nunca observaremos un objeto a velocidad c ya que equivaldría a poder movernos a su velocidad y medirlo a velocidad 0, lo que sería contradicción con el cierre de \oplus .

A.2. Propiedades algebraicas de la ley

Veamos que G es, además, un grupo abeliano, lo que da una cómoda operabilidad con velocidades relativistas: la parte de conmutatividad es trivial, el elemento neutro de v es claramente 0 y el inverso de v es, por tanto, $-v$. Comprobemos ahora la asociatividad de la operación con un truco de [11]: consideramos la tangente hiperbólica:

$$(A.1) \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1),$$

función que es una biyección entre \mathbb{R} y $(-1, 1)$, con inversa

$$(A.2) \quad \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

La tangente hiperbólica satisface esta igualdad aditiva:

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}.$$

La prueba no son más que cuentas:

$$\begin{aligned} \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)} &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \right) \left(1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \right)^{-1} \\ &= \frac{2(e^{x+y} - e^{-x-y})}{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y})} \left(\frac{2(e^{x+y} + e^{-x-y})}{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y})} \right)^{-1} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{e^{x+y} + e^{-x-y}} = \tanh(x+y). \end{aligned}$$

Entonces si definimos la función $\varphi(x) = c \tanh(x)$ podemos comprobar que $\varphi(x+y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \oplus \varphi(y) &= c \tanh(x) \oplus c \tanh(y) = \frac{c(\tanh(x) + \tanh(y))}{1 + \tanh(x)\tanh(y)} = c \tanh(x+y) \\ &= \varphi(x+y). \end{aligned}$$

Yendo en la dirección opuesta podemos reescalar nuestra inversa tomando $\varphi^{-1}(x) = \tanh^{-1}(x/c)$ y con un procedimiento similar concluir que $\varphi^{-1}(x \oplus y) = \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)$:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(x \oplus y) = \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) &\iff x \oplus y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(x)) \oplus \varphi(\varphi^{-1}(y)) = x \oplus y. \end{aligned}$$

Ahora sí que podemos comprobar la asociatividad:

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= (x \oplus y) \oplus z \iff \varphi^{-1}(x \oplus (y \oplus z)) = \varphi^{-1}((x \oplus y) \oplus z) \\ &\iff \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y \oplus z) = \varphi^{-1}(x \oplus y) + \varphi^{-1}(z) \\ &\iff \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(z) = \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(z). \end{aligned}$$

Con lo que definitivamente G es un grupo abeliano, de hecho isomorfo a $\{\mathbb{R}, +\}$.

APÉNDICE B

Teoría de tensores

B.1. Notación de Einstein

Antes de nada viene bien conocer una manera compacta de expresar productos de coordenadas de vectores en \mathbb{R}^n , conocida como notación de Einstein [12]. Sabemos que si tenemos una matriz M y un vector $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, entonces $(Mv)_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}v_j$.

Con tensores vamos a ver que aparecerán una gran cantidad de subíndices, con lo que usar sumatorios para cada uno es prácticamente inviable. Einstein se percató de que, cuando el índice del sumatorio y sus límites se pueden entender por el contexto, en realidad el símbolo del sumatorio sobra. Entonces, por ejemplo, el caso anterior sería $(Mv)^i = \sum_{j=1}^n M_{ij}v_j = M_{ij}v_j = M_j^i v^j$, donde hemos colocado los índices de acuerdo a las reglas que explicaremos a continuación:

- Los superíndices se usarán para índices que indiquen una fila, mientras que los subíndices se usarán para indicar columnas.
- Cada vez que un índice aparezca dos veces, una como subíndice y otra como superíndice, se entiende que se suma sobre ese índice.
- Ningún índice puede aparecer más de dos veces, o más de una vez como subíndice o superíndice.

B.2. Definición intrínseca

Físicamente, los tensores surgieron como una generalización de vectores, para describir magnitudes físicas que tenían más propiedades que simplemente dirección, sentido y magnitud. La solución pasa por interpretar tanto a escalares como vectores como transformaciones lineales duales con dominios de diferentes dimensiones.

Por tanto, necesitamos introducir [14] conceptos de álgebra multilineal: sea F un cuerpo, V un espacio vectorial de dimensión N sobre F y V^* el dual de V . Un (m, n) -

tensor es una transformación multilinear:

$$(B.1) \quad T : V^m \times (V^*)^n \rightarrow F.$$

Denominamos por $L^{m,n}(V)$ al conjunto de (m,n) -tensores. Al ser estas transformaciones lineales, tenemos en $L^{m,n}(V)$ las operaciones básicas de suma y producto por un escalar que le dan estructura de espacio vectorial sobre F .

Podemos definir otra operación llamada *producto tensorial*: dados dos tensores S de tipo (m,n) y T de tipo (p,q) , definimos el producto tensorial $S \otimes T$ como el $(m+p, n+q)$ -tensor que cumple:

$$\begin{aligned} (S \otimes T)(v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+p}, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{n+q}) \\ = S(v_1, \dots, v_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n)T(v_{m+1}, \dots, v_{m+p}, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{n+q}). \end{aligned}$$

Debido a que la operación se rebaja al cuerpo, [15] su asociatividad, distributividad respecto al producto escalar y a la suma se puede comprobar fácilmente. Un caso singular e importante es el siguiente: consideremos una base $\mathcal{B} = \{e_i\}$ de V y su dual $\mathcal{B}' = \{e^i\}$ en V^* . Los productos $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}$ con $1 \leq i_r \leq N, r = 1, \dots, k$ son elementos de $L^{k,0}(V)$. Para el caso en $L^{0,m}(V)$, una transformación lineal que va del dual al cuerpo se dice que pertenece al dual del dual, V^{**} . Ahora bien, el doble dual se puede identificar directamente con V por el isomorfismo $\phi : V \rightarrow V^{**}$, que cumple $(\phi(v))(\sigma) = \sigma(v)$. Teniendo en cuenta esto, a la base dual de \mathcal{B}' la podemos identificar con \mathcal{B} , con lo que los productos $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}$ con $1 \leq i_r \leq N, r = 1, \dots, m$ son elementos de $L^{0,m}(V)$, y por ende los productos $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_m}$ son elementos de $L^{k,m}(V)$.

Las transformaciones que se pueden escribir de esta forma se conocen como descomponibles. Estos tensores son importantes por lo siguiente: para el conjunto $\Omega = \{1, \dots, N\}$ consideramos un multiíndice de longitud $k+m$, $I = (i_1, \dots, i_{k+m}) \in \Omega^{k+m}$, y sea $e^I = e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{i_{k+1}}, \dots, \otimes e_{i_{k+m}}$. Si tenemos otro multiíndice de longitud $k+m$, $(j_1, \dots, j_{k+m}) \in \Omega^{k+m}$, tenemos que:

$$(B.2) \quad e^I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}, e^{j_{k+1}}, \dots, e^{j_{k+m}}) = \begin{cases} 1, I = J \\ 0, I \neq J \end{cases}.$$

Con esto podemos concluir, con una prueba similar a que \mathcal{B}' es base de V^* , que el conjunto $\{e^I\}$ con índices $I \in \Omega^{k+m}$ es base de $L^{k,m}(V)$. Teniendo en cuenta esto, supongamos que nos quedamos con la base $\{e_i\}$ en V y $\{e^i\}$ en V^* . Dado un (k,m) -tensor T , podemos escribirlo como:

$$T = \sum_{I \in \Omega^{k+m}} \lambda_I e^I = \sum_{(i_1, \dots, i_{k+m}) \in \Omega^{k+m}} \lambda_{(i_1, \dots, i_{k+m})} (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \otimes e_{i_{k+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_{k+m}})$$

donde $\lambda_{(i_1, \dots, i_{k+m})}$ es la coordenada I -ésima sobre dicha base. Al ser $L^{k,m}(V)$ un dual, cada coordenada se puede obtener como

$$(B.3) \quad \lambda_{(i_1, \dots, i_{k+m})} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e^{i_{k+1}}, \dots, e^{i_{k+m}}) := T_{i_1, \dots, i_k}^{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}}.$$

La notación $T_{i_1, \dots, i_k}^{i_{k+1}, \dots, i_{k+m}}$ es la más utilizada ya que en ningún momento especifica sobre qué base estamos trabajando, simplemente indica, con la base a usar en el momento, qué coordenada es la utilizada. Ahora queda preguntarse cómo se transforman estas coordenadas bajo cambios de base. Denotaremos $([T]_e)_{j_1, \dots, j_m}^{i_1, \dots, i_k}$ para especificar que estamos en la base de los $\{e^J\}$. Si queremos pasar a coordenadas en base $\{f^J\}$, al estar en un dual, $([T]_f)_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_m} = T(f_{i_1}, \dots, f_{i_k}, f^{j_1}, \dots, f^{j_m})$. Para obtener (B.3), aprovechando que T es multilineal, tenemos que expresar las f_j y las f^i como combinación lineal de las e_j y las e^i , para lo que hay que ver cómo funcionan los cambios de base y de coordenadas en el espacio y en los duales, y aprovecharemos para explicar el sentido de los superíndices y subíndices.

B.3. Covarianza y contravarianza

El qué es superíndice y qué es subíndice se basa en las nociones de covarianza y contravarianza. Supongamos que a parte de nuestras bases $\{e_i\}$ y $\{e^i\}$ tenemos otras $\{f_i\}$ y $\{f^i\}$. Si $[f_i]_e \in \mathbb{R}^n$ son las coordenadas de f_i en base $\{e_i\}$, sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz de cambio de base de $\{e_i\}$ a $\{f_i\}$, es decir, la de columnas $[f_1]_e, \dots, [f_n]_e$, y por ende siendo A^T la de $\{f^i\}$ a $\{e^i\}$. Entonces:

$$f_i = e_1([f_i]_e)_1 + \dots + e_n([f_i]_e)_n = e_j([f_i]_e)^j = e_j A_i^j.$$

Vemos entonces que los vectores en V se transforman aplicando sobre ellos la matriz A directamente. Decimos entonces que los vectores se transforman *covariantemente* con el cambio de base. Expandimos esta definición para definir **covarianza** como la propiedad de un objeto de transformarse, bajo un cambio de base, por la matriz de cambio de base.

Curiosamente, a las coordenadas de los vectores en V les pasa lo contrario. Antes de nada, conviene aclarar esto. Nosotros tenemos un isomorfismo $\chi : V \rightarrow V$ que lleva los e_i a los f_i . Dicha transformación es la que tiene por matriz A . χ transforma los vectores, no sus coordenadas. Con transformar las coordenadas de un vector, nos referimos a conocer las coordenadas de un vector v en base $\{f_i\}$, $[v]_f$, en función de las suyas en $\{e_i\}$. Una vez aclarada la diferencia entre transformación de vectores y de sus coordenadas, dado un vector v en V , $v = f_1([v]_f)_1 + \dots + f_n([v]_f)_n = f_i([v]_f)^i = e_j A_i^j ([v]_f)^i$. Pero por unicidad de coordenadas, eso debe ser igual a $e_j ([v]_e)^j$, luego $A_i^j ([v]_f)^i = ([v]_e)^j \Rightarrow A_i ([v]_f)^i = [v]_e$, y se tiene entonces que:

$$[v]_f = (A^{-1})_i ([v]_e)^i,$$

es decir, las coordenadas en V se transforman por la matriz inversa de la matriz de cambio de bases. Decimos entonces que se transforman *contravariantemente*. Expandimos esta definición para definir **contravarianza** como la propiedad matemática de un objeto de transformarse, bajo cambio de base, por medio de la inversa de la matriz de cambio de bases.

Curiosamente, en el dual pasa todo lo contrario. Para cada covector $\alpha \in V^*$, si escribimos sus coordenadas como vectores fila, podemos calcular sus coordenadas respecto a $\{f^i\}$ en función de las suyas en $\{e^i\}$ sabiendo que $([\alpha]_f)_i = \alpha(f_i) = \alpha(e_j A_i^j) =$

$\alpha(e_j)A_i^j = ([\alpha]_e)_j A_i^j$. En conjunto:

$$[\alpha]_f = ([\alpha]_e)_i A^i,$$

luego las coordenadas de covectores son covariantes. Si miramos a la transformación de los propios covectores, tenemos que, como $f^i(e_j) = f^i(f_l(A^{-1})_j^l) = (A^{-1})_j^i$,

$$f^i = f^i(e_1)e^1 + \cdots + f^i(e_n)e^n = (A^{-1})_1^i e^1 + \cdots + (A^{-1})_n^i e^n = (A^{-1})_j^i e^j,$$

con lo que los covectores en sí mismos son contravariantes. Es decir, los vectores son covariantes y sus coordenadas contravariantes, mientras que en el dual es al revés, los covectores son contravariantes y las coordenadas de los covectores, covariantes.

Cuando un objeto es contravariante, en notación de Einstein se designan con superíndices, mientras que los covariantes se designan con subíndices. Es por ello, por ejemplo, que las coordenadas de los covectores las habíamos puesto con vectores fila, para que las coordenadas, al ser covariantes, se correspondieran con coordenadas a lo largo de una fila.

Para concluir esta sección, podemos indicar ya cómo cambian las coordenadas de un (k, m) -tensor:

$$\begin{aligned} ([T]_f)_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_m} &= T(f_{i_1}, \dots, f_{i_k}, f^{j_1}, \dots, f^{j_m}) \\ (B.4) \quad &= T(e_{l_1} A_{i_1}^{l_1}, \dots, e_{l_k} A_{i_k}^{l_k}, (A^{-1})_{l_{k+1}}^{j_1} e^{l_{k+1}}, \dots, (A^{-1})_{l_{k+m}}^{j_m} e^{l_{k+m}}) \\ &= (A^{-1})_{l_{k+1}}^{j_1} \cdots (A^{-1})_{l_{k+m}}^{j_m} ([T]_e)_{l_1, \dots, l_k}^{l_{k+1}, \dots, l_{k+m}} A_{i_1}^{l_1} \cdots A_{i_k}^{l_k}. \end{aligned}$$

Esto es lo que se conoce como *ley de transformación de tensores*.

B.4. Subida y bajada de índices

Hay una operación que como veremos permite subir y bajar índices a placer en tensores, pero esta requiere de un objeto llamado [12] tensor métrico. Pongamos en nuestro espacio vectorial V un producto interior \cdot . Expresando vectores $u = e_i u^i$ y $v = e_j v^j$, entonces tenemos que $u \cdot v = (e_i u^i) \cdot (e_j v^j) = (e_i \cdot e_j) u^i v^j$, luego conociendo las coordenadas nuestra operación solo depende de la matriz $\{e_i \cdot e_j : 1 \leq i, j \leq N\}$, conocida como matriz de Gram G del producto interior en la base $\{e_i\}$. Esta matriz tiene dos propiedades importantes: es simétrica por simetría del producto interior, y es invertible ya que si $(e_i \cdot e_j) x^j = e_i \cdot x = 0$ entonces x sería ortogonal a todos los elementos de la base, luego x sería ortogonal a todo $v \in V$ luego $x = 0$.

Bajo un cambio de base a nuestra base $\{f_i\}$ dado por $f_i = e_j A_i^j$, tenemos que

$$(B.5) \quad f_i \cdot f_j = (e_k A_i^k) \cdot (e_l A_j^l) = (e_k \cdot e_l) A_i^k A_j^l$$

que en forma matricial es $[G]_f = A^T [G]_e A$. Las matrices relacionadas por cambios de base así se conocen como congruentes. Cuando el cuerpo es \mathbb{R} , nuestra matriz de Gram es real, simétrica e invertible, y por la ley de inercia de Sylvester todas las matrices así congruentes entre sí son congruentes a una matriz diagonal Λ con entradas en la

diagonal ± 1 , única salvo reordenamientos de los números. El -1 puede aparecer si consideramos el producto escalar en sentido generalizado sin exigir que sea definido positivo, en su lugar pidiendo que sea no degenerado. Entonces si N^+ es el número de entradas positivas y N^- el de entradas negativas en la diagonal de Λ , entonces el par (N^+, N^-) , llamado *signatura* del espacio V , es única para cada producto interior definido sobre V independientemente de la base.

Sea $g_{ij} = e_i \cdot e_j$. La forma bilineal $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(u, v) = g_{ij}u^i v^j$ es un $(2, 0)$ -tensor denominado **tensor métrico**. Es $(2, 0)$ ya que por (B.5) sus coordenadas son las dos covariantes. Si en vez de pensar en G pensamos en su inversa, sus coordenadas se transforman contravariantemente (lógico al ser una inversa) y por tanto define un $(0, 2)$ -tensor denominado *tensor métrico dual*. Sus coordenadas se denotan por g^{ij} al ser sus coordenadas contravariantes. De hecho, $g_{ij}g^{jk} = 1$ si $i = j$, 0 en caso contrario.

Con este tensor métrico, si $a_{i_1, \dots, i_m}^{j_1, \dots, j_n}$ es un (m, n) -tensor, entonces $g_{pq}a_{i_1, \dots, i_m}^{j_1, \dots, j_n}$ es un $(m+2, n)$ tensor. Fijamos ahora un índice contravariante de a , sea ese j_k . Lo reemplazamos por q y obtenemos $g_{pq}a_{i_1, \dots, i_m}^{j_1, \dots, j_{k-1}, q, j_{k+1}, \dots, j_n}$, un $(m+1, n-1)$ -tensor. Entonces tenemos la operación unaria:

$$b_{p, i_1, \dots, i_m}^{j_1, \dots, j_{n-1}} = g_{pq}a_{i_1, \dots, i_m}^{j_1, \dots, j_{k-1}, q, j_{k+1}, \dots, j_n}$$

conocida como *bajada de índices*, ya que se interpreta como bajar el índice j_k , o pasarlo de contravariante a covariante. Con el tensor métrico dual podemos definir la operación contraria, conocida como *subida de índices*:

$$c_{i_1, \dots, i_{m-1}}^{p, j_1, \dots, j_n} = g^{pq}a_{i_1, \dots, i_{k-1}, q, i_k, \dots, i_{m-1}}^{j_1, \dots, j_n}$$

El uso más típico que se le da a esta operación es el moverse entre covectores y vectores ya que:

$$v^i = g^{ij}v_j, \quad v_i = g_{ij}v^j.$$

Bibliografía

- [1] A.K.T. Assis and J.P.M.C. Chaib. *Ampère Electrodynamics*. C. Roy Keys Inc., Montreal, 2015. Analysis of the meaning and evolution of Ampère’s force between current elements, together with a complete translation of his masterpiece: Theory of electrodynamic phenomena, uniquely deduced from experience.
- [2] F. Chamizo. Las ecuaciones de Maxwell en plan fácil. <http://www.uam.es/fernando.chamizo/physics/physics.html>, 2016.
- [3] F. Chamizo and A. Ubis. Around Ampère’s law. *Mathematics Magazine*. 2022.
- [4] Stackexchange. <https://math.stackexchange.com/questions/4004969/if-integral-of-vector-field-along-closed-path-is-zero-must-it-be-conservative>. Online, accessed 19-October-2022.
- [5] Stackexchange. <https://math.stackexchange.com/questions/769746/how-do-i-solve-f-nabla-times-g-for-g?noredirect=1&lq=1> Online, accessed 19-October-2022.
- [6] Universidad de Alberta, Poisson Equations: Explicit Formulas, OcMountain Daylight Time. 5, 2011, <https://www.math.ualberta.ca/~xinweiyu/527.1.11f/lec09.pdf>
- [7] G. B. Folland. Higher-Order Derivatives and Taylor’s Formula in Several Variables, <https://sites.math.washington.edu/~folland/Math425/taylor2.pdf>
- [8] Section 5: Magnetostatics, University of Nebraska-Lincoln, <https://unlcms.unl.edu/cas/physics/tsymbal/teaching/EM-913/section5-Magnetostatics.pdf>
- [9] D. J. Dunstan. Derivation of special relativity from Maxwell and Newton, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 366(1871):1861–1865, 2008
- [10] C. Wu. An electromagnetic way to derive basic relativistic transformations. arXiv:2209.07466 [physics.gen-ph], 2022.
- [11] K. Conrad. Relativistic addition and group theory. Universidad de Connecticut <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/grouptheory/relativity.pdf>
- [12] B. Porat. A Gentle Introduction to Tensors. Israel Institute of Technology. Department of Electrical Engineering. https://www.eee.wustl.edu/~nehorai/Porat_A_Gentle_Introduction_to_Tensors_2014.pdf

- [13] Wikipedia contributors. Four-gradient - Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Four-gradient>, 2023. [Online, accessed 19-03-2023].
- [14] Wikipedia contributors. Tensor - Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor>, 2023. [Online, accessed 26-02-2023].
- [15] Victor Guillemin & Peter J. Haine. Differential Forms. Draft: March 28, 2018
- [16] Simon J.A. Malham. An introduction to Lagrangian and Hamiltonian mechanics. August 23, 2016
- [17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields. Vol. 2.* Course of theoretical physics. Elsevier Science, Oxford, fourth edition, 1975.