Vamos a ver un ejemplo de solución de la ecuación de Schrödinger que es el análogo del movimiento armónico simple de los cursos básicos de física. En principio es un ejemplo más pero lo cierto es que resulta crucial cuando uno estudia lo que se llama *teoría cuántica de campos* que es la teoría oficial en la actualidad que explica el mundo de las partículas elementales. Esta conexión va mucho más allá del nivel de un trabajo de fin de grado, simplemente lo digo para tu información y por si acaso quieres mencionarlo.

En esta hoja lo que haremos concretamente es leer dos páginas de [Fol08], la 53 y la 54, que dan un tratamiento bastante matemático al tema. Si no encuentras este libro en la biblioteca, te enviaré las dos páginas escaneadas.

El ejemplo que vamos a discutir se llama el *oscilador armónico* (cuántico). Antes de comenzar, si no has oído hablar nunca de su análogo clásico es conveniente que leas un mínimo sobre él, aunque solo sea por cultura general.

1) Lee el apartado 21-2 de [FLS63]. Está disponible en `http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_21.html`.

El resto de los ejercicios se refieren a [Fol08]. No olvides añadirlo a la bibliografía.

2) [Fácil, hecho en la hoja 3] Comprueba que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en una dimensión

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\big(E - V(x)\big)\psi = 0 \qquad \text{con} \quad V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 \tag{1}$$

es equivalente a $H\psi = E\psi$ con H como en (3.21).

Lo que dice el autor después de (3.21) de una manera un poco oscura es que si escribimos $\psi(x) = f(\lambda x)$ con $\lambda = (m\kappa/\hbar^2)^{1/4}$ entonces $H\psi = E\psi$ es equivalente a

$$H_0 f = \widetilde{E} f \qquad \text{con} \quad \widetilde{E} = E\sqrt{\frac{m}{\kappa\hbar^2}}$$

donde H_0 es como en (3.22).

3) Comprueba esta afirmación. Indicación: Sustituye $\psi(x) = f(\lambda x)$ en (1) y después haz el cambio $x \mapsto x/\lambda$.

A continuación se definen dos operadores importantes[1] en (3.23).

[1] Estos operadores son los que resultan cruciales en teoría cuántica de campos. Están relacionados respectivamente con la destrucción y creación de partículas. La notación no es arbitraria, $A^\dagger$ es realmente el operador adjunto de A.

4) Prueba las fórmulas (3.24), (3.25) y (3.26) donde I es el operador identidad, que aplica f en f. Por si no lo has visto nunca, $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2]$ significa $\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_2\mathcal{O}_1$. Indicación: Por ejemplo para la primera igualdad de (3.24) hay que demostrar que para cualquier función f se tiene $H_0(f) = A\big(A^\dagger(f)\big) - \frac{1}{2}f$. El lado izquierdo es $\frac{1}{2}(-f'' + x^2 f)$.

En (3.27) se define ϕ_k de forma recursiva y se afirma que ϕ_k es un polinomio P_k multiplicado por $e^{-x^2/2}$. ¿Lo ves claro?

5) Halla P_1 y P_2. Explica con rigor la propiedad que se menciona acerca de la paridad de los P_k.

6) Prueba (3.28). Quizá ya lo hayas hecho para el problema anterior.

En realidad hay una fórmula explícita para ϕ_k que no se menciona en [Fol08]. No es muy difícil de probar pero no es tan útil como podría pensarse. Solo la menciono por si tienes curiosidad. No la emplees en problemas sucesivos, porque te va a liar:

$$\phi_k(x) = (-1)^k \big(2^k k! \sqrt{\pi}\big)^{-1/2} e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k}\big(e^{-x^2}\big).$$

7) Sigue el razonamiento hasta (3.31), justificando los pasos, y de ahí concluye que la función $\psi(x) = \phi_k\big((m\kappa/\hbar^2)^{1/4}x\big)$ es solución de (1) para $E = (k+1/2)\hbar\sqrt{\kappa/m}$ con k un entero no negativo.

La pregunta natural es si con el ejercicio anterior hemos hallado todas las soluciones de (1), salvo multiplicar por constantes, o falta alguna. Para deducir que son todas, en [Fol08] se prueba que $\{\phi_k\}_{k=0}^\infty$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Si hubiera una solución de (1) no contemplada en el ejercicio anterior, por la equivalencia del ejercicio 2), existiría una $\widetilde{\phi}$ que no es múltiplo de ninguna ϕ_k tal que $H_0\widetilde{\phi} = \widetilde{E}\widetilde{\phi}$. Escribiendo $\widetilde{\phi} = \sum_{k=0}^\infty a_k\phi_k$, se tiene

$$\sum_{k=0}^\infty a_k\big(k+\frac{1}{2}\big)\phi_k = \sum_{k=0}^\infty a_k\widetilde{E}\phi_k$$

lo cual lleva a una contradicción comparando los coeficientes de los ϕ_k si hubiera más de un a_k no nulo. Entonces necesariamente $\widetilde{\phi}$ es múltiplo constante de algún ϕ_k.

8) Escribe el párrafo anterior con tus palabras y alguna explicación más.

9) Lee la prueba de que $\{\phi_k\}_{k=0}^\infty$ es una base ortonormal (hasta el párrafo *"In short, we have shown"*) y reescríbela con las explicaciones que necesites. Recuerda que $\langle f|g\rangle$ es el producto escalar $\int \overline{f}g$.

Te indico lo que tienes que entregar.

10) Comienza escribiendo unas pocas líneas sobre el oscilador armónico clásico y si quieres di de pasada que el caso cuántico que vamos a estudiar es muy importante en la física actual. Después debes redactar todos los ejercicios escribiendo claramente la ecuación inicial y terminando con el conjunto de todas las soluciones y su unicidad. Te dejo libertad con respecto al número de páginas, solo te pido que no sobrepasen las seis pero pueden ocuparte mucho menos.

Referencias

[FLS63] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 1: Mainly mechanics, radiation, and heat.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1963.

[Fol08] G. B. Folland. *Quantum field theory*, volume 149 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. A tourist guide for mathematicians.