Es difícil exagerar la importancia de los operadores de Hecke que introduciremos en esta hoja. Son la razón principal por la que las formas modulares son tan relevantes en teoría de números. Tanto en las propiedades observadas por Ramanujan para los coeficientes de la función discriminante como en la prueba de Wiles del último teorema de Fermat, los operadores de Hecke tienen un papel protagonista.

En toda esta hoja consideraremos sin repetirlo cada vez formas modulares de peso k con $k \geq 4$ par y para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Los operadores de Hecke preservan el espacio vectorial formado por estas formas modulares. En realidad no hay problema para considerar otros grupos como los vistos en la hoja pasada pero eso no lo veremos aquí.

A modo de motivación un poco burda, nota que si f es una forma modular, $f(z/2)$ y $f\big((z+1)/2\big)$ no son en general formas modulares porque ya falla la 1-periodicidad, sin embargo su suma sí es periódica. El siguiente ejercicio muestra que con un sumando más es posible recuperar todas las simetrías.

1) Prueba que si f es una forma modular de peso k entonces $2^k f(2z)+f(z/2)+f\big((z+1)/2\big)$ es una forma modular de peso k.

Dado $n \in \mathbb{Z}^+$ se define el *operador de Hecke* T_n como

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{n}\sum_{ad=n} a^k \sum_{b=0}^{d-1} f\Big(\frac{az+b}{d}\Big)$$

donde se supone $a, d \in \mathbb{Z}^+$. Obviamente $T_1 = \mathrm{Id}$ y T_2 es, salvo un factor $1/2$, el operador del ejercicio anterior. No es en absoluto obvio que T_n aplique formas modulares en formas modulares. Antes de que leas sobre ello, vamos a ver algunas propiedades básicas.

2) Prueba que si n y m son coprimos se tiene entonces $T_nT_m = T_{nm} = T_mT_n$.

Con esto los operadores T_n quedan determinados por los T_{p^ν} con p^ν las potencias de primos que aparecen en la factorización de n. En realidad T_{p^ν} se puede escribir en términos de T_p y así los operadores de Hecke más importantes son los que tienen índice primo. La relación entre T_{p^ν} y T_p nos lleva a tomar un ligero desvío.

3) Comprueba que $U_n(x) = \operatorname{sen}\big((n+1)\arccos x\big)/\operatorname{sen}(\arccos x)$ satisface la fórmula de recurrencia $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$ con $U_0(x) = 1$ y $U_1(x) = 2x$. Por tanto los U_n, extendidos de $[-1,1]$ a todo $\mathbb{R}$, definen una familia de polinomios, llamados *polinomios de Chebyshev de segunda especie*.

4) Muestra $T_{p^{\nu+1}} = T_pT_{p^\nu} - p^{k-1}T_{p^{\nu-1}}$ y deduce del ejercicio anterior que T_{p^ν} se obtiene a partir de T_p con la fórmula $T_{p^\nu} = p^{\nu(k-1)/2}U_\nu\big(\frac{1}{2}p^{(1-k)/2}T_p\big)$.

La fórmula anterior implica que los T_{p^ν} conmutan (¿lo ves claro?) y por tanto $T_nT_m = T_mT_n$ incluso si n y m no son coprimos. Esto se podría deducir también con la definición original.

5) Considera $G_k(z)$ la serie de Eisenstein de peso k (como en la hoja 3). Comprueba que $T_2G_k = (2^{k-1}+1)G_k$ trabajando directamente con la serie que define G_k.

6) Generaliza el argumento para mostrar que $T_pG_k = (p^{k-1}+1)G_k$ para cualquier primo p. De nuevo utiliza solo la serie que define G_k. Esto te puede resultar difícil pero una vez que des con la solución verás que es pura combinatoria simple separando entre divisibles y no divisibles por p.

7) Explica por qué lo visto hasta ahora sobre las propiedades de los operadores de Hecke implica $T_nG_k = \sigma_{k-1}(n)G_k$.

Según hemos visto, la acción de T_n sobre G_k es muy sencilla pero la prueba ha usado propiedades especiales y parece que es difícil extrapolarla para deducir que los operadores de Hecke envían formas modulares en formas modulares. La prueba la puedes encontrar por ejemplo en [Mas15, Prop.4.1.5] pero como en la mayoría de los textos está un poco oscurecida por buscar la generalidad y elegancia. En el párrafo de la §5.1 de [CR10] que empieza "En general, dado…", damos una explicación rápida de por qué funciona.

8) Utilizando estas referencias u otras (como [Iwa97] o [DS05]) prueba que los operadores de Hecke aplican formas modulares en formas modulares explicando con cuidado la idea que subyace.

9) Indica por qué es obvio a partir del ejercicio anterior que las *cusp forms* se aplican en *cusp forms*.

Ahora hay un punto un poco delicado. La fórmula

$$\langle f, g\rangle = \int_D f(x+iy)\overline{g(x+iy)}y^{k-2}\,dxdy$$

con D un dominio fundamental define un producto escalar, llamado el *producto de Petersson*, en el espacio vectorial de *cusp forms* de peso k. Eso es fácil, solo comprobar las propiedades. Lo que, hasta donde yo sé, no es tan fácil es ver que los T_n son autoadjuntos. Es decir,

$$\langle T_nf, g\rangle = \langle f, T_ng\rangle.$$

Las pruebas que conozco, como [Mas15, §4.4.3] o [Iwa97, §6.4], son largas o requieren introducir otros resultados.

10) Haz una búsqueda en la literatura y en internet para ver si encuentras una prueba sencilla que desconozca, lo cual es posible. Si no la encuentras, en tu trabajo dalo por supuesto citando la mejor referencia que hayas encontrado.

11) Intenta encontrar por ti mismo una prueba del siguiente resultado de álgebra lineal: Sea V un espacio vectorial unitario[1], si $C = \{L_1, L_2 \dots\}$ es un conjunto (finito o infinito, si te resulta más cómodo restríngete al caso finito) de aplicaciones lineales autoadjuntas $V \longrightarrow V$ que conmutan $L_iL_j = L_jL_i$, entonces existe una base ortonormal en la que todas diagonalizan simultáneamente. Si no das con la prueba, intenta al menos hacerla suponiendo que L_1 no tiene autovalores repetidos.

Aplicado a nuestro caso se deduce que hay una base $B = \{f_1, \dots, f_d\}$ de las *cusp forms* de peso k que cumple $T_nf = \lambda(n)f$ para $f \in B$, con $\lambda(n)$ dependiendo de f.

12) Si $f \in B$ tiene una un desarrollo de Fourier $\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{2\pi imz}$ con $a_1 \neq 0$, comparando los coeficientes de $e^{2\pi iz}$ en $T_nf = \lambda(n)f_j$ demuestra $a_n = \lambda(n)a_1$.

13) Deduce que n y m son coprimos $a_na_m = a_{nm}a_1$.

14) Concluye que la función $\tau(n)$ de Ramanujan, la que da los coeficientes de Fourier de Δ (mira la hoja 4) es multiplicativa. Esto es, $\tau(n)\tau(m) = \tau(nm)$ para n y m coprimos.

15) Prueba que si p es primo y $m \in \mathbb{Z}^+$, se cumple $\tau(p^{m+1}) = \tau(p)\tau(p^m) - p^{11}\tau(p^{m-1})$.

Los dos últimos ejercicios fueron observaciones de Ramanujan en [Ram00] que no logró probar. Hizo una tercera observación acerca del tamaño de $\tau(p)$, concretamente $|\tau(p)| < 2p^{11/2}$, que tiene profundas ramificaciones y la cual no fue demostrada (por P. Deligne) hasta 1974.

Tarea a entregar. Redacta un documento que conecte lo que has escrito para los ejercicios de esta hoja. Como en las últimas hojas, no te pongo limitación de espacio pero intenta ser breve. Haz si quieres una selección solo incluyendo detalles de los ejercicios que te parezcan más importantes.

---

[1] Te recuerdo que esto significa espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con un producto escalar.

Referencias

[CR10] F. Chamizo and D. Raboso. Formas modulares y números casi enteros. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 13(3):539–555, 2010.

[DS05] F. Diamond and J. Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.

[Iwa97] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[Mas15] M. Masdeu. Modular forms (MA4H9). `http://homepages.warwick.ac.uk/~masmat/files/teaching/modforms.pdf`, 2015.

[Ram00] S. Ramanujan. On certain arithmetical functions [Trans. Cambridge Philos. Soc. **22** (1916), no. 9, 159–184]. In *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, pages 136–162. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.