Esta hoja explorará la relación entre las funciones aritméticas (especialmente las multiplicativas) y las series de Dirichlet. Seguiremos el esquema de [1], que recoge la sección 2.1 de unos apuntes que estoy escribiendo para la asignatura *Teoría combinatoria y analítica de números*. Te avanzo que mi propuesta es que adaptes unas páginas de esa sección cambiando los ejemplos por otros que te propongo como ejercicios. Aparte de que nunca te recomiende la copia literal, algunas cosas las tendrás que modificar necesariamente para que estén de acuerdo con lo visto en el capítulo 1 de tu trabajo.

1) Da una lectura general a [1] sin incluir el Lema 2.1.5 (el método de la hipérbola) y su ejemplo, que está al final y aparecerá en una forma más precisa más adelante en tu trabajo. En todo el documento, p denota un número primo. No sé si conoces la función φ de Euler que menciono. Se define $\varphi(n)$ como los enteros positivos en $[1, n]$ que son coprimos con n (que no tienen factores comunes con él). Se tiene la siguiente fórmula [2]:

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - p^{-1}\right).$$

De todas formas, voy a evitar referencias a ella en lo sucesivo.

Ahora te iré diciendo los detalles finos de la tarea de adaptación de [1]. Como en tu capítulo 1 ya has visto series de Dirichlet y la función ζ, hasta (2.1) te puedes restringir a introducir las funciones multiplicativas y decir que las tomamos como las que dan lugar a las sucesiones en la definición de las series de Dirichlet. La notación pasa a ser D_f. Menciona que si $\mathbf{1}$ es la función constante 1, entonces $\zeta(s) = D_{\mathbf{1}}(s)$.

2) Intercambia el ejemplo de φ como función multiplicativa por $\tau(n)$ definida como el número de divisores (positivos) de n. Por ejemplo, $\tau(10) = 4$. Explica por qué es multiplicativa y la fórmula en términos de la factorización $\tau(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

3) Introduce también las funciones μ (función de Möbius) y λ (función de Liouville) como las funciones multiplicativas que cumplen $\mu(p) = \lambda(p) = -1$ con la única diferencia de que la segunda es completamente multiplicativa y la primera no lo es porque se completa la definición con $\mu(p^k) = 0$ si $k = 2$. Para ver que lo entiendes, pon como ejemplo los valores de $\mu(n)$ y $\lambda(n)$ para $n \in \{2022, 2023\}$.

Lo que sigue es la parte de productos de Euler. En estos apuntes, me salto la prueba del Lema 2.1.1, pero ello no tendría sentido en tu trabajo.

4) Lee la demostración escaneada que te doy del Lema 2.1.1 que proviene de [3] y redáctala sin hacer una copia totalmente literal, justificando lo que te parezca que necesita más explicaciones.

Ahora vienen un par de ejemplos de dos "identidades espectaculares". Busca una referencia al menos para el valor de $\zeta(2)$. No hace falta que reproduzcas la prueba, solo que menciones un sitio donde esté. Tras ello, pon las soluciones de los tres ejercicios siguientes como ejemplos:

5) Explica por qué se tiene $D_\mu(s) = \prod_p (1 - p^{-s})$ en $\Re(s) > 1$.

6) Prueba $\sum_{n=1}^\infty |\mu(n)|/n^s = \zeta(s)/\zeta(2s)$ para $\Re(s) > 1$.

7) Expresa $D_\lambda(s)$ en términos de la función ζ.

A continuación viene la relación entre las series de Dirichlet y las convoluciones. En la prueba, cuando se dice que "es lícita la reordenación", busca el *teorema de Fubini para sucesiones* (por ejemplo en [4]) y apela a él. Explica también al final un poco más por qué $h_p = f_p * g_p$. Los ejemplos tras la prueba con τ y μ, reemplázalos por las soluciones de los tres ejercicios siguientes.

8) Explica por qué $\sigma = \mathbf{1} * \mathrm{id}$, con $\mathrm{id}(n) = n$ es la función que da la suma de los divisores y úsalo para escribir $\sum_{n=1}^\infty \sigma(n)/n^s$ en términos de la función ζ.

9) Calcula la suma de $\tau(d)/d$ sobre los divisores de un mil.

10) Halla una fórmula explícita para $\sum_{d|n} d|\mu(d)|$ en términos de la factorización de n.

Después de la fórmula de inversión de Möbius hay un ejemplo que involucra la función φ. Sustitúyelo por la solución de:

11) Sea f la función característica de los cuadrados. Esto es, $f(n) = 1$ si n es un cuadrado perfecto y $f(n) = 0$ en el resto. Muestra que $\lambda = \mu * f$ usando la fórmula de inversión de Möbius.

Llegamos por fin al Lema 2.1.4. Como ves, es totalmente elemental. Acompáñalo con el ejemplo indicado a continuación:

12) Usando que $\sigma = \mathbf{1} * \mathrm{id}$ prueba $\sum_{n=1}^N = \frac{\pi}{12} N^2 + O(N \log N)$. Indicación: En caso de duda, mira el ejemplo con φ que es parecido. Aquí hay que usar $\sum_{m \le x} m = \frac{1}{2}x^2 + O(x)$.

Con esto hemos cubierto todo lo que puedes aprovechar de [1]. Ahora debes hacer un añadido relacionada con una función aritmética no multiplicativa llamada *función de von Mangoldt* definida como

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k,\ k \in \mathbb{Z}^+, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

13) Explica por qué está claro que $D_\Lambda(s)$ es absolutamente convergente en $\Re(s) > 1$.

14) Demuestra la relación $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(n)$.

15) A partir del ejercicio anterior y de lo que sabes de la expresión de series de Dirichlet como integrales, demuestra que para $\Re(s) > 1$ se cumple

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad \text{y} \qquad -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_1^{\infty} \psi(x) x^{-s-1}\, dx$$

donde $\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$. Indicación: Nota que $\zeta'(s) = -D_{\log}(s)$. Para la segunda fórmula, no puedes aplicar directamente el enunciado de la proposición que tenías porque requiere $\sigma_c < 0$. Sin embargo, en la prueba solo se necesita $A(\infty)g(\infty) = 0$.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que adapte y complete [1] en la línea de lo sugerido en los ejercicios. Si en algún momento ves más conveniente una ordenación alternativa a la indicada, no lo dudes. La extensión es libre dentro de límites razonables. Mi sugerencia es que no superes las 7 páginas. Esta hoja debe dar lugar a un segundo capítulo de tu TFG llamado *Funciones aritméticas*.

Referencias

[1] F. Chamizo. Funciones aritméticas y series de Dirichlet. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/2223tenum/notes/sec2.1.pdf`, 2022.

[2] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by A. Wiles.

[3] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan. *Multiplicative number theory. I. Classical theory*, volume 97 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[4] Wikipedia contributors. Fubini's theorem — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fubini%27s_theorem&oldid=1119521622`, 2022. [Online; accessed 3-November-2022].