Uno de los trucos de la llamada *matemagia* más famosos y antiguos es "el 21", cuyo nombre deriva de que se hace con 21 cartas. Consiste en adivinar una carta a partir de unos datos aparentemente poco informativos. Muchas veces se combina con algunos golpes de efecto, típicos de los magos, para darle más espectacularidad pero eso no añade nada a su fundamento teórico. Mi primera idea era que dieras protagonismo a este truco pero ahora creo que quizá es mejor dedicar más espacio a otro menos espectacular que también tiene su base en congruencias. Las razones son que "el 21" se vuelve mucho más natural desde el punto de vista matemático con 27 cartas (variante menos difundida) y, por otro lado, la explicación se puede llevar a cabo evitando hablar de congruencias.

Los dos trucos que vamos a analizar están explicados en vídeos de *numberphile*, un canal matemático de *youtube*. El que creo que debe tener protagonismo es una variante debida al matemático T. Tokieda (el que presenta el vídeo) de un truco que procede del mago H. Adams. Está en:

`https://www.youtube.com/watch?v=l9dXo5f3zDc`

El 21, con un ligero golpe de efecto final, lo puedes ver en :

`https://www.youtube.com/watch?v=d7dg7gVDWyg`

1) Mira la ejecución de los trucos de estos vídeos, es decir, hasta que empiezan las explicaciones. En el primero hasta 3:10 y en el segundo hasta 2:40.

Para la explicación doy por supuesto que conoces las congruencias porque se ven en el curso de *Conjuntos y números* de primero. En particular, debes conocer el teorema chino del resto. Si necesitas ayuda hay mucha información en la red. Un libro sencillo y claro es [Ros84].

2) Mira la explicación del primer truco (de 3:10 en adelante). Para ver que lo has entendido averigua el mínimo número de letras necesario para el caso de tres cartas.

3) Con un pequeño programa (mira los comentarios a continuación), calcula para un número de cartas dado $m \geq 2$, el número de letras mínimo $n = n(m)$ para que el truco funcione. Representa el resultado en escala semilogarítmica para $m \in [2, 30]$, es decir, haz una gráfica uniendo los puntos $\big\{\big(m, \log n(m)\big)\big\}_{m=2}^{30}$.

Te recomiendo que utilices `sagemath` (recuerda que en `https://sagecell.sagemath.org/` se puede usar *online*) porque te permitirá hacer un programa muy corto. En mi caso solo ocupa tres líneas. La clave es que el comando `crt` (abreviatura de *Chinese remainder theorem*) halla una solución correspondiente al teorema chino del resto. Su uso es `crt([...],[...])` donde en la primera lista se incluyen los valores de las congruencias, separados por comas, y en la segunda, los módulos. Por ejemplo,

`crt([6,2],[7,9])` produce `20` porque $x = 20$ es solución de $\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7}, \\ x \equiv 2 \pmod{9}. \end{cases}$

El empeño de tomar logaritmos para representar los resultados, es que $n(m)$ crece a toda velocidad[1] y sin la escala semilogarítmica no se vería nada. También explica por qué se ha escogido $m = 4$. Para $m = 2$ es trivial, para $m = 3$ no es difícil pensar en todos los casos y para $m = 5$ el valor de n es tan grande que el truco se haría impracticablemente largo.

Ahora viene una pregunta algo más teórica que lo mismo te cuesta. Intenta de todas maneras responderla.

4) Como se menciona alrededor de 9:55, la versión habitual del teorema chino del resto es con módulo coprimos. En otro caso podría no haber solución. Por ejemplo, $x \equiv 1 \pmod{6}$, $x \equiv 2 \pmod{15}$, no tienen solución simultánea. ¿Por qué en nuestro caso sí existe solución? Una posibilidad es que lo pienses por ti misma, otra es que hagas primero el siguiente ejercicio y otra más es que busques la versión generalizada del teorema a la que se refiere en el vídeo. Esto último puede ser más difícil porque es poco conocida debido a que su enunciado es feo.

5) Prueba la fórmula $n(m) = \text{mcm}(1, 2, 3, \ldots, m) - 1$ donde mcm indica el mínimo común múltiplo.

Si no has conseguido hacer antes un programa que sea sencillo, con esta fórmula tienes otra oportunidad. En `sagemath` el mínimo común múltiplo se calcula con `lcm([...])` porque `lcm` es la abreviatura de *least common multiple*.

6) [opcional] Para casi todos los primos $m > 2$ se cumple $n(m) = n(m+1)$. ¿Sabrías caracterizar aquellos primos para los que no se cumple? Tienen un nombre propio que seguramente te mencionaron en *Conjuntos y números*.

Ahora pasamos al truco "El 21". Aquí te voy a dar bastante libertad y me limitaré a mencionar algunas referencias. Lo único que te pido es que intentes dar una explicación lo más matemática posible con referencia a las congruencias.

7) Mira la explicación en el segundo vídeo (de 2:40 en adelante) y escribe tu versión de la explicación. Habla, si quieres, también de generalizaciones o variantes con las referencias que indico a continuación u otras que busques.

La explicación del vídeo empieza mencionando congruencias pero después no se refiere demasiado a ellas. Quizá es más clara la relación con las congruencias o con el sistema de numeración en base tres cuando se utilizan 27 cartas. Ambos trucos se tratan simultáneamente en la primera sección de [Vin11] que puedes descargar de la web de su autor:

`https://carlosvinuesa.com/project/matemagia-basica/`

[1] Se puede probar que $n(m)$ se "parece" a e^m en el sentido de que $m^{-1} \log n(m) \to 1$ cuando $m \to \infty$. Este es un resultado bastante difícil. Por otro lado, cuánto difiere $\log n(m)$ de m está relacionado con la Hipótesis de Riemann, uno de los problemas abiertos más famosos de las matemáticas.

Como se explica allí, en el caso de las 27 cartas esto se combina a veces con la exigencia de que la carta aparezca en el lugar del número favorito del espectador (para "el 21" esto no es del todo posible). También hay un vídeo de *numberphile* que lo explica:

`https://www.youtube.com/watch?v=l7lP9y7Bb5g`

En [Qui17] se estudia la generalización con más montones u otros números de cartas. "El 21" correspondería en la tabla de la p.76 al caso $a = 3$, $b = 7$. Allí se explica la situación en términos de puntos fijos y no me parece que la exposición sea tan clara. Generalizaciones similares se estudian en [HBG98] con técnicas formalmente distintas. En [Edg19] se aplica la misma idea que el caso de 27 cartas pero con factoriales.

Tarea a entregar. El documento a entregar debe contener una explicación matemática completa de estos trucos que involucre congruencias. En el caso del primer truco recuerda incluir la gráfica y el programa. Es importante que tengas en mente que no es lo mismo un vídeo que un texto escrito, por tanto te llevará tiempo contar con palabras o ilustrar con esquemas lo que en el vídeo ocupa un par de minutos. No escatimes explicaciones y escribe todo pensando que el lector no ha visto los vídeos.

Mi idea, como ya he sugerido, es que dediques más al primer truco, a no ser que te animes a estudiar algunas variantes o generalizaciones del segundo. La extensión que me parece razonable es de cuatro o cinco páginas. Yo tendería más a cinco.

Referencias

[Edg19] T. Edgar. A factorial card trick. *Math Horiz.*, 27(1):23–25, 2019.

[HBG98] J. Harrison, T. Brennan, and S. Gapinski. The Gergonne p-pile problem and the dynamics of the function $x \mapsto \lfloor (x + r)/p \rfloor$. *Discrete Appl. Math.*, 82(1-3):103–113, 1998.

[Qui17] R. Quintero. On a mathematical model for an old card trick. *Recreat. Math. Mag.*, (7):65–77, 2017.

[Ros84] K. H. Rosen. *Elementary number theory and its applications.* Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1984.

[Vin11] C. Vinuesa. Matemagia "básica". *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 14(1):133–147, 2011.