La función ζ de Riemann es una función de variable compleja que es muy importante para estudiar la distribución de los números primos. En su estudio es crucial una relación llamada la *ecuación funcional* que está ligada a la fórmula de sumación de Poisson. El plan para esta hoja es el siguiente:

1. Generalidades sobre la función ζ de Riemann.
2. La prueba clásica de la ecuación funcional.
3. La prueba con la fórmula de sumación de Poisson-Guinand.
4. Equivalencia ecuación funcional-Poisson.

Lo que me tienes que entregar es lo que te pido escribir en los ejercicios siguientes. Seguramente te quede un poco largo. Intenta sintetizar lo que puedas. Para reducir hay varias cosas que te recomiendo que des por supuestas sin indagar en las pruebas. Si no te ves con fuerzas para sintetizar completando todos los contenidos de la hoja, dímelo y te digo qué cosas quitar.

1. Generalidades sobre la función ζ.

1) Mira los 8 primeros minutos del vídeo `https://www.youtube.com/watch?v=VTveQ1ndH1c` (hasta que empieza a hablar de Ramanujan) y escribe unas pocas líneas (muy pocas) con lo que hayas sacado en claro. La "amazing symmetry" de la que habla es la ecuación funcional que vamos a estudiar. Lo último que menciona sobre cambios de signos, está relacionado con las *funciones L* que menciona al principio y nosotros no lo trataremos.

Si necesitas más información, hay mucha asequible en la red. También puedes mirar las primeras páginas de [Tit86] o [Ivi03]. Recuerda poner en la bibliografía lo que consultes, aunque sea someramente. También te puede servir lo que digo a continuación.

2. La prueba clásica de la ecuación funcional

Ya has aprendido que la función ζ de Riemann se define como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 0.$$

(Indico con $\Re$ e $\Im$ partes reales e imaginarias). La serie no converge en $\Re(s) < 1$, sin embargo se da la sorprendente situación de que es posible extender ζ a todo $\mathbb{C}$ a una función meromorfa con un solo polo de orden 1 en $s = 1$. A esto se le llama habitualmente la *continuación analítica* de ζ.

En relación con esto, hay una fórmula relativamente fácil de probar (pero que tú puedes dar por supuesto, citando por ejemplo [Ivi03] cuando la menciones en tu trabajo) que dice

$$\zeta(s) = \lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s}\Big) \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 0. \tag{1}$$

Nota que si $\Re(s) > 1$, se tiene la definición original porque $N^{1-s} \to 0$.

Por otro lado, hay una extraña simetría de esta extensión llamada *ecuación funcional* de ζ que se resume en la fórmula

$$\Phi(s) = \Phi(1-s) \qquad \text{donde} \quad \Phi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s). \tag{2}$$

No estoy seguro de que conozcas la función Γ. Si la has visto, seguramente sea en el curso de variable compleja. Se define como

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \qquad \text{para} \quad \Re(s) > 0.$$

Integrando por partes se tiene que

$$\Gamma(s) = s^{-1}\Gamma(s+1). \tag{3}$$

De esta manera se puede extender la definición a todos los valores $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\le 0}$. Por ejemplo, si quisiéramos hallar $\Gamma(-3/2+i)$, podríamos usar $\Gamma(s) = s^{-1}(s+1)^{-1}\Gamma(s+2)$ con $s = -3/2+i$ y para $\Gamma(s+2) = \Gamma(1/2+i)$ se puede usar la integral y aproximar el resultado con un ordenador. Concretamente $\Gamma(1/2+i)$ es aproximadamente $0{,}30 - 0{,}42i$ y de ahí $\Gamma(-3/2+i)$ es $0{,}19 + 0{,}17i$. Procediendo de esta forma, Γ se vuelve meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en $\mathbb{Z}_{\le 0}$. Una propiedad que utilizaremos más adelante es que

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(1-s)\,\mathrm{sen}(\pi s)}. \tag{4}$$

Viene de escribir juntas las llamadas *fórmula de duplicación de Legendre* y *fórmula de reflexión de Euler*. Las hayas visto o no en el curso de variable compleja, te sugiero que simplemente des por supuesto (4) y en tu trabajo cites como referencia [Ahl78]. Las fórmulas mencionadas vienen en las páginas 199 y 200. Te paso una copia escaneada de ellas por si tienes interés.

En la actualidad hay muchas pruebas de la ecuación funcional pero, como se lee en [Dav00, p.61] la original de Riemann usando sumación de Poisson es todavía hoy de las más elegantes. Además proporciona la continuación analítica sin esfuerzo adicional.

2) Lee la prueba de Riemann de la continuación analítica y (2) en las páginas 61–62 de [Dav00] hasta donde pone "unchanged when s is replaced by $1-s$". Como es habitual en este contexto, el autor llama σ a la parte real de s. La fórmula de sumación de Poisson se usa para obtener la ecuación [Dav00, p.62 (6)]. En este libro se pospone la prueba pero tú la puedes deducir de resultados anteriores de tu trabajo.

3) Escribe lo que has leído juntándolo con lo que creas conveniente decir acerca de la función Γ y haciendo referencia a otros resultados de tu trabajo para justificar [Dav00, p.62 (6)]. Menciona que una traducción de la memoria de Riemann, conservando incluso la notación, se puede encontrar en [Edw01].

4) Usando (3) y (4) deduce la fórmula

$$\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma\big((1-s)/2\big)} = \frac{2\cos(\pi s/2)\Gamma(s)}{2^s\sqrt{\pi}}$$

(Indicación: comienza cambiando $s \mapsto 2s+1$), con ello muestra que (2) también se puede escribir en la forma "asimétrica"

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos(\pi s/2)\zeta(s) \tag{5}$$

y añade este ejercicio a lo que has escrito.

3. La prueba con la generalización de Guinand

En [Gui41] se da una versión de la fórmula de sumación de Poisson con baja regularidad que permite deducir de manera bastante rápida (5), que equivale a (2). Como el enunciado original es un poco largo y lioso sugiero utilizar la siguiente consecuencia de [Gui41, Th. 3]. Recuerda que $L^p(\mathbb{R}^+)$ son las funciones que satisfacen $\int_0^\infty |f| < \infty$.

Teorema 1 (Guinand 1941) [1] *Si $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede escribir como $f(x) = \int_0^x (F_1 + F_2)$ con F_1 y F_2 tales que $\int_0^\infty F_1 = \int_0^\infty F_2 = 0$, $xF_1(x) \in L^p(\mathbb{R}^+)$ para algún $1 < p \le 2$ y $xF_2(x) \in L^2(\mathbb{R}^+)$, entonces se tiene la siguiente versión de la fórmula de sumación de Poisson:*

$$\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^N f(n) - \int_0^N f(t)\,dt\Big) = \lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^N g(n) - \int_0^N g(t)\,dt\Big)$$

donde $g(x) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(2\pi xt)\,dt$.

Lo que hace Guinand para probar (5) es tomar en su teorema, para un s real $0 < s < 1/2$,

$$F_1(x) = \begin{cases} (s-1)x^{s-2} & \text{si } 0 < x \le 1, \\ -e^{1-x} & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \le 1, \\ (s-1)x^{s-2} + e^{1-x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

[1] Para enunciar el teorema he añadido a la cabecera `\newtheorem{theorem}{Teorema}`, lo digo por si no lo tienes en el fichero de tu trabajo.

5) Comprueba que con esta elección $f(x) = x^{s-1}$ y que F_1 y F_2 satisfacen las hipótesis del teorema, para cualquier $0 < s < 1/2$. Indicación: Una posibilidad es tomar $p = (2-s)/(2-2s)$.

6) Halla g con algún cambio en la igualdad

$$\int_0^\infty t^{s-1}\cos t\, dt = \cos(\pi s/2)\Gamma(s)$$

que es bastante conocida (y puedes suponer).

7) Del teorema y de (1), deduce finalmente (5).

Aunque solo hemos probado (5) para $0 < s < 1/2$, eso es suficiente porque hay un teorema de variable compleja que dice que si dos funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ coinciden en un conjunto con puntos de acumulación, entonces coinciden en todo punto.

8) Redacta a tu gusto la prueba de (5) que acabamos de ver.

4. Equivalencia ecuación funcional-Poisson

Una cosa curiosa es que la ecuación funcional (5) implica la fórmula de sumación de Poisson. Parece que la prueba original está en [Fer37] (ponlo en las referencias). Hay otra en [Pat88]. Yo escribí también mi versión que es la que te recomiendo que sigas porque me es más familiar.

Para seguirla tienes que saber que ζ tiene un polo simple de orden 1 en $s = 1$ y que $\zeta(0) = -1/2$ (esto se deduce de cosas que hemos visto, concretamente de lo que has leído en [Dav00], pero para abreviar dalo por supuesto porque es bastante conocido). Supongo que conoces el teorema de los residuos pero lo más probable es que no conozcas la *fórmula de inversión de Mellin* que se usa en las pruebas. Lo que afirma es que para f continua en $\mathbb{R}^+$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)x^{-s}\, ds \qquad \text{donde} \quad F(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\, dx.$$

Aquí $c \in \mathbb{R}$ es un número cualquiera de forma que $F(c-\epsilon)$ exista (que $|f(x)|x^{c-\epsilon-1}$ sea integrable Lebesgue) para algún $\epsilon > 0$. Simplemente menciona que es una consecuencia más o menos directa de la fórmula de inversión de la transformada de Fourier pero no te recomiendo que gastes tiempo en buscar la prueba.

9) Lee `http://www.uam.es/fernando.chamizo/kiosco/files/funcpois.pdf` y escríbelo a tu gusto haciendo hincapié en los puntos que te haya costado más seguir. No te preocupes por las cuestiones de convergencia de las integrales, supón que está siempre garantizada.

Por si ayuda: Nota que lo que se utiliza es el cálculo de residuos $\text{Res}\big(F(s)\zeta(s), 0\big) = f(0)\zeta(0) = -f(0)/2$ y $\text{Res}\big(F(s)\zeta(s), 1\big) = \zeta(0) = F(1) = \int_0^\infty f$. Al pasar de una recta $\Re(s) = \sigma > 1$ a otra $\Re(s) = \sigma$ con $-1 < \sigma < 0$, los polos $s = 0$ y $s = 1$ están en la banda intermedia y por tanto hay que pagar con la suma de los residuos (teorema de los residuos).

Referencias

[Ahl78] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[Dav00] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2000. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.

[Edw01] H. M. Edwards. *Riemann's zeta function*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2001. Reprint of the 1974 original [Academic Press, New York; MR0466039 (57 #5922)].

[Fer37] W. L. Ferrar. Summation formulae and their relation to Dirichlet's series II. *Compositio Math.*, 4:394–405, 1937.

[Gui41] A. P. Guinand. On Poisson's summation formula. *Ann. of Math. (2)*, 42:591–603, 1941.

[Ivi03] A. Ivić. *The Riemann zeta-function*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003. Theory and applications, Reprint of the 1985 original [Wiley, New York; MR0792089 (87d:11062)].

[Pat88] S. J. Patterson. *An introduction to the theory of the Riemann zeta-function*, volume 14 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[Tit86] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1986. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.