Recuerda que estas hojas las iré poniendo en `http://www.uam.es/fernando.chamizo/posgrado/TFG/tfgs1718.html` donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos y algún párrafo que puede servirte para incluirlo en el informe intermedio (un papel protocolario breve que te pedirán a medio curso en el que tendrás que describir qué estás haciendo). Ya te di el enlace para descargarte el artículo [CR17]. No te deshagas de la copia en papel que ya tienes porque lo vamos a usar bastante como referencia.

Estas hojas imitan el formato del trabajo que se indica en la guía docente en cuanto a márgenes y tamaño de letra. La fuente LaTeX (los ficheros `JPhoja0*.tex`) te serán muy útiles como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias, sobre todo cuando al principio tengas menos soltura con LaTeX. Mi recomendación es que con ayuda de alguien lo instales cuanto antes en tu ordenador y pruebes a compilar esta hoja.

Las hojas incluyen explicaciones y referencias para que aprendas algunas cosas y algunos ejercicios. En el último o últimos de ellos te pondré lo que me tienes que enviar. En general será una primera redacción en LaTeX de un apartado para el trabajo. Yo lo corregiré y le mandaré de vuelta para que hagas los cambios indicados. Por supuesto que después se pueden hacer correcciones de conjunto para que todo cuadre mejor pero la idea es que, en la medida de lo posible, estos trozos conformen el trabajo. El límite es de 30 páginas, según la guía docente, lo que hace una media de unas 4 páginas por cada apartado, aunque unos serán más largos que otros.

Te comienzo explicando un poco de análisis de Fourier básico, que ya conoces, para que lo recuerdes y para unificar notación. Dada una función f de periodo uno "buena", por ejemplo $f \in C^1$ (esto es, con derivada continua) se cumple

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x} \qquad \text{con} \quad c_n = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx. \tag{1}$$

Esto es lo que llama *desarrollo de Fourier* de f o *serie de Fourier* de f, con c_n sus *coeficientes de Fourier*. La serie se entiende como límite de $\sum_{|n|<N}$ con $N \to \infty$. En la fórmula para c_n, por la periodicidad, se puede integrar entre cero y uno o en cualquier intervalo de longitud 1, es irrelevante. Si usas $e^{2\pi i n x} = \cos(2\pi n x) + i \operatorname{sen}(2\pi n x)$ y separas partes reales e imaginarias, llegas a las fórmulas con senos y cosenos que conoces de un curso anterior. A pesar de los números complejos, (1) suele ser más cómoda tanto para hacer cálculos como para recordarla, por su simetría.

Hay una especie de análogo de (1) para funciones que no sean periódicas pero que decaigan suficientemente rápido, esencialmente reemplazando la suma por una integral y extendiendo la integración a $\mathbb{R}$. Es decir, bajo ciertas condiciones de regularidad que ahora no vienen al caso, se tiene

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}\, d\xi \qquad \text{con} \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx. \tag{2}$$

Se dice que $\widehat{f}$ es la *transformada de Fourier* de f. Más que la fórmula (2), llamada *fórmula de inversión*, lo relevante para el trabajo es tener en mente la definición de $\widehat{f}$, que posiblemente aparecido en el curso en el que viste series de Fourier. Si se pide que f sea integrable ($f \in L^1$), $\widehat{f}$ está bien definida pero la fórmula de inversión requiere más regularidad.

Para los primeros ejercicios, no te preocupes de la regularidad necesaria, que abordaremos más tarde.

1) Lee la demostración de la fórmula de sumación de Poisson dada en [CR17, §1] tratando de entender bien la segunda igualdad de (1.4).

2) Escribe la prueba de (2.1) de [CR17] usando la fórmula de sumación de Poisson. Agrupa $\widehat{f}(n)$ con $\widehat{f}(-n)$ para que te salga el segundo miembro tal como esta escrito.

3) Divide la identidad obtenida por α/π, resta $1/\alpha^2$, toma límites cuando $\alpha \to 0$ y obtén $\pi^2/6 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. El límite del primer miembro te puede resultar lioso. Una opción es que uses las aproximaciones de Taylor hasta orden tres $e^x + e^{-x} \sim 2 + x^2$ y $e^x - e^{-x} \sim 2x + x^3/3$ para que, después de operar, el límite sea de un cociente de polinomios. ¿Sabrías decir por qué hay que usarlo hasta orden tres?

Para el siguiente ejercicio tienes que calcular La integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha x^2} e^{-2\pi i n x}\, dx$. quizá te haya aparecido en los cursos de probabilidad o estadística. Te sugiero que des por conocido $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. Una manera de proceder es hacer un cambio complejo en I. Otra es resolver una EDO sencilla. Esto último lo puedes ver en este TFG del año pasado: `http://www.uam.es/fernando.chamizo/posgrado/TFG_silvia.pdf`. Lo que quieres es (6) y lo de la EDO son los dos últimos puntos de la p.11 (16 del PDF).

4) Prueba de (2.2) de [CR17].

5) Para ver que has entendido la fórmula, demuestra la *fórmula de sumación de Poisson en progresiones aritméticas*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(qn+a) = \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i a n/q} \widehat{f}(n/q).$$

Lo único que tienes que hacer es aplicar la fórmula original a $f(x) = F(qx+a)$ y hacer un cambio de variable.

La regularidad necesaria para justificar la prueba de la fórmula de sumación de Poisson es un tema un poquito complejo. Se puede probar que se cumple si f es continua y $|f(x)|$ y $|\widehat{f}(x)|$

son menores que $K(1+|x|)^{-\sigma}$ para algunas constantes $K>0$ y $\sigma>1$. Este es el Corolario 2.6 de [SW71]. Fíjate que esto asegura que las dos series que aparecen en la fórmula convergen. En la p.68 de [Zyg88] se prueba que es suficiente que se cumplan simultáneamente las siguientes propiedades:

- $\int_{-\infty}^{\infty}|f|<\infty$ (se suele escribir $f\in L^1$).
- $2f(x)=\lim_{h\to 0}\big(f(x+h)+f(x-h)\big)$. Por supuesto, esto está asegurado si es continua.
- f es de variación acotada en $\mathbb{R}$.

Lo único que quizá no te suene es lo último. Si nunca lo has oído y no consigues enterarte bien de qué es, simplemente ten en cuenta que una función f derivable a trozos tal que $f,f'\in L^1$, es siempre de variación acotada.

La prueba que da [Zyg88] de este resultado es muy concisa pero quizá te sea asequible. Cuando la mires puedes dar por supuesto el Teorema 8.1 que utiliza, porque es un teorema famoso de series de Fourier.

Te aclaro lo que me tienes que entregar (en formato electrónico `.tex` y `.pdf`). Insisto en que trates de instalar cuanto antes LaTeX y empieces a escribir aunque vayas muy lento. No desesperes porque al principio es difícil. El fichero fuente de esta hoja te servirá para copiar fórmulas o ver cómo se escriben.

6) Redacta lo que has hecho en los ejercicios anteriores dando las explicaciones que consideres necesarias, sobre todo en lo que más te haya costado. Escribe también al menos el enunciado del resultado que te he mencionado de [Zyg88] y, si es posible, trata de explicar la prueba. Todo ello conformará la sección “La fórmula básica” de la propuesta. No creo que llegue a tres páginas, pero te dejo bastante libertad.

Referencias

[CR17] F. Chamizo and D. Raboso. La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos. *Materials matemàtics*, pages 1–27, 2017.

[SW71] E. M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Princeton Mathematical Series, No. 32.

[Zyg88] A. Zygmund. *Trigonometric series. Vol. I, II.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. Reprint of the 1979 edition.