Esta hoja tiene dos partes muy distintas. La primera está destinada a los conceptos más básicos relativos a grupos de Lie y sus álgebras de Lie. En la segunda te propongo que aprendas un poco, con la profundidad que desees, acerca del principio gauge que es fundamental para entender el modelo estándar.

1) Busca la definición de grupo de Lie y de los grupos de matrices $\mathrm{SO}(N)$, $\mathrm{SU}(N)$, $\mathrm{U}(N)$ y $\mathrm{Sp}(N)$. Redáctalo para tu trabajo

Para cualquier cosa relativa a los grupos de matrices te sugiero la referencia [Sti08].

Implícitamente, sin decirlo cada vez, vamos a suponer que los grupos de Lie son conexos. En tu trabajo además solo nos ocuparemos de grupos de Lie compactos. Una consecuencia del teorema de Peter-Weil que veremos en la próxima hoja, es que estos son isomorfos a grupos de matrices, de hecho a subgrupos de $\mathrm{U}(N)$, por ello cuando nos convenga podemos considerar que los elementos del grupo son matrices unitarias.

2) Es posible mostrar que $\mathrm{SU}(2)$ es lo mismo (isomorfo como grupo de Lie) que los cuaterniones de módulo 1 que geométricamente dan la esfera S^3. Estudia estos isomorfismos buscando referencias o intentando averiguarlos por ti mismo. Para ver que lo has entendido calcula el resultado de dividir en S^3 el punto $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ entre $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, donde se entiende dividir como post-multiplicar por el inverso.

Si G es un grupo de Lie, dado un vector tangente en el elemento neutro e, podemos trasladarlo a cualquier otro punto $g \in G$ por medio de la aplicación tangente $df_g : T_e(G) \longrightarrow T_g(G)$ de la aplicación pre-multiplicar por g, $f_g(h) = gh$. Con ello se tiene un campo de vectores en todo G, que se dice que es *invariante por la izquierda*. Esta posibilidad de poder crear de manera canónica un campo de vectores que refleja las simetrías del grupo a partir de un solo vector, es crucial en varios resultados sobre grupos de Lie.

3) Deduce de esta construcción y del teorema de la bola de pelo que S^2 no es un grupo de Lie. Es decir a nadie se le puede ocurrir una manera diferenciable con estructura de grupo de multiplicar vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$. ¿Qué es lo que falla con el producto vectorial normalizado?

Se puede probar que las únicas esferas que son grupos de Lie son S^1 y S^3. Si tienes interés, busca la prueba pero de la que he oído hablar tiene prerrequisitos avanzados, se basa en construir una 3-forma cerrada no exacta y usar que el grupo de cohomología $H^3(S^n)$ es trivial para $n > 3$.

4) Lee [Cha17, §5] y escribe con detalle las explicaciones de (45) y (46).

5) Demuestra que $\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(XY)$ define un producto escalar en $\mathfrak{su}(2)$ y comprueba que $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ con σ_j las matrices de Pauli es una base ortonormal de dicha álgebra de Lie.

Por si tienes curiosidad, para $\mathfrak{su}(3)$ la base ortonormal habitual que se toma da lugar a las llamadas *matrices de Gell-Mann* relacionadas con los quarks.

6) Busca las definiciones de la aplicación exponencial y de las constantes de estructura y escribe un poco sobre ello.

7) Trata de buscar en internet o en la literatura las constantes estructura de $\mathfrak{so}(N)$ (para la base que quieras) y escribe unas líneas explicando de dónde salen.

Si X e Y son matrices que conmutan (si quieres unitarias, aunque da igual), se cumple $e^X e^Y = e^{X+Y}$ sin embargo cuando no conmutan hay que sustituir esta relación por la *fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff*. Esta es una fórmula bastante aparatosa y sus pruebas un poco feas.

8) Desarrollando por Taylor alrededor de $h = 0$ (aquí $h \in \mathbb{R}$) comprueba que $e^{hX}e^{hY}$ y e^Z con $Z = h(X+Y) + \frac{1}{2}h^2[X, Y]$ son iguales hasta orden dos. Esto prueba los primeros términos de la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff.

De acuerdo con tus preferencias, te propongo que estudies un poco el principio gauge e incluso si te animas con ello, mires por encima cómo se usa en el modelo estándar. Todo esto es una tarea complicada y depende de ti la profundidad con que quieras abordar el último ejercicio que te propongo.

Voy a contarte algunas cosas sin fórmulas que te pueden ayudar si no sabes nada del tema y te puedes saltar en caso contrario.

En mecánica clásica la información acerca del movimiento de una partícula en un campo se representa a menudo mediante un lagrangiano cuyas ecuaciones del Euler-Lagrange dan las ecuaciones de movimiento. Por medio del teorema de Noether, las simetrías de tal lagrangiano se traducen en leyes de conservación. Por ejemplo, la invariancia por el grupo de Lie SO(3) en situaciones básicas da lugar a la conservación del momento angular.

En la forma que se usa en el modelo estándar, el significado del lagrangiano es distinto, más que dar información mecánica de cómo se mueven las partículas (lo cual en este contexto tiene poco sentido) es más bien una lista que indica todas las cosas que pueden interactuar. En el modelo estándar hay quarks de diferentes colores y sabores combinados con leptones y bosones y la lista es complejísima. Posiblemente escrito explícitamente con todos los términos el lagrangiano ocuparía más de una página[1]. El *principio gauge* pone orden en todo ello diciendo cómo obtener un lagrangiano a partir de un grupo de Lie de "simetrías" puramente abstracto que viene la imaginación de los teóricos motivado por lo observado en los aceleradores. En realidad la parte del lagrangiano del modelo estándar relacionada con el bosón de Higgs no viene del principio gauge y está puesta a mano porque si no ciertas predicciones (ausencia de masa) serían erróneas.

Dado un grupo de Lie compacto, el principio gauge considera *campos gauge* que en cada punto (y en realidad para cada coordenada) son elementos del álgebra de Lie. De esta forma tales campos se pueden expresar como combinación lineal de una base del álgebra de Lie convenientemente normalizada. Cada elemento de esa base físicamente se asocia a un bosón que media las interacciones del campo.

9) La teoría electrodébil responde al grupo $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$. ¿Cuántos bosones tiene?

La manera de crear un lagrangiano con el principio gauge consiste, en pocas palabras, en partir del lagrangiano para una partícula libre, sin interacciones, cambiar las derivadas por derivadas más campos gauge y añadir un término llamado cinético, creado a partir de los campos gauge de una manera similar a la curvatura en geometría riemanniana.

En el caso de la teoría cuántica de campos (QFT), que es el que aparece en el modelo estándar, el lagrangiano de partida de la partícula libre es el que corresponde a la ecuación de Dirac

$$\mathcal{L} = i\overline{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\overline{\Psi}\Psi$$

donde se usa el convenio de sumación (se suma en $0 \le \mu \le 3$) y $\overline{\Psi}$ no es el conjugado que escribiría un matemático sino $\Psi^\dagger\gamma^0$ con $\Psi^\dagger$ el traspuesto conjugado de la función de ondas Ψ que en este contexto es un vector de cuatro coordenadas. Las matrices de Dirac γ^μ tienen que ver con representaciones de un grupo de Lie que no es compacto, a diferencia de los que aparecerán en tu trabajo. No entraremos en ello, solo te diré que provienen de representaciones del grupo de Lorentz, concretamente de imponer que las funciones de onda se transforman mediante $\Psi(x) \mapsto D(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x)$ con D una representación cuando se hace actuar una transformación de Lorentz $x \mapsto \Lambda x$ sobre el espacio tiempo.

Como ves, solo entender la notación ya lleva su tiempo si no lo has visto antes. Por eso haz el siguiente ejercicio con la profundidad que consideres. Puede reducirse a contar algunas generalidades y a entender y reflejar "An example: Scalar $\mathrm{O}(n)$ gauge theory" de [Wik18].

10) Escribe al menos una página sobre el principio gauge mencionando algún ejemplo no abeliano. Dependiendo de tus intereses, tiempo y capacidades puedes adentrarte o no en una descripción un poco más precisa del uso de estas ideas en el modelo estándar.

[1] Por curiosidad he buscado al azar y he encontrado [Shi16]. Deshaciendo los sumatorios implícitos, supongo que serían varias páginas.

Por si quieres ir bastante más allá, algunas referencias que te pueden ser útiles son [QM09], [Nov00] (hasta la página 25) y [Zee16, IX.1] (primeros epígrafes). Para mi gusto, [Fol08, Ch.9] da muy buena información suponiendo que uno ya sabe algo de QFT. Lo mismo se aplica a los capítulos 14 y 46 de [LB14].

Termino dándote la referencia [BB96] que es una mera anécdota muy simple que me ha parecido simpática, por si te apetece mirarla. En la divulgación se presenta a los gluones (los bosones de la interacción fuerte) como partículas que cambian el color de un quark gracias a que están compuesto de un color y un anticolor. Esto daría en principio 9 posibilidades, porque hay tres colores con sus tres anticolores, pero solo hay 8. La explicación es olvidarse de los colores y pensar en álgebra lineal.

Tarea a entregar. Siguiendo el esquema marcado por la primera parte de esta hoja, escribe un documento LaTeX que contenga las definiciones básicas relativas a los grupos de Lie y sus álgebras de Lie así como los ejemplos más notables de grupos de Lie de matrices y alguna referencia a la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff. Una vez hecho esto, pon en práctica la segunda parte de la hoja añadiendo lo que hayas escrito para el último ejercicio.

Para la primera parte el límite que te sugiero es de cuatro páginas. Para la segunda parte te sugiero una página si te quedas en el versión reducida. Si haces una descripción del modelo estándar te puedes alargar lo que consideres necesario.

Referencias

[BB96] J. Bottomley and J. Baez. Why are there eight gluons and not nine? `http://math.ucr.edu/home/baez/physics/ParticleAndNuclear/gluons.html`, 1996.

[Cha17] F. Chamizo. Un poco de representaciones, grupos de Lie compactos y autovalores de Laplacianos. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/lie_eig.pdf`, 2017.

[Fol08] G. B. Folland. *Quantum field theory*, volume 149 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. A tourist guide for mathematicians.

[LB14] T. Lancaster and S. J Blundell. *Quantum field theory for the gifted amateur*. Oxford University Press, 2014.

[Nov00] S. F. Novaes. Standard model: An introduction. arXiv:hep-ph/0001283, 2000.

[QM09] N. Quintero and F. Molina. Una descripción sencilla de las Teorías Gauge. *Tumbaga*, 1(4):19–29, 2009.

[Shi16] R. Shivni. The deconstructed Standard Model equation. Symmetry Magazine. `www.symmetrymagazine.org/article/the-deconstructed-standard-model-equation`, 2016.

[Sti08] J. Stillwell. *Naive Lie theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2008.

[Wik18] Wikipedia contributors. Gauge theory — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. [Online; accessed 30-November-2018].

[Zee16] A. Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton University Press, 2016.