Primero te recuerdo algunas cosas generales:

Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. Imitan el formato del trabajo que se indica en la guía docente en cuanto a márgenes y tamaño de letra. La fuente LaTeX, los ficheros `JP18hoja*.tex`, la podrás usar como plantilla y para copiar fórmulas y referencias. Dependiendo de tu soltura con LaTeX esto será de mayor o menor utilidad. Yo uso BibTeX para las referencias, que las toma de un fichero externo, pero te mandaré los ficheros para que lo puedas compilar sin ello (a no ser que sepas y quieras usarlo). Si alguna vez necesitas referencias que no ves en la fuente, házmelo saber porque será que se me habrá olvidado cambiarlo.

Las hojas incluyen explicaciones y referencias para que aprendas algunas cosas y algunos ejercicios. Al final te indicaré lo que me tienes que enviar. En general será una primera redacción en LaTeX de un apartado para el trabajo. Yo lo corregiré y te lo mandaré de vuelta para que hagas los cambios indicados. Por supuesto que después se pueden hacer correcciones de conjunto para que todo cuadre mejor pero la idea es que, en la medida de lo posible, estos trozos conformen el trabajo. El límite es de 30 páginas, según la guía docente, lo que hace una media de unas 4 páginas por cada apartado, aunque unos serán más largos que otros.

Pasando a generalidades sobre tu trabajo, como ya sabes, escribí [Cha17] y seguiremos parte de su esquema. En la última sección, puedes ver recomendaciones sobre algunas referencias. Como ves, mi opinión sobre los libros sobre grupos de Lie y representaciones no es muy buena en general, dentro de los que conozco. En la propuesta inicial incluí también [Sti08] y [Zee16]. El primero esta explicado de manera atractiva y sencilla aunque cubre pocos contenidos de los que veremos. El segundo no lo conocía cuando escribí [Cha17] y aunque no me lo he leído de principio a fin, lo que he visto me ha gustado bastante. En la medida de lo poco que sé, siguiendo tus gustos, intentaré orientar algunas partes de tu trabajo hacia la física y así lo he plasmado en el temario. En ese sentido, [Zee16] puede ser bastante útil. Un libro con bastante difusión escrito por un físico famoso es [Geo82]. Comienza bien pero después no consigo seguirlo. Lo mismo si tienes más conocimientos de partículas que yo, tú le saques más provecho. En las hojas trataré de contarte algunos temas físicos para que reflejes lo que quieras en tu trabajo. Si ves que el “rollo” que escribo al respecto es demasiado farragoso, que ya te lo sabes o que no te interesa mucho, por favor, dímelo con toda franqueza y sin ningún remilgo.

En esta primera hoja vamos a ver ideas básicas alrededor del concepto de representación. Lo primero seguramente ya lo has hecho pero por si acaso:

1) Lee la definición de representación y examina algún ejemplo básico como los de S_3 en [Cha17, §1] o de S_4 en [Zee16, p.90].

Aunque ahora sea muy difícil encontrar referencias a ello en los textos, inicialmente el uso de representaciones contó con gran oposición entre físicos de primera línea [Zee16, p.46] ¡incluido Pauli! Es fácil entender la razón: la teoría es sumamente abstracta y era sospechosa de introducir más matemáticas en la física de las que eran necesarias. Esta situación muestra que el concepto de representación no es demasiado "natural" incluso para científicos muy brillantes con un gran dominio de las matemáticas. Por eso te propongo que una tarea que seguramente no te lleve un gran esfuerzo matemático pero sí bastante tiempo:

2) Intenta recabar información que motive el concepto de representación mencionando alguna de sus aplicaciones y de sus propósitos.

Puedes tomar como punto de partida [Cha17, §1] pero intenta mirar más referencias. Te adjunto escaneadas las páginas 160–162 de [Sha90]. Sobre todo en la primera página, se hace una reflexión casi filosófica de la motivación de las representaciones con alguna referencia vagamente física. Si no te dice nada, olvídalo. A mí me suena bien.

Aparte de lo que leas, te escribo a continuación unos comentarios con trasfondo físico por si te ilustra algo. La ecuación de Schrödinger es una ecuación lineal del tipo

$$\hat{H}\Psi = i\frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{1}$$

Supongamos que hay algún grupo de simetrías G (que no involucre el tiempo) que deja invariante esta ecuación. Como las soluciones forman un espacio vectorial, para cada g hacer actuar una simetría es un operador lineal $D(g)$ sobre las soluciones. Olvidándonos de las posibles pegas matemáticas (operador no acotado o que el espacio de soluciones sea de dimensión infinita), este operador lineal es una representación y pasa soluciones a soluciones, así que debe satisfacer

$$\hat{H}D(g)\Psi = i\frac{\partial D(g)\Psi}{\partial t} \quad \text{o equivalentemente} \quad D(g)^{-1}\hat{H}D(g)\Psi = i\frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Según esto, al comparar con (1), en el espacio en el que trabajamos $D(g)^{-1}\hat{H}D(g) = \hat{H}$. Los autovalores de $\hat{H}$ son las energías y es fácil deducir de la última igualdad que $D(g)$ pasa estados (los matemáticos diríamos autofunciones) con una cierta energía a otros estados con esa misma energía. Es decir, que $D(g)$ preserva los autoespacios.

3) Convéncete de esto con una cuenta sencilla.

Cuando la representación $D(g)$ actuando sobre un autoespacio o un subespacio suyo es irreducible, quiere decir que no se puede romper en trozos más pequeños distinguibles por las simetrías del grupo. En el caso de partículas, se dice que la representación irreducible corresponde a un multiplete. Por ejemplo, en teoría, un triplete está asociado a un espacio vectorial de dimensión 3 en el que no hay manera canónica de especificar una base: cada base correspondería a una elección arbitraria de tres cosas a las que llamar partículas de manera que el resto sean combinaciones de ellas. En la práctica, las simetrías no las respetan otras interacciones y es posible distinguir partículas individuales. Por ejemplo, el Σ-triplete está asociado a los bariones Σ^+, Σ^0 y Σ^-, tres partículas muy parecidas, en particular de masas (energías) similares, pero con las cargas que indica el superíndice. Si consiguiéramos apagar la carga, que no participa en la interacción fuerte, no serían distinguibles.

Para evitar confusiones, quiero mencionar que en la física de partículas uno no calcula las simetrías de una ecuación que venga de primeros principios sino que se inventa las simetrías (son "simetrías internas") de manera que le expliquen las partículas que se ven en los aceleradores. Por ser más concretos, el SU(3) que introdujo Gell-Mann para el modelo inicial de quarks no se deduce matemáticamente de nada sino que se induce del hecho de que las partículas parecen agrupadas en ciertos multipletes y uno busca un grupo para que sus representaciones expliquen los números.

Lo segundo que vamos a abordar son las definiciones y los resultados más sencillos relativos a las representaciones.

4) Busca en la bibliografía las definiciones de representación irreducible, unitaria, de representaciones equivalentes y de dimensión (o grado) de una representación. Redáctalas todas con una notación que sea común.

5) Busca también las definiciones de las operaciones de suma directa y producto tensorial de representaciones. Redáctalas escribiendo también la idea con palabras o algún ejemplo sencillo.

El producto tensorial, no ya de representaciones sino de espacios vectoriales es algo más simple de lo que parece sugerir su definición matemática. En pocas palabras es el dual del producto habitual. Por ejemplo, si V y W son espacios de dimensión dos entonces $V \otimes W$ se puede entender como el espacio de formas bilineales generado por todos los productos de coordenadas de vectores genéricos de V, digamos $(x_1, x_2)^t$ y de W, digamos $(y_1, y_2)^t$. Es decir, una base natural es $\{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2\}$. De una forma algo vaga (no lo tomes al pie de la letra), la importancia del producto tensorial en física cuántica está relacionado con que las funciones de onda dan amplitudes de probabilidad y la probabilidad de la intersección viene a menudo dada por el producto de las probabilidades. Así $|\Psi_1\rangle = \frac{3}{5}|+\rangle + \frac{4}{5}|-\rangle$ significa partícula con $(3/5)^2$ de posibilidades de espín arriba y $(4/5)^2$ abajo. Si la estudiamos formando un sistema con otra con $|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$, 50 % de posibilidades de arriba o abajo, entonces que la primera y la segunda sean $|+\rangle$ tiene probabilidad $(3/5)^2 \cdot (1/\sqrt{2})^2$, etc. y los coeficientes que hay que elevar al cuadrado son los de $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$ por tanto resulta natural identificar $|+\rangle \otimes |+\rangle$, etc. como los estados de espín indicados en el primer factor para la primera partícula y en el segundo para la otra.

A medio camino entre las definiciones y los resultados está la descomposición de una representación.

6) Enuncia y prueba que toda representación es suma directa de representaciones irreducibles.

Seguramente el resultado más fundamental en teoría de representaciones es el lema de Schur.

7) Escribe el enunciado y la prueba de las dos formas más habituales del lema de Schur y sus pruebas.

Con lo de las dos formas me refiero a dos enunciados que correspondan a los dos apartados que se dan por ejemplo en [Wik18].

Finalmente vamos con dos ejemplos, uno con un grupo finito y el otro con uno infinito, que posiblemente serán más avanzados que los que has incluido en lo que hayas escrito.

Considera el espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ de las funciones $f : \{1,2,3\} \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $f(1) + f(2) + f(3) = 0$. Está claro que S_3 actúa sobre V mediante $f \mapsto f \circ \sigma^{-1}$ para cada $\sigma \in S_3$. Tomemos la base $B = \{f_1, f_2\}$ de V dada por $f_1(1) = f_2(1) = 1$, $f_1(2) = f_2(3) = -1$ y $f_1(3) = f_2(2) = 0$.

8) Prueba que la acción de S_3 sobre V define una representación π de S_3 y halla las matrices (en la base B) correspondientes a las trasposiciones $(1,2)$ y $(2,3)$. Comprueba que realmente $\pi\big((1,2,3)\big)$ es una matriz de orden 3.

9) Demuestra que π es irreducible. En [Cha17, §1] se afirma que π_3 es la única representación de S_3 de dimensión 2, por tanto π debe ser equivalente a ella. Pruébalo escribiendo explícitamente las matrices que dan la equivalencia.

Considera el espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ de las formas cuadráticas binarias $ax^2 + bxy + cy^2$ con base $B = \{x^2, 2xy, y^2\}$. Cada forma cuadrática $Q \in V$ tiene asociada una matriz simétrica S_Q de la manera habitual. Por ejemplo:

$$x^2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 2xy \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10) Sea $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, el grupo de matrices reales 2×2. Demuestra que $S_Q \mapsto AS_QA^t$ con $A \in G$ induce una representación π de G de dimensión 3. Escribe explícitamente la fórmula para $\pi(A)$ en la base B en función de los elementos de A. ¿Sabrías demostrar que π es irreducible?

Ya conoces que en física SU(2) es un grupo importante. Resulta que todas sus representaciones irreducibles se consiguen esencialmente como en el ejemplo anterior cambiando las formas cuadráticas por formas de cualquier grado. Por otro lado, este procedimiento "sencillo" cambiando formas binarias por ternarias, no funciona para SU(3). En ese caso puede haber más de una representación irreducible con la misma dimensión [Geo82, §10.10] y se pueden entender algunas de sus propiedades gráficamente [Geo82, §10.11] a través de la teoría de raíces y pesos que en algún momento veremos.

Tarea a entregar. Escribe un documento LaTeX que contenga los tres puntos que has visto en esta hoja: 1) motivación e ideas generales sobre representaciones de grupos; 2) definiciones y resultados básicos; 3) ejemplos. La estructura depende de ti, lo mismo prefieres incorporar los ejemplos al tiempo que hablas de la teoría o posponer los más avanzados al final. Como tú prefieras.

No te voy a imponer una extensión muy estricta. Digamos que el total no exceda de seis páginas. Por otro lado me extraña que lo puedas contar en menos de tres. Quizá seis se te queden muy cortas si intentas escribir todo lo que has hecho. No es ese el objetivo, trata de sintetizar y no poner todos los pasos en los ejemplos. Sería ideal que te distanciaras de la literatura existente poniendo el énfasis en ideas más que en aspectos formales.

Tómate el tiempo que necesites, mientras sea razonable, y pídeme ayuda para cualquier duda de LaTeX. Incluye cualquier referencia de las que pongo u otra que hayas encontrado tú a la que hayas dado un mínimo vistazo. Si usas BibTeX y prefieres que te pase el `.bib`, dímelo.

Si no te aclaras acerca de cómo dar formato a enunciados y pruebas de teoremas en LaTeX, quizá te convenga dar un vistazo a `https://es.sharelatex.com/learn/Theorems_and_proofs`. La dirección, está enlazada en mi página del TFG, por si no quieres teclearla.

Referencias

[Cha17] F. Chamizo. Un poco de representaciones, grupos de lie compactos y autovalores de Laplacianos. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/physics/files/lie_eig.pdf`, 2017.

[Geo82] H. Georgi. *Lie algebras in particle physics*, volume 54 of *Frontiers in Physics*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1982. From isospin to unified theories, With an introduction by Sheldon L. Glashow.

[Sha90] I. R. Shafarevich. *Algebra. I*, volume 11 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Basic notions of algebra, Translated from the Russian by M. Reid.

[Sti08] J. Stillwell. *Naive Lie theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2008.

[Wik18] Wikipedia contributors. Schur's lemma — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. [Online; accessed 14-September-2018].

[Zee16] A. Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton University Press, 2016.