Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. La fuente LaTeX, en los ficheros `JB21hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias, sobre todo si al principio tienes menos soltura con LaTeX. Más o menos imita el formato del trabajo que se indica en la guía docente en cuanto a márgenes y tamaño de letra. Es totalmente necesario que tengas acceso cuanto antes a LaTeX, o bien porque lo instales en tu ordenador o bien porque te registres en Overleaf sin instalar nada (`https://www.overleaf.com/`).

Por si te sirve de algo, en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/computer/latex/latex.html` hay una guía de LaTeX desde cero que escribí para un curso y una colección de algunos trucos más avanzados. Para que nos podamos comunicar, es fundamental que tengas conocimientos básicos de LaTeX.

Esta hoja está dedicada a la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de la mecánica. Si ya la conoces, te costará muy poco. Supondré en mis explicaciones que no sabes nada al respecto. No nos meteremos en muchas finuras porque no las necesitarás para tu trabajo. Tampoco te preocupes de que todo esté con un lenguaje impecablemente matemático porque no merece la pena. Todo lo que tienes que aprender es que hay métodos generales de resolver problemas de mecánica mucho más convenientes que utilizar $F = ma$. Te lo explico en los siguiente párrafos y después te doy algunas referencias por si no es suficiente.

Recuerda (o aprende) que la *energía cinética* T de una partícula de masa m con velocidad v es $\frac{1}{2}mv^2$. En coordenadas cartesianas escribiremos algo más esotérico:

$$T = \frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\big)$$

porque para los físicos, por herencia de Newton, un punto sobre una función indica que se deriva con respecto del tiempo y dos, una derivada segunda. La *energía potencial* es una función $V = V(x, y, z)$ tal que $\vec{F} = -\nabla V$ nos da la fuerza sobre la partícula. Sumar a V una constante es irrelevante porque corresponde a la misma fuerza. Para esta partícula, el Lagrangiano en coordenadas cartesianas es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \tag{1}$$

donde L se considera función de seis "variables" x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ e indirectamente del tiempo. Seguramente te suenen de alguna asignatura las *ecuaciones de Euler-Lagrange* asociadas a un $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, las cuales son

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad \text{con} \quad j = 1, 2, \dots n. \tag{2}$$

La derivada parcial dentro del paréntesis puede producir reparos a un matemático muy riguroso porque estamos considerando $\dot{q}_j$ como una variable cuando es la derivada de una función. Es algo tan asentado, que es batalla perdida cambiar la notación.

En nuestro caso (1), para $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, con $j = 1$ se tiene

$$\frac{d}{dt}\big(\frac{1}{2}m(2\dot{x})\big) = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{que equivale a} \quad m\ddot{x} = F_1$$

y lo mismo con las otras variables, con lo cual (2) es solo una manera rara de escribir $\vec{F} = m\vec{a}$.

Las ventajas de (2) es que sigue funcionando si usamos coordenadas que no sean cartesianas, llamadas *coordenadas generalizadas*, y también funciona en sistemas de más partículas y si hay restricciones en el movimiento, llamadas *ligaduras*. El número de coordenadas n se puede escoger como el número mínimo de coordenadas para caracterizar el sistema físico considerado, llamado *número de grados de libertad*. Por ejemplo en un péndulo de un reloj hay un grado de libertad porque basta dar el ángulo para caracterizar su posición, mientras que para una partícula que se mueve en la superficie terrestre hay dos porque es necesario conocer su latitud y longitud.

La fórmula $\vec{F} = m\vec{a}$ no queda invariante al cambiar de coordenadas y la mecánica basada en ella se vuelve complicada cuando se consideran ligaduras porque requieren introducir fuerzas que no vemos, como la tensión de una cuerda que impide que caiga lo que colgamos de ella o la reacción de una pared que nos sujeta cuando nos apoyamos.

Veamos otro ejemplo sencillo, ahora con dos partículas ligadas. Imaginemos una polea con una cuerda de longitud ℓ de la que cuelga una masa m_1 a la izquierda y otra m_2 a la derecha. Tomemos como coordenada generalizada la distancia d de la polea a m_1. Hay un grado de libertad porque con d caracterizamos el estado de la polea. En términos cartesianos, si pensamos en un sistema de referencia con origen en la polea, se tiene que la posición de la masa m_1 es $x = 0$, $y = 0$, $z = -d$. Entonces su energía cinética es $T_1 = \frac{1}{2}m_2\big(\frac{d}{dt}(-d)\big)^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{d}^2$ y para m_2 es $T_2 = \frac{1}{2}m_2\big(\frac{d}{dt}(d-\ell)\big)^2 = \frac{1}{2}m_2\dot{d}^2$. Así que la energía cinética total es:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{d}^2$$

Sabiendo que la energía potencial gravitatoria en las cercanías de la superficie terrestre es $V = mgz$, la energía potencial total correspondiente a ambas partículas es $V = m_1g(-d) + m_2g(d-\ell)$. Por tanto el Lagrangiano es, salvo sumar una constante irrelevante,

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{d}^2 + (m_1 - m_2)gd.$$

Usando (2) con $q_1 = d$, $n = 1$, se deduce

$$\ddot{d} = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} \quad \text{que se integra como} \quad d(t) = \frac{(m_1 - m_2)gt^2}{2(m_1 + m_2)} + v_0t + d_0$$

donde $d_0 = d(0)$, $v_0 = \dot{d}(0)$ son la distancia y la velocidad (hacia abajo) iniciales.

1) Repasa todos los cálculos añadiendo las explicaciones que consideres necesarias.

La mecánica Hamiltoniana utiliza en vez de $L = T - V$ el Hamiltoniano $H = T + V$, además H se escribe como función de q_j y los llamados momentos generalizados p_j que son las parciales dentro del paréntesis de (2). Las ecuaciones que sustituyen a (2) en la mecánica Hamiltoniana son las *ecuaciones de Hamilton-Jacobi*

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \text{para} \quad j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

En el caso (1) de una sola partícula con $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, se tiene $p_1 = m\dot{x}$, $p_2 = m\dot{y}$, $p_3 = m\dot{z}$, con lo que $T = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$ y se sigue

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(q_1, q_2, q_3).$$

2) Comprueba que, en este caso, las ecuaciones (3) llevan de nuevo a $\vec{F} = m\vec{a}$.

Vamos con algo un poco más teórico simplemente para que practiques.

3) Imagina que en (1) en vez de usar las coordenadas cartesianas usas unas coordenadas generalizadas q_1, q_2 y q_3, siendo la relación entre ambas $x = f_1(q_1, q_2, q_3)$, $y = f_2(q_1, q_2, q_3)$, $z = f_3(q_1, q_2, q_3)$. Demuestra la fórmula

$$H = \sum_{j=1}^{3} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L.$$

4) Muestra, usando (2), que el segundo miembro en el ejemplo anterior cumple que su derivada con respecto del tiempo es nula. De aquí se deduce que H, la energía total, cinética más potencial, se conserva a lo largo de cada trayectoria.

Sugiero que mires algunas referencias, a tu gusto, para que te familiarices con el formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano. Puedes escoger las que quieras. Te recomiendo que no te metas en muchas profundidades sino que tiendas más a dar un vistazo, porque tampoco haremos un gran uso de la teoría. En caso de que no sepas dónde buscar me atrevo a sugerirte algunas sin mucho orden. Por supuesto, no mires todas porque tardarías mucho: [4] (mi favorito pero quizá demasiado físico), [5] (quizá demasiado matemático), [2], [6]. Si quieres algo más cercano a una clase universitaria, te sugiero los dos primeros vídeos y la primera parte del tercero:

- `https://www.youtube.com/watch?v=sCZ80l6UarM`
- `https://www.youtube.com/watch?v=szD1uzTBzZ4`
- `https://www.youtube.com/watch?v=IhlSqwZBW1M`

5) Intenta buscar en la literatura el *principio de mínima acción* (más propio, pero menos común es el nombre *principio de acción estacionaria*) y su relación con que las ecuaciones (2) sean independientes de las coordenadas elegidas. Escribe un párrafo sobre ello con alguna referencia.

6) Para que has entendido lo del Lagrangiano y el Hamiltoniano, escribe cómo resolver de ambas formas el péndulo simple. Aquí "resolver" significa únicamente llegar a la ecuación del péndulo $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta$. Esto viene en muchas referencias, incluso algunas de las anteriores. Explícalo con tus palabras e intenta mirarlo lo menos posible.

Una ventaja más del formalismo Lagrangiano es que permite traducir simetrías en leyes de conservación. Esto ha resultado crucial en la física moderna, especialmente en el estudio de partículas elementales.

7) Lee el apartado *Leyes de conservación: el teorema de Noether* que comienza en la p.5 de [1]. Escribe al menos un párrafo que lo resuma.

8) Considera un sistema con dos grados de libertad con Lagrangiano $L = \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2$. Comprueba que la transformación

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos h + \operatorname{sen} h & -2\operatorname{sen} h \\ \operatorname{sen} h & \cos h - \operatorname{sen} h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

lo deja invariante y escribe la ley de conservación correspondiente.

Como has leído, las fuerzas centrales son las que derivan de potenciales que solo dependen de la distancia al origen, no de la dirección. Para una partícula de masa m sometida a una fuerza de este tipo, el Lagrangiano en coordenadas cartesianas es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V\big(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\big).$$

9) Intenta dar una explicación lo más convincente que puedas desde el punto de vista matemático de que L es invariante por giros.

Por tanto, en la fuerzas centrales se conserva el momento angular. Esto implica que la partícula no puede salir de un plano. Aquí va la explicación: Podemos descartar el caso en que la velocidad $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ y la posición $\vec{r} = (x, y, z)$ sean siempre paralelas porque en ese caso el movimiento tendría lugar en una línea. Entonces para algún tiempo t_0 se tiene $\vec{n}_0 = \vec{r}(t_0) \times \vec{v}(t_0)$ y por la conservación del momento angular $\vec{n}_0 = \vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$ para todo tiempo, por tanto $\vec{r}$ pertenece al plano que tiene a $\vec{n}_0$ como vector normal y pasa por el origen.

10) Escribe como un teorema lo anterior (si una partícula está sometida a una fuerza central, su movimiento tiene lugar en un plano) e incluye la demostración, siguiendo las líneas anteriores con todos los detalles que te parezcan adecuados. Si necesitas ayuda, este resultado está en [3, Prop.1.3] pero te recomiendo que, en este problema, consultes esta u otra referencia como último recurso.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine lo que has aprendido con los ejercicios anteriores, constituyendo una introducción a la mecánica Lagrangiana (mencionando también Hamiltonianos), sobre todo a través de ejemplos. La extensión es libre siempre que no superes las 6 páginas con el formato de esta hoja. Si todavía no dominas el LaTeX quizá tardes bastante. No te preocupes pero no lo pospongas demasiado.

Referencias

[1] F. Chamizo. Gravitación y mecánica. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/model1415/resum01.pdf`, 2015.

[2] M. Ganz. Introduction to Lagrangian and Hamiltonian Mechanics. `http://image.diku.dk/ganz/Lectures/Lagrange.pdf`, 2008.

[3] H. Geiges. *The geometry of celestial mechanics*, volume 83 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[4] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley Series in Physics. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second edition, 1980.

[5] S. J. A. Malham. An introduction to Lagrangian and Hamiltonian mechanics. `http://www.macs.hw.ac.uk/~simonm/mechanics.pdf`, 2016.

[6] D. G. Simpson. Lagrangian and Hamiltonian Mechanics. `http://pgccphy.net/ref/advmech.pdf`, 2007.