Esta hoja y las sucesivas las iré poniendo en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/supervision/TFG/tfg.html` donde también hay una lista de la propuesta inicial de los contenidos. La fuente LaTeX, en los ficheros `DS21hoja*.tex`, te será muy útil como plantilla y para poder copiar fórmulas y referencias, sobre todo si al principio tienes menos soltura con LaTeX. Más o menos imita el formato del trabajo que se indica en la guía docente en cuanto a márgenes y tamaño de letra. Es totalmente necesario que tengas acceso cuanto antes a LaTeX, o bien porque lo instales en tu ordenador o bien porque te registres en Overleaf sin instalar nada (`https://www.overleaf.com/`).

Por si te sirve de algo, en `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/computer/latex/latex.html` hay una guía de LaTeX desde cero que escribí para un curso y una colección de algunos trucos más avanzados. Para que nos podamos comunicar, es fundamental que tengas conocimientos básicos de LaTeX.

Siguiendo tus preferencias, de vez en cuando en el trabajo habrá aplicaciones al estudio de series infinitas, y un capítulo por entero estará dedicado a ello. Esto no forma parte del material usual que aparece en los textos y dará un toque de originalidad a tu trabajo, que espero que aprecie el tribunal.

Comenzamos estudiando en esta hoja las propiedades básicas de las fracciones continuas. De un modo u otro todo está en las referencias [4], [1], [3], [2], que puedes consultar y utilizar a costa de adaptar la notación.

Una *fracción continua* es una expresión de la forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}} \qquad \text{con } a_0 \in \mathbb{Z} \text{ y } a_j \in \mathbb{Z}^+ \text{ para } j > 0.$$

Esta fracción podría acabar en cierto a_n o continuar indefinidamente. Se habla, respectivamente de fracciones continuas *finitas* o *infinitas*. Por razones tipográficas, prácticamente nunca se escriben expresiones como la anterior. Hay notaciones especiales más convenientes. La clásica y la moderna son, respectivamente,

$$a_0 + \frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\cdots \qquad \text{y} \qquad [a_0, a_1, a_2, \dots].$$

Usaremos esta última en tu trabajo, solo he mencionado la clásica para que no te sorprenda si la ves en algún libro. Aunque los a_j sean enteros, es interesante a veces considerar el corchete de la notación moderna como una función real de su último argumento (en el caso finito). El siguiente ejercicio es trivial, solo para que te familiarices con la notación.

1) Sea $f(x) = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x]$. Explica por qué $\lim_{x\to\infty} f(x) = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$. ¿Cuánto vale $\lim_{x\to 0} f(x)$?

El numerador y el denominador de $[a_0, \dots, a_n]$, como fracción irreducible (con denominador positivo), se suelen denotar con p_n y q_n. Esto es,

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0], \qquad \frac{p_1}{q_1} = [a_0, a_1], \qquad \frac{p_2}{q_2} = [a_0, a_1, a_2], \qquad \frac{p_3}{q_3} = [a_0, a_1, a_2, a_3], \qquad \dots$$

Los elementos de la sucesión, o de la lista finita, $\{p_n/q_n\}$ se dice que son las *convergentes* de la fracción continua. De aquí, $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$.

En algún momento a mediados del siglo XX, se introdujo (parece que no está muy claro quién lo hizo primero [5]) una relación de las fracciones continuas con las matrices enteras 2×2 de determinante ± 1 (las únicas que tienen inversa entera), la cual simplifica algunas pruebas. La mayoría de los autores no usan esta relación pero a mí se parece adecuada para esta parte de tu trabajo porque la hará más legible y elegante.

Si $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$\gamma(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad \text{para } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \det(\gamma) = \pm 1.$$

Lo mismo esta acción te suena de algún curso de variable compleja. Lo que debes saber es que es compatible con la multiplicación de matrices, esto es, $(\gamma_1 \gamma_2)(x) = \gamma_1\big(\gamma_2(x)\big)$. Si quieres dalo por hecho o hazlo como ejercicio. La relación con las fracciones continuas viene de que

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(x) = a + \frac{1}{x} \qquad \text{implica} \qquad [a_0, a_1, \dots, a_n, x] = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(x).$$

2) Usando lo anterior y considerando los límites $x \to \infty$ y $x \to 0$, deduce

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Hay una pequeña sutileza en esta prueba que es fácil pasar por alto, a ver si te das cuenta.

La identidad del ejercicio anterior nos permite dar pruebas rápidas de algunas de las propiedades básicas de las fracciones continuas.

3) Demuestra:

$$\begin{cases} \textbf{1.} \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2, \\ \textbf{2.} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2, \\ \textbf{3.} \quad q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n \quad \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Para la última, considera el determinante.

A veces se define artificialmente $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$ y así las dos primeras propiedades son válidas para $n \geq 1$. Con ello la convergente -1 es formalmente ∞. Quizá usemos este convenio en algún momento.

4) Prueba que toda fracción continua infinita converge. Para ello, deduce de las propiedades anteriores que $[p_{2n}/q_{2n}, p_{2n+1}/q_{2n+1}]$ es una sucesión de intervalos encajados de longitud $(q_{2n}q_{2n+1})^{-1} \to 0$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, partiendo de $\alpha_0 = \alpha$ y $a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor$, con $\lfloor x \rfloor$ la parte entera de x (el entero más cercano por debajo de x), si consideramos la recurrencia

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}, \qquad a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor,$$

está claro que tenemos

$$\alpha = [a_0, \dots, a_{n-1}, \alpha_n].$$

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, en algún momento $\alpha_n = a_n$, esto es, $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, porque su denominador va decreciendo, y obtenemos una fracción continua finita. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, claramente $\alpha_n \notin \mathbb{Q}$ y el proceso continúa indefinidamente. La conclusión es que, con este algoritmo, todo $\alpha \in \mathbb{R}$ admite un desarrollo en fracción continua y esta es finita si y solo si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

5) Lee con cuidado todo el párrafo anterior y escribe los detalles que consideres necesarios para que te resulte convincente. Si quieres céntrate en el caso $\alpha > 0$ para no entrar en discusiones de signos, aunque solo afectan a a_0.

Dicho sea de paso, el interés de las fracciones continuas en tiempos clásicos radicaba en gran medida en que las convergentes de un número irracional dan aproximaciones racionales muy buenas, en cierto sentido óptimas, facilitando los cálculos numéricos. Por ejemplo, para $\sqrt{2}$ la convergente $p_3/q_3 = 17/12$ ya da un error relativo menor que un 0,2 %.

6) Halla los desarrollos en fracción continua finita de $7/10$ y $-2/5$. Calcula también todas sus convergentes.

7) Halla p_n/q_n con $n = 0, 1, 2$ para π y para e.

En consonancia con tus gustos, terminaremos aplicando todo lo que has aprendido para evaluar una serie.

8) Deduce de las propiedades que siempre se cumple

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1}q_k}.$$

Como pista, piensa en la relación entre los sumandos y $p_k/q_k - p_{k-1}/q_{k-1}$.

9) Sea $r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ la razón áurea. Comprueba que $r = 1 + r^{-1}$ y utiliza esta relación para obtener el desarrollo en fracción continua $r = [1, 1, 1, \dots]$.

10) Demuestra que la convergente p_n/q_n de r es F_{n+1}/F_n con F_n los *números de Fibonacci*, definidos por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ con $F_0 = F_1 = 1$. Seguro que han aparecido en alguna asignatura del grado.

11) Concluye de los ejercicios anteriores la fórmula

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k}.$$

Si te apetece, suma con un ordenador 15 términos de la serie y comprueba la precisión de la aproximación.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento que combine lo que has aprendido con los ejercicios anteriores. Los que son más de cálculos pueden abreviarse como ejemplos, sin dar muchos detalles. Por otro lado, debes destacar las propiedades teóricas. Si quieres, utiliza los entornos Teorema, Proposición o Corolario para enunciarlos. En la guía de LaTeX que menciono al principio se explica cómo hacerlo al inicio del apartado "Enunciados y programación".

La extensión es libre con la recomendación de que intentes no alcanzar las 7 páginas con el formato de esta hoja. Si todavía no dominas el LaTeX quizá tardes bastante. No te preocupes pero no lo pospongas demasiado.

Referencias

[1] J. Cilleruelo and A. Córdoba. *La teoría de los números*. Biblioteca Mondadori. Mondadori España, Madrid, 1992.

[2] A. Ya. Khinchin. *Continued fractions*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1997. With a preface by B. V. Gnedenko, Reprint of the 1964 translation.

[3] S. J. Miller and R. Takloo-Bighash. *An invitation to modern number theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006. With a foreword by P. Sarnak.

[4] H. E. Rose. *A course in number theory*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1994.

[5] A. J. van der Poorten. Continued fraction expansions of values of the exponential function and related fun with continued fractions. *Nieuw Arch. Wisk. (4)*, 14(2):221–230, 1996.