La ecuación de Dirac es la ecuación clave que combina la mecánica cuántica y la relatividad especial. Después de que en la hoja anterior has visto algunos de los rudimentos de lo primero, veremos ahora algo de lo segundo.

Antes de comenzar, la ecuación de Dirac tiene un aspecto especialmente simétrico cuando se emplean *unidades relativistas* que posiblemente no conozcas. En breve consisten en suponer que la velocidad de la luz c es igual a 1 (un uno adimensional). Esto significa que 299792458 metros es lo mismo que un segundo. Consecuentemente podemos medir el tiempo con unidades de longitud o la longitud con unidades de tiempo. Al principio esto es lioso pero con una mínima práctica uno se acostumbra a ello y lo bueno que tiene este convenio es que muchas fórmulas, entre ellas la ecuación de Dirac, se vuelven más simples y fáciles de recordar.

Por ejemplo, en textos avanzados no es difícil ver que se emplea $E = m$ con E la energía y m la masa. Está en unidades relativistas y para pasarla a unidades "normales", llamadas no relativistas, se haría del siguiente modo: Sabemos que la energía (como el trabajo) es fuerza por espacio y la fuerza masa por aceleración, por tanto sus unidades son $ML/T^2 \cdot L = M(L/T)^2$ mientras que las unidades de m son M entonces el $(L/T)^2$ que falta debe ser c^2, ya que $c = 1$ hace que las unidades de L y T coincidan, por tanto la fórmula normal es $E = mc^2$. Fíjate que es más sugestivo pensar que la energía es igual a la masa, lo que afirma $E = m$, que pensar $E = mc^2$. La única pega de las unidades relativistas es que uno pierde la intuición acerca de qué es grande y pequeño a nuestra escala porque c^2 es enorme en nuestra vida diaria mientras que 1 no lo es.

El tema fundamental de esta hoja son las transformaciones de Lorentz cuyo ejemplo paradigmático es en unidades relativistas

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad t' = \gamma(t - vx) \qquad \text{con} \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}. \tag{1}$$

Lo que indican estas fórmulas es la relación entre las mediciones de longitudes y tiempo (x, t) de un observador que está quieto en el origen de la recta real y las mediciones (x', t') (respecto al mismo origen de espacio y tiempo) de otro que se mueve con velocidad v. Todos diríamos con Galileo que los tiempos no varían $t' = t$ y que las longitudes están relacionadas con $x' = x - vt$. Sin embargo la relatividad especial a través de (1) dice que los tiempos varían, son relativos. Al observador del origen le parece que el reloj del otro observador se atrasa y viceversa. La explicación de esta paradoja es que el efecto solo se nota a velocidades gigantescas.

1) Muestra que en unidades no relativistas (1) es

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad t' = \gamma(t - vx/c^2) \qquad \text{con} \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

y explica por qué $x' \neq x - vt$ y $t' \neq t$ solo es apreciable para velocidades muy grandes.

Como su nombre indica estas transformaciones las introdujo Lorentz pero fue Einstein el primero que creyó en su significado real dando forma a la relatividad especial. Su famoso artículo [Ein05] (hay traducción en [LEMWed] y otras en la red) se titula “Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento” y en él muestra que estas transformaciones dejan de algún modo invariantes las *ecuaciones de Maxwell* que gobiernan el electromagnetismo. Además de estar en el origen de la relatividad especial, tales ecuaciones son importantísimas en el mundo moderno, por ejemplo por las telecomunicaciones. En relación con la ecuación de Dirac volverán a aparecer indirectamente más adelante, por tanto algo tienes que aprender de ellas.

2) Lee al menos §1 y §2 de [Cha16]. Si quieres lee algunas secciones más o completa con otras fuentes[1]. Muestra que para campos electromagnéticos de la forma $\vec{E} = \big(0, E(x,t), 0\big)$ y $\vec{B} = \big(0, 0, B(x,t)\big)$, las cuatro ecuaciones de Maxwell en unidades relativistas se reducen a

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{2}$$

De alguna forma estas son las ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos unidimensionales.

Siguiendo más o menos [Dun08] te voy a explicar cómo se puede inferir (1). No es una demostración a los ojos de un matemático pero muy convincente para cualquier físico. Intenta seguir todo porque después te pediré que lo redactes. Si quieres saber cómo procedió originalmente Einstein, aparte de mirar su artículo, lo explico con mucho detalle en [Cha01, §1.2].

Digamos que nosotros somos el observador quieto en el origen mientras que el observador O' avanza a velocidad v por delante de nosotros. La ley de inercia (si no hay fuerzas los movimientos son rectilíneos uniformes) sugiere que las transformaciones buscadas entre longitudes y tiempos medidas por ambos observadores son lineales:

$$x' = Ax + Bt, \qquad t' = Cx + Dt.$$

Aunque todo lo que no sea $C = 0$ y $D = 1$ choque con nuestra intuición, seguimos adelante. Si O' va a velocidad v, al sustituir $x = vt$ debe obtenerse $x' = 0$. Por otro lado, para O' nuestra velocidad es $-v$ por tanto $x' = -vt'$ debe corresponder a $x = 0$. Con esto se deduce

$$x' = Ax - Avt, \qquad t' = Cx + At.$$

Si O' marcase dos puntos x'_1 y x'_2 entonces nosotros mediríamos en un instante fijado una separación de $x_2 - x_1$ donde él ve $A(x_2 - x_1)$. Es de suponer que esto es recíproco, el efecto es relativo. Por tanto imponemos que al despejar x y t en función de x' y t' el coeficiente

[1] La mejor exposición del electromagnetismo a nivel de grado que conozco es [FLS64].

de x' sea A. Haciendo el cálculo, las transformaciones buscadas quedan caracterizadas salvo determinar el parámetro A, al que siguiendo una tradición en física renombraremos como γ, por supuesto todavía no sabemos que este sea el γ de (1). El resultado es:

$$x' = \gamma x - \gamma v t, \qquad t' = \frac{1-\gamma^2}{\gamma v} x + \gamma t.$$

Por la regla de la cadena, haciendo este cambio en (2) se obtiene:

$$\gamma \frac{\partial E}{\partial x'} + \frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\frac{\partial E}{\partial t'} = \gamma v \frac{\partial B}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial B}{\partial t'} \qquad \text{y} \qquad \gamma \frac{\partial B}{\partial x'} + \frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\frac{\partial B}{\partial t'} = \gamma v \frac{\partial E}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial E}{\partial t'}.$$

Agrupando los términos con $\partial x'$ y con $\partial t'$, se sigue

$$\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\gamma E - \gamma v B\Big) = -\frac{\partial}{\partial t'}\Big(\gamma B + \frac{1-\gamma^2}{\gamma v} E\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial x'}\Big(\gamma B - \gamma v E\Big) = -\frac{\partial}{\partial t'}\Big(\gamma E + \frac{1-\gamma^2}{\gamma v} B\Big).$$

Si queremos que (2) se cumpla también para el observador O' parece que deberíamos tener $E' = \gamma E - \gamma v B$ y $B' = \gamma B - \gamma v E$, lo cual es coherente con $\gamma \to 1$ cuando $v \to 0$ para que la transformación tienda a la identidad, pero los segundo miembros solo cuadran con los primeros si $-\gamma v = (1-\gamma^2)\gamma^{-1} v^{-1}$, es decir, si $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$ (el signo $+$ es por lo de $v \to 0$). Con esto hemos llegado a (1).

3) Redacta con tus palabras la deducción anterior completando todas las cuentas que no he escrito. Puedes mirar [Dun08] pero dudo que te sirva de mucha ayuda porque allí hay menos explicaciones.

Minkowski, que había sido profesor de Einstein, dio una interpretación geométrica de las transformaciones de Lorentz. Inicialmente esto le pareció a Einstein una tontería pero en unos años cambió radicalmente de opinión porque resultó muy importante en el desarrollo de la relatividad general. En realidad fue Minkowski y no Einstein quien introdujo el concepto de espacio-tiempo [LEMWed] a pesar de que parte de la divulgación actual en Física nos cuente otra cosa. Esta interpretación geométrica es importante, en su vertiente algebraica, para entender que realmente la ecuación de Dirac es relativista.

Lo que Minkowski consideró es que al igual que los giros alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$ son todas las transformaciones directas[2] que dejan fija la forma cuadrática $x^2 + y^2$ asociada a la distancia al cuadrado, las transformaciones de Lorentz (1) son todas las transformaciones "directas" (en algún sentido, no te preocupes por ello) que dejan fija la forma cuadrática $t^2 - x^2$, que él considero como una distancia al cuadrado del espacio-tiempo. Vamos a comprobar esta invariancia de $t^2 - x^2$.

[2] Directas significa que conservan la orientación.

4) Muestra que en forma matricial (1) es

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix}$$

y que se cumple

$$\Lambda^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz diagonal es la de la forma cuadrática $t^2 - x^2$, explica por qué lo anterior indica que queda invariante.

Cuando generalizamos el movimiento a nuestras tres dimensiones junto con el tiempo, el análogo es considerar las transformaciones lineales que dejan invariante la forma cuadrática $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, cuya matriz es la matriz diagonal $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, y se definen las transformaciones de Lorentz generales como los elementos del *grupo de Lorentz*

$$\mathcal{L} = \left\{ \Lambda \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \,:\, \Lambda^t \eta \Lambda = \eta \right\}.$$

5) Prueba que $\mathcal{L}$ es realmente un grupo. ¿Es abeliano?

Cualquier teoría que aspire a ser relativista debe ser invariante por este grupo. Incluye a (1) extendida como la identidad en la tercera y cuarta coordenada y también incluye todas las aplicaciones lineales que dan giros y simetrías de $\mathbb{R}^3$ en las coordenadas espaciales. Esto es, matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \quad \text{con } C^t C = I.$$

6) Explica lo anterior.

Tarea a entregar. Debes escribir un documento donde se introduzcan las unidades relativistas, se explique la “deducción” de las transformaciones de Lorentz con las ecuaciones de Maxwell y se defina el grupo de Lorentz en relación con lo anterior. Todo esto está en los propios enunciados que he escrito en esta hoja, tu misión es desentrañarlos dando explicaciones más detalladas que a ti te resulten convincentes.

La extensión aproximada que propongo es cinco páginas, pero permítete una holgura generosa por arriba y por abajo. Te sugiero que un formato como el de esta página o de la plantilla del TFG, esto es, que no hagas la letra minúscula o quites los márgenes para que quepa más

---

Referencias

[Cha01] F. Chamizo. Seminario 2001: Una odisea en el espacio-tiempo. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/libreria/fich/APseminario02.pdf`, 2001.

[Cha16] F. Chamizo. Las ecuaciones de maxwell en plan fácil. `http://www.uam.es/fernando.chamizo/physics/physics.html`, 2016.

[Dun08] D. J. Dunstan. Derivation of special relativity from Maxwell and Newton. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 366(1871):1861–1865, 2008.

[Ein05] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 17:891–921, 1905.

[FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.

[LEMWed] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, and H. Weyl. *The principle of relativity.* A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity. Dover Publications Inc., New York, N. Y., undated. With notes by A. Sommerfeld, Translated by W. Perrett and G. B. Jeffery.